Представления групп (алгебр)

G — группа конечная

A — конечномерн. алгебр над алг. замкнутым полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$)

V — лин. пространство над $\mathbb{K}$

Выбрал базис в V

Группа $\mathrm{Aut}(V)$ — обратимые преобр V $\longleftrightarrow$ обратим. матрицы

Алгебра $\mathrm{End}(V)$ — лин. преобр. V $\longleftrightarrow$ $\forall$ матрица

Представление ρ_V гр. G / алг. A на пр-ве V — гомоморфизм

$$G / A \xrightarrow{\rho_V} \mathrm{Aut}\,V / \mathrm{End}\,V$$

$$\forall b, a \in A \qquad \rho_V(a \cdot b) = \rho_V(a) \cdot \rho_V(b)$$

лин. структура тоже сохраняется при ρ_V

Изоморфные представления ρV и $\rho V'$

$$V \xrightarrow{\varphi} V' \qquad \varphi \text{ - обратимо}$$

$$\varphi(\rho_V(a)) = \rho_{V'}(\varphi(a)) \qquad \forall a \in A$$

Выбрал базис

$$\rho_V(a) \mapsto \Lambda_a$$

$$\rho_V'(a) \mapsto \Phi \Lambda_a \Phi^{-1}$$

Подпредставление ρ_U в ρ_V

$$U \subset V$$

$$\forall a \in A \qquad \rho_U(a)\, U \subset U$$ ← A-inv подпространство

В базисе

$$a \in A \longmapsto \Lambda_a = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * \\ \\ \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, U \\ \\ \end{matrix} \Big\}\, V$$

Критерий неприводимости ρ_V

$\Updownarrow$

а) $\forall v \in V$ — циклический, т.е.

$$\forall a \in A \quad \rho_V(a) \cdot v = V$$

б) $A \xrightarrow{\rho_V} \operatorname{End} V$ — эпиморфизм

$$\operatorname{Im} \rho_V = \operatorname{End} V$$

Выберем в V базис $\{v_i\}_{i=1\ldots n}$ $\quad \dim V = n$

$$\operatorname{End} V \cong \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$$

Матричные единицы

$$E_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ i & \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & 0 \\ \hline & 1 & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right) \end{array} \qquad v_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Vec_n $\qquad E_{ij}\, v_k = \delta_{jk}\, v_i$

Mat_n $\qquad E_{ij}\, E_{kl} = \delta_{jk}\, E_{il} \qquad \dim \operatorname{Mat}_n = n^2$

$\exists!$ неприв. предст. $\operatorname{Mat}_n \to \mathrm{Vec}_n$ (кроме трив)

Mat_n — простая алгебра

Def A — простая, если $\forall a \neq 0$ $\underbrace{AaA}_{\text{двустор идеал}} = A$

