Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Мы определяли кривую в n-мерном проективном пространстве как подмножество в этом пространстве, которое можно задать набором из $n-1$ независимых полиномиальных уравнений в окрестности каждой ее точки. Как получить такое подмножество?
Один из способов — отобразить кривую в пространство. Например, отображение

$$(u:v) \mapsto (u^3 : u^2v : uv^2 : v^3)$$

проективной прямой в проективное пространство $\mathbb{C}P^3$ задает в нем *скрученную кубику*.
Скрученная кубика является алгебраической кривой: в окрестности каждой своей точки она задается двумя из трех уравнений $z_0z_3 = z_1z_2, z_1^2 = z_0z_2, z_2^2 = z_1z_3$. В то же время, любые два из этих уравнений, помимо скрученной кубики, выделяют еще прямую. Например, первые два уравнения выделяют прямую $z_0 = z_1 = 0$. Эта прямая пересекает скрученную кубику в точке $(0:0:0:1)$.

Лекция 6. Кривые в проективных пространствах: степень кривой

Степень алгебраической кривой в проективном пространстве нельзя определить как степень задающего ее многочлена, поскольку кривую нельзя задать одним уравнением. Однако второе определение степени работает.

Степень алгебраической кривой в проективном пространстве нельзя определить как степень задающего ее многочлена, поскольку кривую нельзя задать одним уравнением. Однако второе определение степени работает.

Definition

Степенью кривой в проективном пространстве называется количество точек ее пересечения с общей гиперплоскостью.

Общая гиперплоскость пересекает кривую трансверсально, и кратность всех точек пересечения равна 1. Как и в плоском случае, количество точек пересечения с общей гиперплоскостью мы можем заменить количеством точек пересечения с произвольной гиперплоскостью, если будем учитывать их кратность.

Задача. Чему равна степень скрученной кубики?

Степень можно определить не только у кривой, но и у гладкого алгебраического подмногообразия любой размерности в проективном пространстве.

Definition

Подмножество $X \subset \mathbb{C}P^n$ называется *гладким алгебраическим подмногообразием коразмерности* k, если для любой его точки $x \in X$ существует такой набор из k однородных многочленов $F_1, \dots, F_k$, что X в некоторой окрестности точки x задается набором уравнений $F_1 = \dots = F_k = 0$ и дифференциалы $dF_1, dF_2, \dots, dF_k$ линейно независимы в точке x (а значит, и в некоторой ее окрестности).

Степень можно определить не только у кривой, но и у гладкого алгебраического подмногообразия любой размерности в проективном пространстве.

Definition

Подмножество $X \subset \mathbb{C}P^n$ называется *гладким алгебраическим подмногообразием коразмерности* k, если для любой его точки $x \in X$ существует такой набор из k однородных многочленов $F_1, \dots, F_k$, что X в некоторой окрестности точки x задается набором уравнений $F_1 = \dots = F_k = 0$ и дифференциалы $dF_1, dF_2, \dots, dF_k$ линейно независимы в точке x (а значит, и в некоторой ее окрестности).

Размерность гладкого алгебраического подмногообразия коразмерности k в $\mathbb{C}P^n$ равна $n - k$.

Лекция 6. Алгебраические подмногообразия в проективных пространствах: теорема Безу

Theorem (Теорема Безу)

Пусть F, G — однородные многочлены от четырех переменных и X — кривая, заданная уравнениями $F = G = 0$, причем в каждой ее точке дифференциалы dF и dG линейно независимы. Тогда степень кривой X равна произведению степеней многочленов F и G.

Разумеется, аналогичная теорема верна для гладких алгебраических многообразий, заданных трансверсальным пересечением произвольного набора гиперповерхностей в комплексном проективном пространстве произвольной размерности. Она носит (ко)гомологический характер. Кольцо когомологий $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ порождено классом h гиперплоскости, причем $h^{n+1} = 0$. Гиперповерхность степени d представляет класс когомологий $d \cdot h$, а алгебраическое подмногообразие X коразмерности k представляет класс когомологий $\deg X \cdot h^k$.

Теорема Безу означает, в частности, что скрученную кубику нельзя представить в виде трансверсального пересечения двух гиперповерхностей в $\mathbb{C}P^3$. Если бы это можно было сделать, то эти гиперповерхности должны были бы иметь степени 1 и 3, т.е. кубика лежала бы на плоскости, а это не так (она “скрученная”).

Лекция 6. Род трансверсального пересечения двух квадрик

Трансверсальное пересечение достаточного количества гиперповерхностей — еще один способ задания кривых в проективных пространствах. Пусть $F(z_0, z_1, z_2, z_3) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, $G(z_0, z_1, z_2, z_3) = a_0 z_0^2 + a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + a_3 z_3^2$ — два однородных многочлена степени 2 от 4 переменных. Поверхность $F = 0$ гладкая, и при общем значении параметров a_i поверхность $G = 0$ тоже гладкая и пересекает поверхность $F = 0$ трансверсально. Вычислим род кривой, являющейся пересечением этих поверхностей.

