Алгебры Ивахори-Гекке

§1. Определение и факты.

<u>Def</u> Алгебра Ивахори-Гекке (Iwahori-Hec[ke]
обозначаемая $H_n(q)$, задаётся в терминах
генераторов g_i, $i = 1, \ldots, n-1$, и соотношений

$$\begin{cases} g_i g_j = g_j g_i \quad \forall\, |i-j|>1, & (1а) \\ g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, & (1б) \\ g_i^2 = 1 + (q-q^{-1}) g_i . & (1в) \end{cases}$$

Мы будем рассматривать эту алгебру над полем
$\mathbb{C}$ и считать, что параметр алгебры — q — отличн[ое]
от 0 комплексное число: $q \in \mathbb{C}^\times$.

<u>Rem 1</u>: Формулы (1а, б) совпадают с соотношени[ями]
на артиновы генераторы группы кос B_n. Поэ[тому]
$H_n(q)$ — это фактор-алгебра групповой ал-
гебры $\mathbb{C}[B_n]$ по двустороннему идеалу, порождае-
мому соотношением (1в), то есть элементы H_n[(q)]
это классы элементов $\mathbb{C}[B_n]$ вида:

$$H_n(q) \ni [x] = x + \underbrace{\mathbb{C}[B_n]\left(b_1^2 - (q-q^{-1}) b_1 - 1\right)\mathbb{C}[B_n]}_{\cap \\ \mathbb{C}[B_n]} .$$

В этой формуле вместо b_1 можно использовать (2
$\forall$ артинов генератор b_i, поскольку все они сопряжены
в B_n. В частности, $g_i = [b_i]$.

<u>Rem 2</u> Алгебры $H_n(q)$ часто называют алгебрами
Гекке серии A_{n-1}. Для каждой группы кос,
задаваемой по графу (см. упр. 7 задания к 1-й теме
можно определить её алгебру Гекке, налагая
квадратичные соотношения на ее артиновы генера
торы. Таким образом получаются различные серии
алгебр Гекке.

Мы будем для краткости называть $H_n(q)$ алгеб-
рами Гекке.

Приведём список фактов об
алгебрах $H_n(q)$. Часть из них мы докажем
сразу. Оставшиеся <u>будут доказаны</u> в процес
се изучения представлений алгебр Гекке.

<u>Факт 1</u>: $$\boxed{\dim H_n(q) = n!} \qquad (2)$$

Сейчас мы обоснуем, что $\dim H_n(q) \leq n!$,
для чего используем цепочку вложений алгебр
$H_i(q)$, $i = 1, \dots, n$, называемую башней алгебр:

$$\mathbb{C}\cdot 1 = H_1(q) \subset H_2(q) \subset \ldots \subset H_i(q) \subset H_{i+1}(q) \subset \ldots \subset H_n(q)$$

Здесь вложение $H_i(q)$ в $H_{i+1}(q)$ порождается набором генераторов $g_1, \ldots, g_{i-1}$ (т.е. все артиновы генераторы $H_{i+1}(q)$, кроме g_i).

Упр 1а: Проверьте, что $\forall\, x \in H_n(q)$ представим в виде

$$x = \alpha + \sum_i \beta_i g_{n-1} \gamma_i \text{, где}$$

$\alpha, \beta_i, \gamma_i$ – некоторые элементы $H_{n-1}(q)$. Иными словами:

$$\boxed{H_n(q) = H_{n-1}(q) \oplus H_{n-1}(q)\, g_{n-1}\, H_{n-1}(q)}$$

Упр 1б: Воспользовавшись результатами Упр 1 и индукцией по n, докажите, что всякий элемент $H_n(q)$ может быть представлен как линейная комбинация элементов вида

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_n} := c_{i_1 1} c_{i_2 2} \ldots c_{i_n n}, \quad i_k \in \{1, 2, \ldots, k\},$$

где $c_{ij} = g_{j-1} g_{j-2} \cdots g_i \ \forall i<j, \quad c_{ii} := 1$.