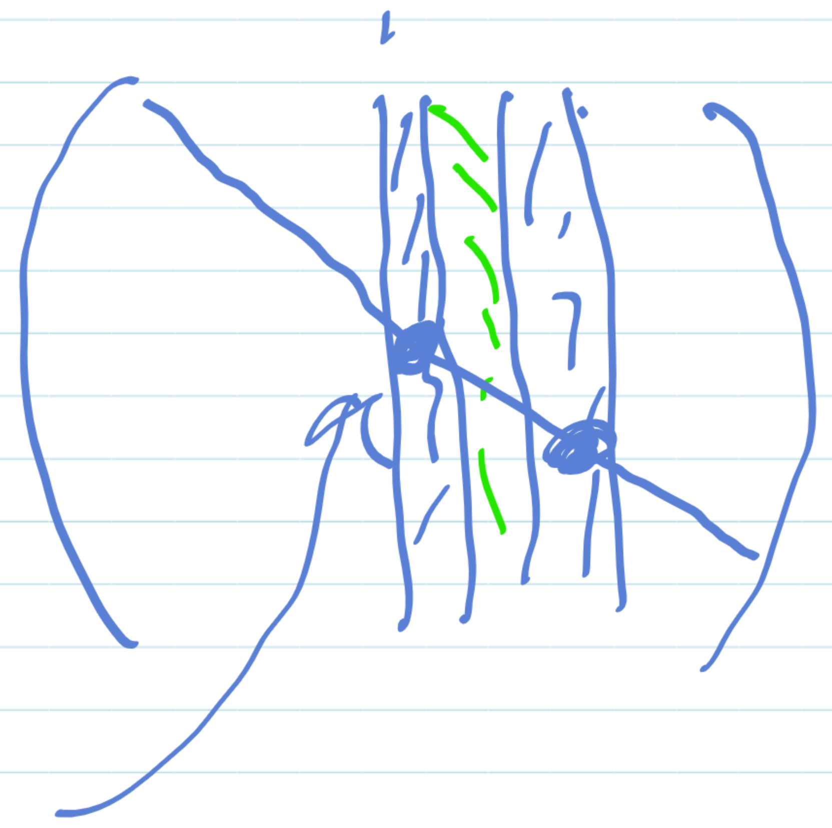
$\nexists$ нетрив. двусторонних идеалов

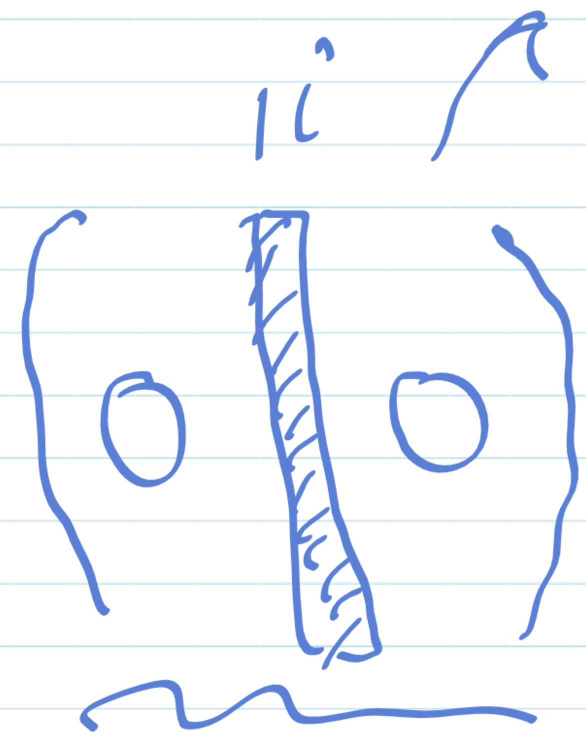
Утв $\forall$ простая алг. A над алг. замк. $\mathbb{K}$ $\sim \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ для некоторого n.

Def регулярное представление ρ_A

$$V = A, \quad \vec{a} \leftrightarrow a \qquad \rho_A(b)\,\vec{a} = \vec{a\cdot b}$$

$$\rho_{\mathrm{Mat}_n} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Vec}_n^{(i)} \qquad \mathrm{Vec}_n^{(i)} = \mathrm{Span}(\overset{v_k}{E_{ki}})_{k=1..n}$$





E_{ii} — диаг. матр. единица — идемпотент

$$\left.\begin{cases} E_{ii}^2 = E_{ii} \\ E_{ii}E_{kk} = \delta_{ik}E_{kk} \end{cases}\right\}\ \text{взаимно ортог. идемп.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} E_{ii} = \mathbb{1}$$ — пирсовское разложение $\mathbb{1}$ в алг.

неприводим. идемп.

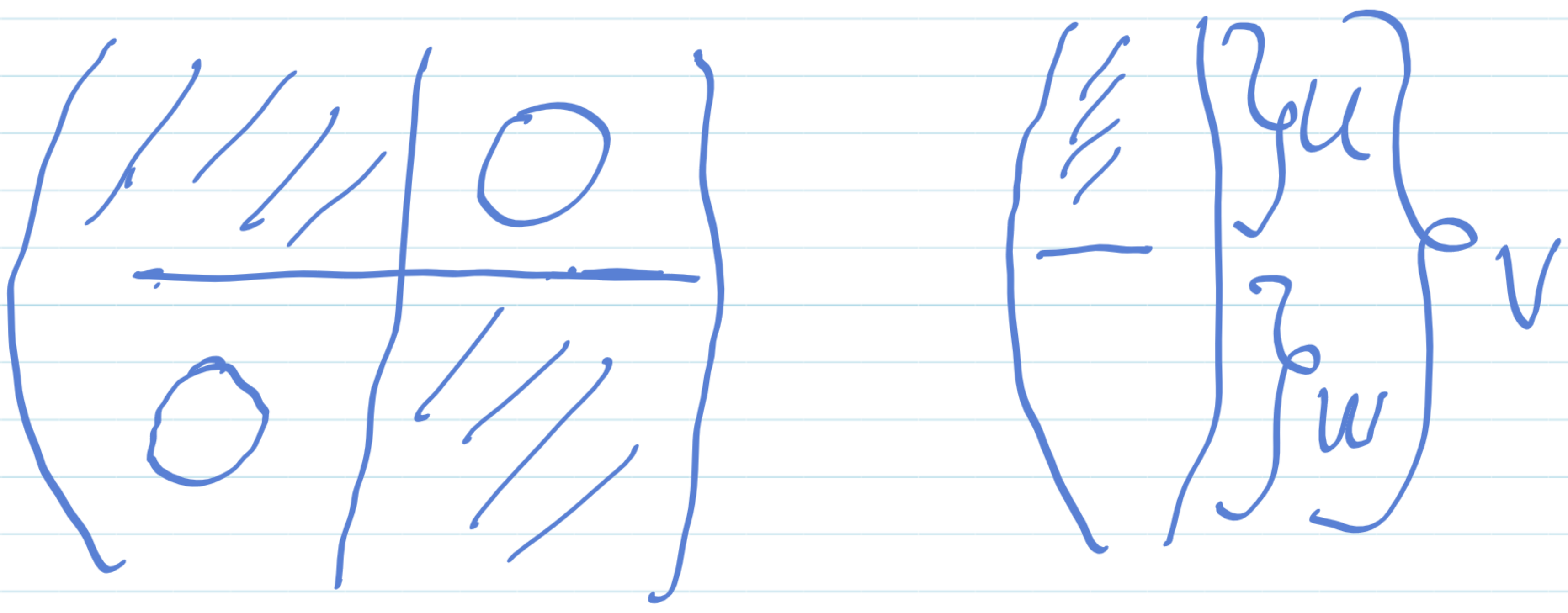
E_{ii} — примитивный идемпотент

$E_{ii} = e_1 + e_2$, где $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ $e_{i,j} \neq 0$