Рассмотрим проекцию кривой пересечения из точки $(0:0:0:1)$, т.е. отображение $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \mapsto (z_0 : z_1 : z_2)$. Это отображение переводит пересечение квадрик в конику $a_0 z_0^2 + a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 = a_3(z_0^2 + z_1^2 + z_2^2)$ и является разветвленным накрытием кратности 2. У этого отображения 4 точки ветвления (все они простые).

Таким образом, накрывающая кривая имеет род 1. Поскольку условие нетрансверсальности пересечения выделяет в пространстве пар квадрик гиперповерхность, *трансверсальное пересечение любых двух квадрик в проективном пространстве имеет род* 1.

Лекция 6. Вложения и погружения алгебраических кривых

Еще один способ получения кривых в проективных пространствах — проектирование кривых, вложенных в какое-либо пространство, в пространство меньшей размерности. Любую гладкую кривую в проективном пространстве размерности больше 3 можно биголоморфно спроектировать в проективное пространство меньшей размерности.

Theorem (Whitney)

Всякую алгебраическую кривую можно вложить в $\mathbb{C}P^3$.

Доказательство. Пусть $C \subset \mathbb{C}P^n$ — гладкая алгебраическая кривая, $n \geq 4$. Рассмотрим многобразие в $\mathbb{C}P^n$, являющееся замыканием множества точек, лежащих на хордах кривой C, т.е. прямых, соединяющих пары ее точек. Это подмногообразие имеет размерность 3, а значит содержит не все точки пространства $\mathbb{C}P^n$. Поэтому есть точка, проектирование из которой осуществляет биголоморфное отображение кривой C в кривую в проективном пространстве меньшей размерности.

Лекция 6. Погружение комплексных кривых

Кривую в проективном пространстве $\mathbb{C}P^3$ можно спроектировать в кривую на плоскости, но эта проекция уже не обязательно будет биголоморфизмом.

Theorem

Пусть $C \subset \mathbb{C}P^3$ — гладкая алгебраическая кривая. Тогда в $\mathbb{C}P^3$ существует точка, образ проекции кривой C из которой — погруженная кривая.

Плоская кривая называется *погруженной* (или *нодальной*), если ее единственные особенности — точки двойного трансверсального самопересечения (*узлы, ноды*).

Доказательство. Исключительными направлениями проектирования являются касательные к кривой C и тройные секущие. Замыкание множества точек, лежащих на этих прямых — двумерное алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{C}P^3$, поэтому в пространстве есть точки, не лежащие на нем.

Гладкая кривая, невырожденное голоморфное отображение которой в нодальную плоскую кривую взаимно-однозначно на дополнении к множеству двойных точек, называется *нормализацией* этой нодальной кривой. Теорема означает, что *всякая гладкая алгебраическая кривая является нормализацией некоторой нодальной плоской кривой*.

При проектировании из общей точки степень кривой остается неизменной.

Theorem

Пусть δ — количество двойных точек плоской нодальной кривой степени d. Тогда род нормализации этой кривой равен $(d-1)(d-2)/2-\delta$.

Доказательство. Пусть нодальная кривая имеет в аффинной карте уравнение $f=0$, причем обе касательные к кривой в каждой двойной точке невертикальны. Эта кривая пересекается с кривой $\partial f/\partial y=0$ по $d(d-1)$ точкам с учетом кратности. Каждая из δ двойных точек является точкой пересечения кратности 2 кривых $f=0$ и $\partial f/\partial y=0$ (по одной точке на каждой из ветвей). Поэтому на кривой $f=0$ имеется $d(d-1)-2\delta$ точек ветвления проекции на ось x. По формуле Римана–Гурвица

$$d(d-1)-2\delta=2d+2g-2,$$

откуда

$$g=\frac{(d-1)(d-2)}{2}-\delta.$$

Семинар 6. Задачи

- Представьте рациональную нормальную кривую в $\mathbb{C}P^4$ в виде пересечения гиперповерхностей.
- Докажите, что при проектировании кривой в проективном пространстве, не лежащей ни в какой гиперплоскости, из общей точки кривой степень ее образа на 1 меньше степени кривой.

Семинар 6. Задачи

- Докажите, что никакие $n+1$ точек рациональной нормальной кривой не лежат в одной гиперплоскости. Докажите, что это единственная (с точностью до проективных преобразований) кривая с таким свойством.
- Докажите, что любая кривая степени 3 в проективном пространстве, не лежащая ни в какой гиперплоскости, переводится в скрученную кубику проективным преобразованием пространства.
- Докажите, что через любые $n+3$ точки в общем положении (т.е. таких, что ни через какие $n+1$ из них не проходит гиперплоскость) в n-мерном проективном пространстве проходит единственная рациональная нормальная кривая.
-

Семинар 6. Задачи

- Найдите размерность пространства плоских кривых степени 4 с одной двойной точкой.
- Оцените степень плоских кривых (с двойными точками), необходимую, чтобы представить любую кривую рода g.

Семинар 6. Задачи