Набор $\{x_{i_1 \ldots i_n}\}$ содержит $n!$ элементов, но поскольку мы не можем утверждать их линейной независимости, результат Упр 1б означает лишь, что

$$\boxed{\dim H_n(q) \leq n!} \qquad (3)$$

(4)

<u>Факт 2</u>: Очевидно $H_n(1) = H_n(-1) = \mathbb{C}[S_n]$.

Оказывается:

$$\boxed{\begin{array}{c} H_n(q) \cong \mathbb{C}[S_n] \\ \text{для } q \in \mathbb{C}^\times : \ q^{2k} \neq 1, \ k = 2, 3, \ldots, n \end{array}} \quad (4)$$

кроме случаев $q = \pm 1$

Это утверждение (в более общем виде) было доказано Дж. Люстигом /George Lusztig, J. of Algebra, v. 71 (1981) pp. 490-498/.

В силу теоремы Машке изоморфизм (4) означает, что алгебра $H_n(q)$, при указанных условиях на q, <u>полупроста</u>, а значит нам достаточно классифицировать ее неприводимые представления.

Везде далее при рассмотрении неприводимых представлений $H_n(q)$ мы предполагаем выполнение условий (4) на q.

<u>Факт 3</u>. Так же, как и в группе кос B_n, элементы Юциса – Мэрфи

$$\boxed{J_1 = 1, \ J_2 = g_1^2, \quad J_{i+1} = g_i J_i g_i \quad i = 2, \ldots, n-1} \quad (5)$$

порождают коммутативную подалгебру в H_n

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Эта коммутативная подалгебра} \\ H_n(q) \ \underline{\text{максимальна}} \end{array}} \quad (6)$$

Под максимальностью мы будем понимать

не просто отсутствие в $H_n(q)$ большей (5
коммутативной подалгебры, содержащей все
элементы J_i, $i=1,\dots,n$, но не порождаемой ими

Def: Мы называем коммутативную подалгебру $\mathfrak{M}$
алгебры A максимальной, если
- в $\forall$ неприводимом представлении алгебры A $\exists$ базис, в котором все элементы $\mathfrak{M}$ представляются диагональными матрицами;
- в этом базисе $\nexists$ двух векторов, для которых собственные значения всех элементов $\mathfrak{M}$ совпадают. Иными словами, $\mathfrak{M}$ различает все элементы базиса.

Мы даём это определения для случая полупростых алгебр A, когда набор неприводимых представлений полностью характеризует алгебру.

Rem 3: Максимальная коммутативная подалгебра не является коммутативной подалгеброй максимальной возможной размерности (придумайте пример коммутативной подалгебры в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ размерности большей n).

Rem 4: Формулы (5) не подходят для определения элементов Юциса-Мэрфи в случае

симметрической группы $\mathbb{C}[S_n] \equiv H_n(\pm 1)$.
При $q = \pm 1$ $J_i = 1 \; \forall i$ – набор вырождается.
В этом случае следует использовать набор

$$\boxed{j_i = \frac{J_i - 1}{q - q^{-1}}, \quad i = 1, \dots, n} \qquad (5a)$$

Упр 2: Представьте j_i в виде многочленов от артиновых генераторов g_i. В пределе $q \to \pm 1$ представьте j_i как линейные комбинации транспозиций (jk).
Набор $\{j_i\}$ для S_n был предложен Юцисом и Мэрфи

Факт 4: Очевидно, центр алгебры принадлежит ее максимальной коммутативной подалгебре. В случае $H_n(q)$ её центр совпадает с алгеброй симметрических многочленов от элементов Юциса-Мэрфи:

$$\boxed{\mathbb{Z}(H_n(q)) = \mathrm{Symm}(J_1, J_2, \dots, J_n)} \quad (7$$

Мы сейчас убедимся, что $\mathrm{Symm}(J_1, \dots, J_n) \subset \mathbb{Z}(H_n(q))$