Приводимое представление $U \subset V$

Разложимо

$V = U \otimes W$



Если $V = \bigoplus\limits_i V_i$, ρ_{V_i} — неприводимо

то ρ_V — вполне приводимо

Теорема Машке (1898)

$\forall$ представление G над $\mathbb{K}$: $\operatorname{char} \mathbb{K}$ не делит $|G|$

вполне приводимо

$\Downarrow$

Def Групповая алг. $\mathbb{K}[G] \ni a = \sum\limits_{i=1}^{|G|} \alpha_i g_i \quad g_i \in G$

$$a \cdot b = \sum_{i,j} (\alpha_i g_i)(\beta_j g_j) \overset{\mathbb{K}}{=} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \underbrace{(g_i g_j)}_{\in G}$$

в применении к $\mathbb{K}[G]$

$\mathbb{K}[G]$ — полупроста

Def: A — полупроста, если ее $\operatorname{rad} A = 0$

2 сторонний идеал, порожд. существенно нильпот. элементами x:

$$\underbrace{A x A x A \dots x A}_{\text{число } x \text{ — конечно}} = 0$$

В $\forall$ неприводимом ρ_V $\operatorname{Rad} A \in \operatorname{Ker} \rho_V$

$A / \operatorname{Rad} A$ — полупроста

Теорема Веддербёрна–Артина (1907–1927) $\mathbb{K}$ – алг. замкнуто

а) A – полупроста ($\mathrm{Rad}\,A = 0$)

$\Updownarrow$

б) $\forall$ представление ρ_V алг. A вполне приводимо

$\Updownarrow$

в) $$A \cong \mathrm{Mat}_{n_1}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_{n_2}(\mathbb{K}) \times \ldots \times \mathrm{Mat}_{n_k}(\mathbb{K})$$

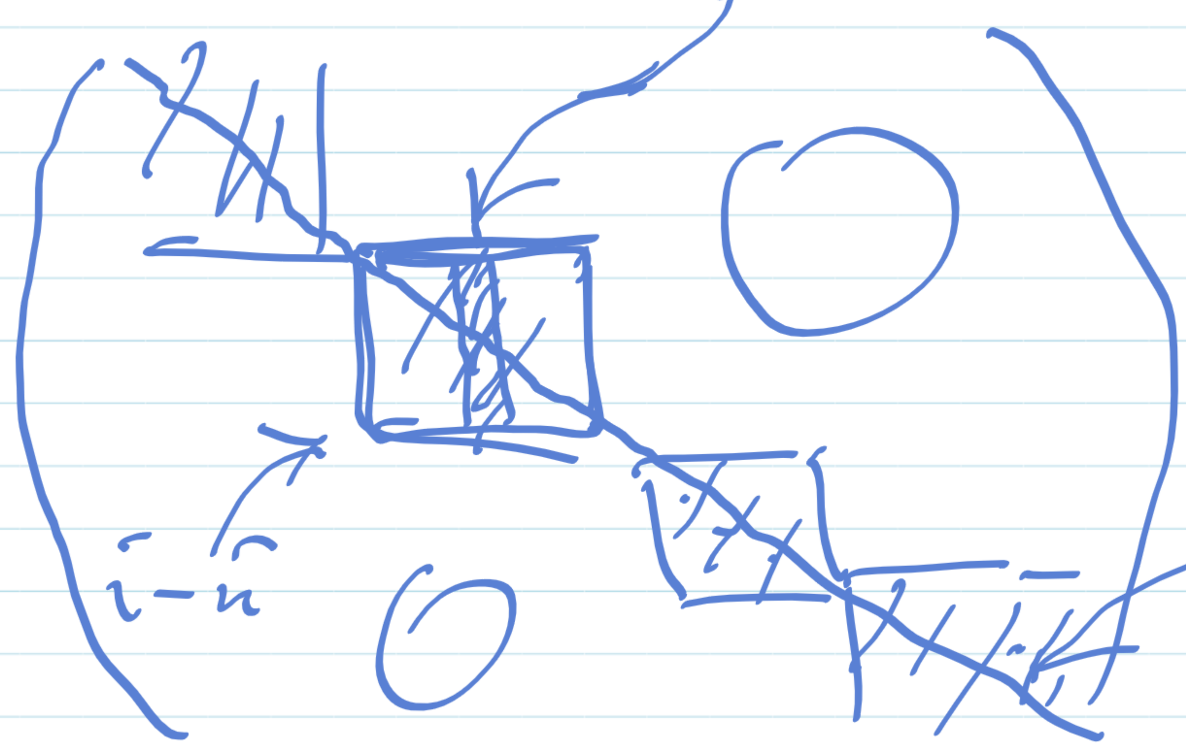
набор $(n_1, n_2 \ldots n_k)$ – численные инварианты A

$\Updownarrow$

г) регулярное предст A

$$\rho_A = \bigoplus_{i=1}^{k} n_i \cdot \underbrace{\mathrm{Vec}_{n_i}(\mathbb{K})}$$

полупростая A $\longleftrightarrow$



$i=1\ldots k$

$E_{jj}^{(i)}$

$j=1\ldots n_i$

Следствие

$$\dim A = \dim \rho_A = \sum_{i=1}^{k} n_i^2$$

$\leftarrow$ размерности неприв. предст. A.

Неприв. представления характеризуются леммой Шура (1905)

Пусть U и V — пространства неприв. предст. ρ_U, ρ_V алг. A над $\mathbb{K}$

$$\rho_U \not\cong \rho_V \quad : \quad \mathrm{Hom}_A(U, V) = 0$$

если $\mathbb{K}$ — алг. замкн: $\mathrm{Hom}_A(V, V) = \mathbb{K} \cdot \mathrm{Id}_V$

$\Downarrow$ Следствие

$$\forall a \in Z(A) \quad \rho_V(a) = \underline{c_a}\, \mathrm{Id}_V$$

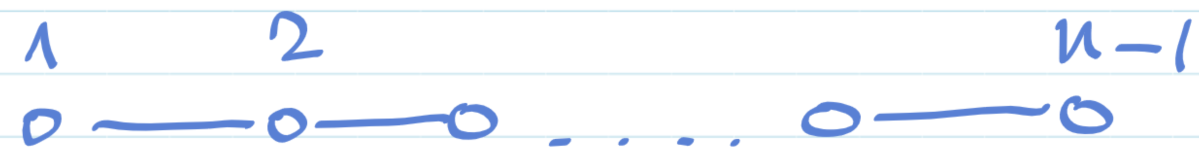
неприв

характеризуют неприв. представление ρ_V

Симметрическая группа S_n (напоминание)

Def: порождается σ_i, $i = 1 \dots n-1$ $\quad \sigma_i = |\,..|\,\overset{i\ \ i+1}{\times}\,|\,..|$

$$\begin{cases} \sigma_i^2 = 1, \quad (\sigma_i \sigma_j)^2 = 1 \quad |i-j| > 1 \\ (\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = 1 \end{cases}$$



$\#$ребр$(i,j) = m_{ij}$: $(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}+2} = 1$

$\# S_n = n!$

$\mathbb{C}[S_n]$ — полупроста

Башня групп/алгебр

$$1 = S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots \subset S_i \subset S_{i+1} \subset \dots \subset S_n$$

(добавить еще генератор σ_i + соотн. на него)

1) $\rho_V^{(S_{i+1})} = \bigoplus_\alpha \rho_\alpha^{(S_i)}$ — редукция

2) $\rho_V^{(S_i)} \longrightarrow$ представл. S_{i+1}

$$\operatorname{Ind} \rho_V^{(S_i)} = \bigoplus_\beta \rho_\beta^{(S_{i+1})}$$

известно как действуют $\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}$ $\quad V$

? σ_i $\quad \forall v \in V \quad \sigma_i v = v_{\sigma_i}$ → расширяем до большего пространства

$\sigma_{i-1} \sigma_i | v$

$\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i | v$

$x \alpha \otimes y = x \otimes \alpha y$

числа

$\mathbb{C}[S_{i+1}] \otimes V$ ← пространство $\rho_V^{S_i}$

$\mathbb{C}[S_{i+1}]$ $\quad$ $\mathbb{C}[S_i]$

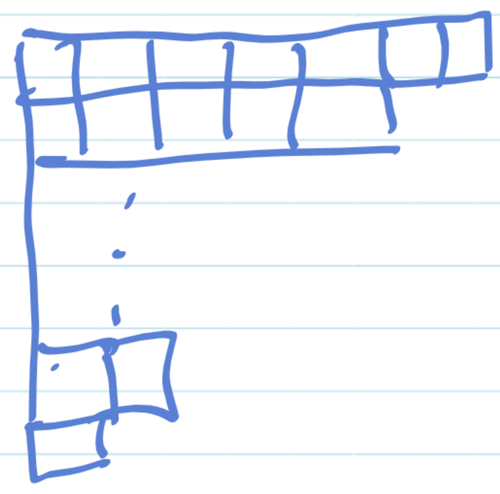
Неприв предст. S_n

$V_{\lambda \vdash n}$ $\qquad \lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 0)$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$$

$\Updownarrow$ диаграмма Юнга

клеток $= \lambda_i$ в ряду i



S_1 $\qquad \lambda = (1) \longrightarrow V_{(1)}$ – трив. предст.

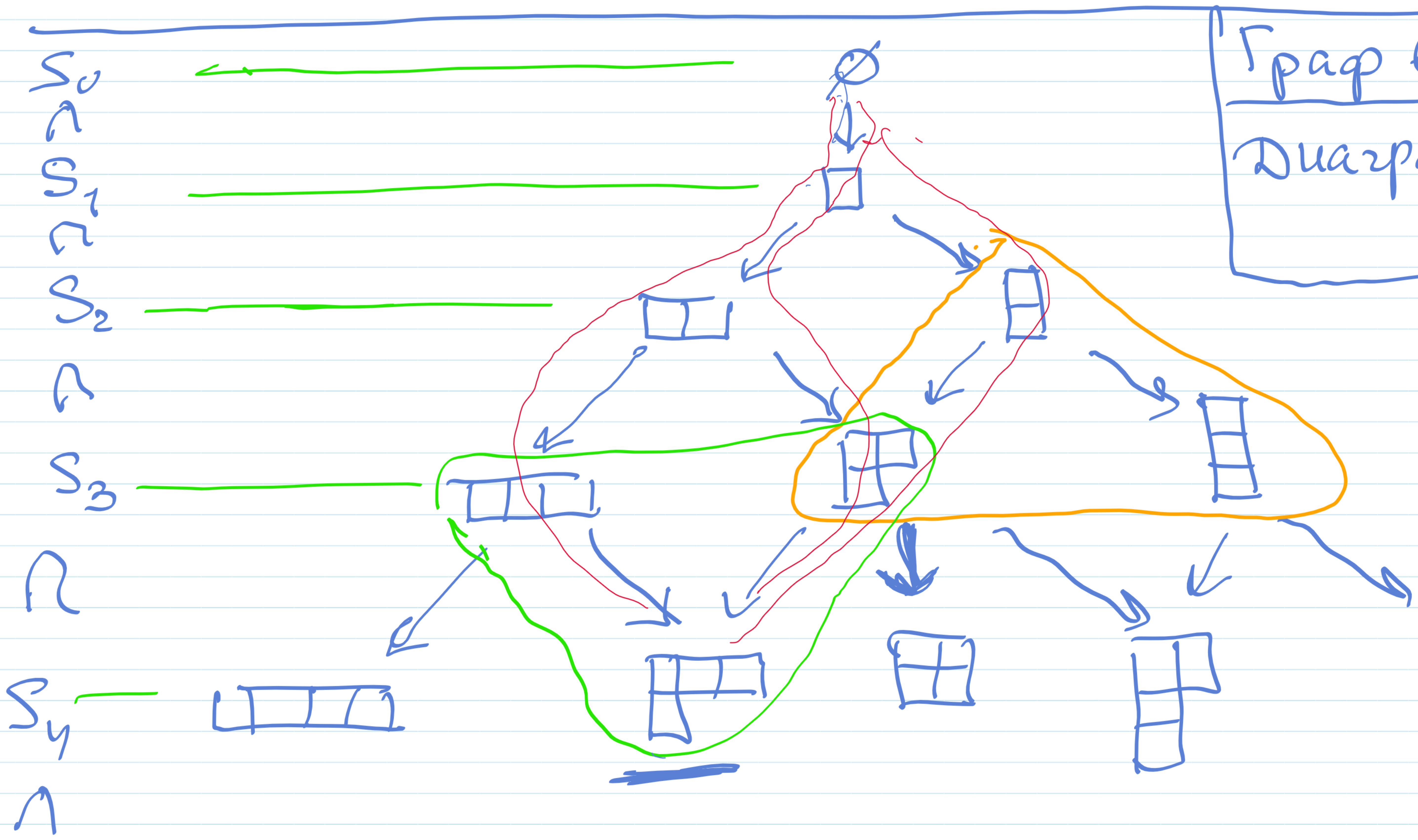
S_2 $\qquad \lambda : (2)\ (1,1)$ $\qquad V_{(2)}$ $\qquad V_{(1,1)}$ $\qquad$ – $\dim = 1$

$\sigma_1 \mapsto 1$ $\qquad \sigma_1 \mapsto -1$

S_3 : $\qquad V_{(3)}$ тождеств $\qquad V_{(1,1,1)}$ знакопер $\qquad V_{(2,1)}$ $\quad \underline{\dim = 2}$

$\sigma_i \mapsto 1$ $\qquad \sigma_i \mapsto -1$

$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 3!$



Граф ветвления

Диаграмма Браттели

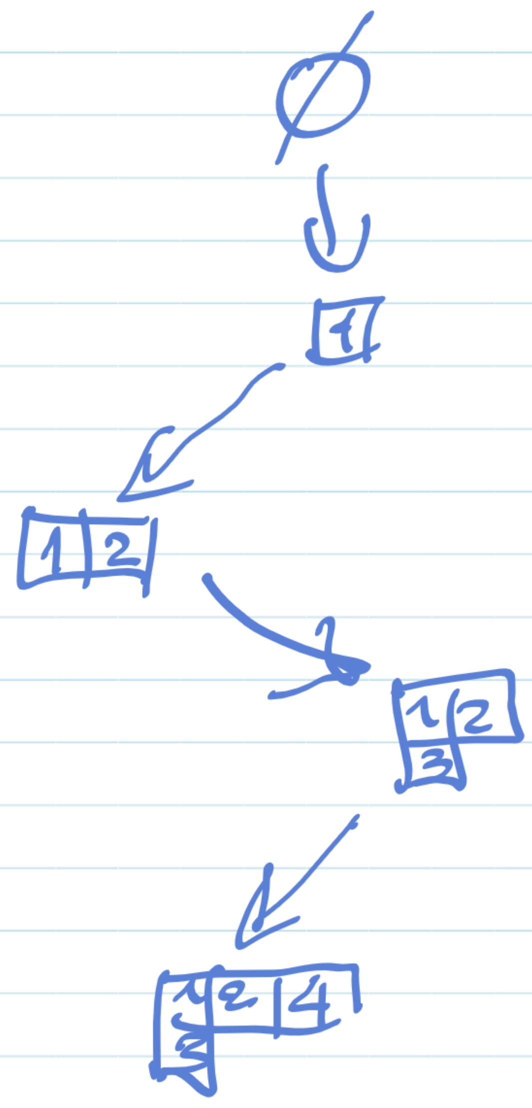
редукция $\qquad$ индукция $\quad \mathrm{Ind}_{S_2} V_{(1,1)} = \underbrace{V_{(2,1)} \oplus V_{(1,1,1)}}_{S_3}$

$$\underset{S_4}{V_{(3,1)}} = \underbrace{V_{(3)} \oplus V_{(2,1)}}_{S_3} = (V_{(2)}) \oplus \underbrace{(V_{(2)} \oplus V_{(1,1)})}_{S_2} =$$

$\dim V_{(3,1)} = 3$ $\qquad = 3\, S_{(1)}$

$\dim V_\lambda$ = # путей из вершины $\varnothing$ графа ветвления в вершину λ.

путь



$$\begin{array}{|lll} 1&2&3\\ 4&& \end{array} \quad \begin{array}{|lll} 1&2&4\\ 3&& \end{array} \quad \begin{array}{|lll} 1&3&4\\ 2&& \end{array}$$

$V_\lambda \quad \{v_{t_{\alpha,\lambda}}\}$

накидывание нумерованных клеток $\boxed{i}$ $i=1,2,\dots$

в квадрант

притягиваются

В $\lambda \vdash n$ помещаем числа $1 \dots n$

$\longrightarrow$ возраст

возраст $\downarrow$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

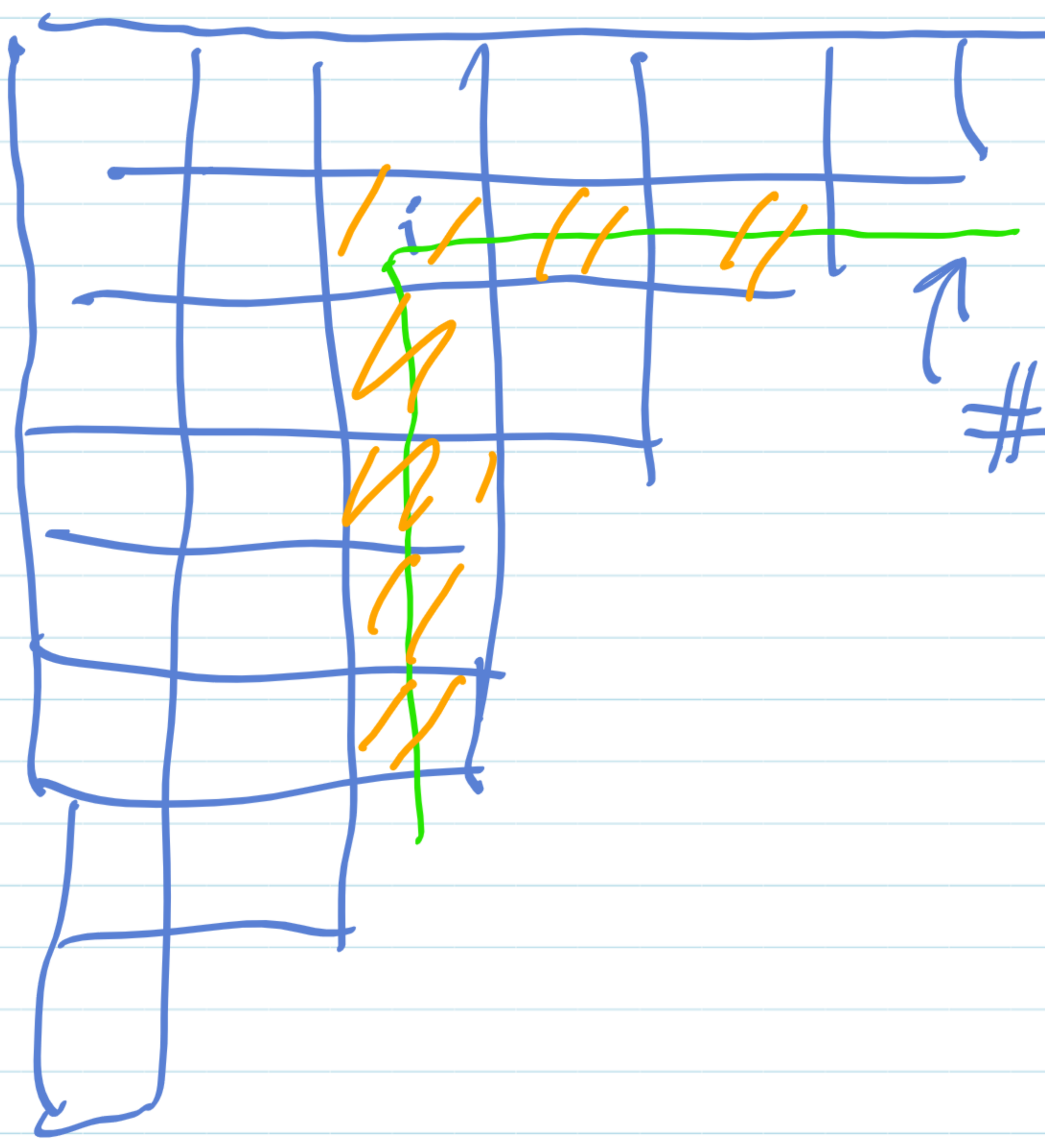
$\Vert$

$t_{\alpha,\lambda}$

$\leftarrow$ стандартная таблица Юнга

Формула крюков

$$\dim V_{\lambda \vdash n} = \# t_{\alpha, \lambda \vdash n} = \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n} \ell_{\lambda, i}}$$



$\#$ клеток пересекаемых крюком $= \ell_{i,\lambda} = 7$

$$\dim V_{\ydiagram{2,2,1} \vdash 5} = \frac{5!}{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1} = 5.$$

$$\begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & \end{array}$$

Алгебра Ивахори – Гекке (Iwahori–Hecke)

Def $H_n(q)$ $\quad q \in \mathbb{C}^\times$

генераторы g_i $\quad i = 1, \dots, n-1$ $\quad \underbrace{| \dots | \overset{i \;\; i+1}{\times} | \dots |}$ $= g_i$

$$\begin{cases} g_i g_j = g_j g_i & |i-j|>1 \\ g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \end{cases} \leftarrow \text{Артиново представл. } B_n$$

$$\underset{q}{\underline{g_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) g_i}} \leftarrow \text{соотн. Гекке}$$

факторизует $\mathbb{C}[B_n]$ до $H_n(q)$

$$(g_i - q1)(g_i + q^{-1}1) = 0$$

Факт 1 $\boxed{\dim H_n(q) = n!}$ $(= \# S_n)$

при $q = \pm 1$ $\quad H_n(\pm 1) = \mathbb{C}[S_n]$

Утв $\dim H_n(q) \leq n!$

Башня алгебр $\quad H_0(q) \subset H_1(q) \subset \dots \subset H_{n-1}(q) \underset{\text{добавление } g_{n-1}}{\subset} H_n(q)$

рассмотрим слова $\omega = g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k} \in H_n(q)$

можно добиться, чтобы g_{n-1} встречалось в ω ≤ 1

$$\omega = \alpha + \sum_i \beta_i g_{n-1} \gamma_i$$

$\alpha, \beta_i, \gamma_i$ – слова из $H_{n-1}(q)$

$g_i \;\; i = 1..n-2$

$$\dots \; g_{n-1} \underbrace{g_{n-3} \dots g_{n-2} \dots g_{n-3}}_{H_{n-1}(q)} g_{n-1} \dots \; - \quad \begin{cases} \underline{g_{n-1}^2} & \underline{g_{n-1} g_{n-2} g_{n-1}} \\ 1 + (q-q^{-1}) g_{n-1} & g_{n-2} g_{n-1} g_{n-2} \end{cases}$$

$$g_{n-1}(\underbrace{\qquad\qquad}_{g_1\dots g_{n-3}})\, g_{n-2}\, (\cancel{//})\, g_{n-1} \qquad g_{n-1}^2 \sim \underline{g_{n-1}^{0,1}}$$

$$H_n(q) = \underline{H_{n-1}(q)} \oplus \underline{H_{n-1}(q)\, g_{n-1}\, H_{n-1}(q)}$$

$\dim H_n(q)$ $\qquad \Sigma \dim H_{n-1} + \dim(\ldots)$

л.с. $(n-1)!$

H_1 $\qquad 1$

H_2 $\qquad \underbrace{1, \quad g_1}$

H_3 $\qquad \left.\begin{matrix} \{\overbrace{1, g_1}^{2}\}(g_2) \\ (g_2 g_1) \end{matrix}\right]^2 \qquad 2 + 2\times 2 = 6 = 3!$

H_3 — 6 эл-т

H_4 $\qquad H_3$ $\quad 3!$ $\qquad H_3 g_3 \cancel{H_2} g_2 H_2$ $\quad \cancel{H_2}\ 1$ $\quad H_3$ $\qquad H_3 \begin{pmatrix} g_3 \\ g_3 g_2 \\ g_3 g_2 g_1 \end{pmatrix} 3$

$$H_{n+1} = \underset{n!}{H_n} \begin{Bmatrix} 1 \\ g_n \\ g_n g_{n-1} \\ g_n g_{n-1} g_{n-2} \\ g_n \cdots g_1 \end{Bmatrix} \leftarrow (n+1) \text{ шт}$$

Слова в H_n вида:

$j \geq i$

$$\begin{cases} g_{ji} := g_{j-1} g_{j-2} \dots g_i \\ g_{jj} := 1 \end{cases}$$

$$\omega_{i_1 \dots i_n} = \underset{1}{g_{11}}\, \underline{g_{2 i_1}}\, \underline{g_{3 i_2}} \dots g_{n i_n} \qquad i_k = 1, 2 \dots k$$

$$\# \omega_{i_1 \dots i_n} = n!$$

$\forall$ эл.-т в $H_n(q)$ — л.с. $\omega_{i_1 \dots i_n}$

Факт 2

$$H_n(q) \cong \mathbb{C}[S_n] \Rightarrow \text{полупроста}$$

если $q \in \mathbb{C}^{\times}$: $q^{2k} \neq 1$ $\quad k = 2, \dots, n$

(за искл. $q = \pm 1$)

G. Lusztig (1981г)

$\forall$ алг. Гекке $\underset{\substack{\text{при усл.} \\ \text{на } q}}{\cong}$ $\mathbb{C}[$гр. Коксетера$]$

Iwahori-Hecke
$|||$
A_{n-1} type Hecke

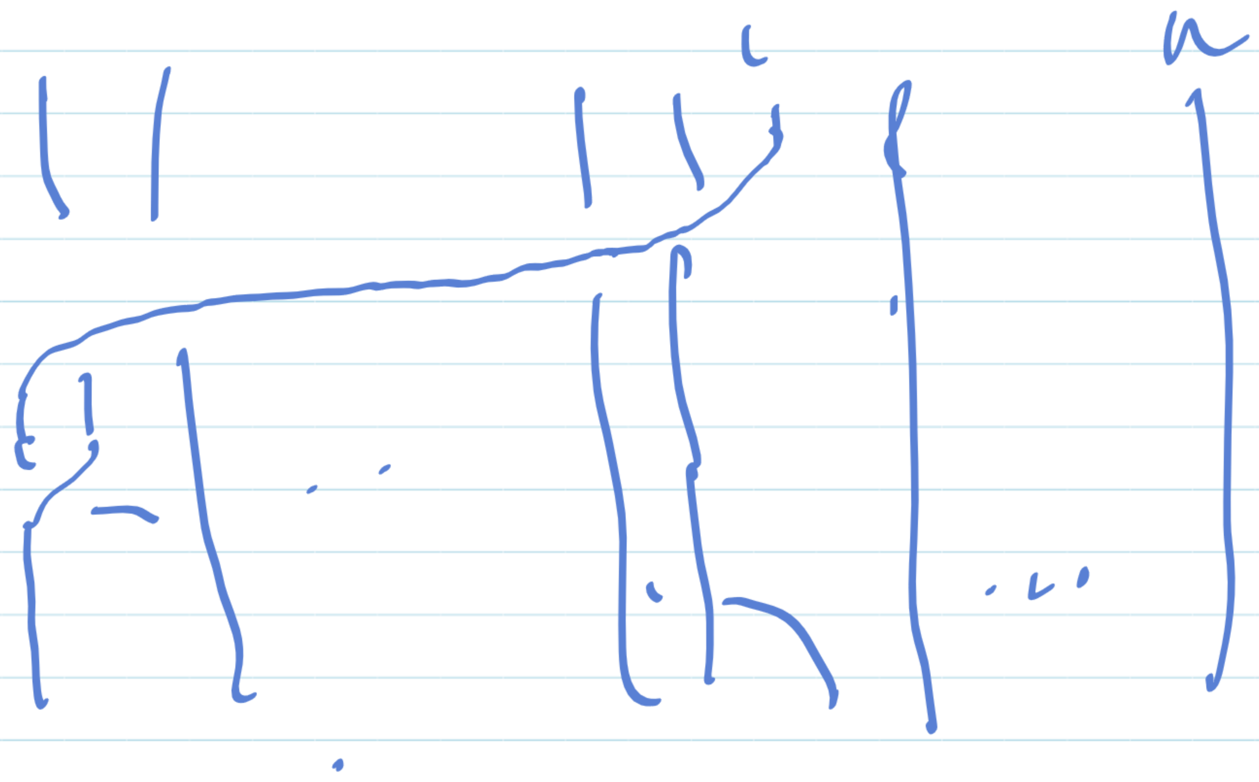
Факт 3 Эл-ты Юциса-Мэрфи

$$J_1 = 1, \quad J_2 = g_1^2, \quad J_3 = g_2 g_1^2 g_2, \dots$$

$$J_{i+1} = g_i J_i g_i \quad i = 1 \dots n$$

$$J_n = g_{n-1} \dots g_1 g_1 \dots g_{n-1}$$

J_i



$J_1, \dots J_n \in H_n(q)$ — коммутативная подалгебра

$\exists$ полиномиальные соотношения на J_i в $H_n(q)$

Подалг. GZ (JM)

GZ_n (порожд $J_1 \dots J_n$) $\subset H_n(q)$ коммутативн

Конструкция GZ_n совместна со структурой башни алгебр

$$\begin{array}{ccccccc} H_1 & \subset & H_2 & \dots & \subset H_i & \xrightarrow{g_i} & \subset H_{i+1} \\ \cup & & \cup & & \cup & & \\ GZ_1 & & GZ_2 & & \subset GZ_i & \subset & GZ_{i+1} \end{array}$$

J_{i+1}

Факт GZ_n — максимальная коммут. подалгебра в $H_n(q)$

1) $\exists\, \omega \in H_n(q)$: $\omega GZ_n = GZ_n \omega$
$\notin GZ_n$

2) в $\forall$ неприводимом предст. $H_n(q)$ (полупростой режим)

$\exists$ базис в котором GZ_n — диагональные матрицы
т.е. базис собств. векторов операторов из GZ_n

3) Собств. значения элементов JM J_i различают эл-ты базиса