Упр 3: Проверьте выполнение следующих соотношений в алгебре Гекке:

$$\begin{cases} [g_i, J_k] = 0 \quad \forall i \neq k, k-1 & (7) \\ [g_i, J_i J_{i+1}] = 0 & (8) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall i = 1, \dots, n-1 \\ [g_i, J_i + J_{i+1}] = 0 \end{cases}$$

С использованием этих соотношений докажите

$$[g_i, \mathrm{Symm}(J_1, \dots, J_n)] = 0,$$

откуда следует, что $\mathrm{Symm}(J_1, \dots J_n) \subset Z(H_n(q))$.

§2. Неприводимые представления $H_n(q)$

I. Спектр элементов Юциса-Мэрфи.

Построение неприводимых представлений $H_n(q)$ мы начнем с изучения возможных собственных значений набора операторов $\{J_i\}_{i=1\dots n}$ в этих представлениях. Сделаем следующее предположение:

(*) Неприводимое представление V алгебры $H_n(q)$ имеет базис $\{v_\alpha\}$, в котором элементы Юциса-Мэрфи действуют диагонально:

$$J_i v_\alpha = a_i v_\alpha \quad \forall i=1,\dots,n \quad \forall \alpha \tag{1}$$

В конце концов мы убедимся, что этому условию удовлетворяют все неприводимые представления $H_n(q)$. Чуть забегая вперёд, мы представляем индекс α базисных векторов в виде набора собственных значений элементов JM:

$$\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \tag{1a}$$

Это корректно, если наборы $\{a_i\}_{i=1\dots n}$ различают базисные вектора v_α.

Теорема 1. В предположении ⊛ для всякого базисного вектора v_α верны утверждения:

(а) $\boxed{a_i \neq a_{i+1}} \quad \forall i$

(б) если $\boxed{a_i \neq q^{\pm 2} a_{i+1}}$, то $\exists\, v_{\alpha'} \in V$,

где $\alpha' = \sigma_i \circ \alpha = (a_1 \ldots \underbrace{a_{i+1}, a_i}_{i\text{-я и } (i+1)\text{-я позиции}}, \ldots a_n)$

(в) если $\boxed{a_{i+1} = q^{\pm 2} a_i}$, то $\nexists\, v_{\alpha'} \in V$, такого что $\alpha' = \sigma_i \circ \alpha$. При этом

$$\boxed{g_i v_\alpha = q^{\pm 1} v_\alpha}$$

(г) в базисе $\{v_\alpha\}$ нет двух векторов с одинаковыми наборами $\{a_i\}_{i=1\ldots n}$, то есть представление (1а) корректно.

Доказательство:

а) Предположим $a_i = a_{i+1} = a$, т.е. $J_i v_\alpha = J_{i+1} v_\alpha = a v_\alpha$

С учётом: $J_{i+1} = g_i J_i g_i$ и $g_i^{-1} = g_i - (q - q^{-1}) 1$

преобразуем:

$$g_i J_i v_\alpha = J_{i+1} g_i^{-1} v_\alpha = \underline{J_{i+1} g_i v_\alpha - (q - q^{-1}) a v_\alpha}.$$

С другой стороны:

$$g_i J_i v_\alpha = \underline{a\, g_i v_\alpha}, \text{ откуда заключаем}$$

$$\boxed{(J_{i+1} - a1)(g_i v_\alpha) = (q - q^{-1})\, a\, v_\alpha} \qquad (*)$$

Вектор $g_i v_\alpha \in V$ можно разложить по базису $\{v_\beta\}$. Под действием оператора $(J_{i+1} - a1)$ в этом разложении пропадет вектор v_α. В правой же части $(*)$ вектор v_α присутствует с ненулевым коэффициентом (мы работаем со случаем $q \neq \pm 1$). Получили противоречие

б) Рассмотрим вектор

$$\boxed{\omega = \left(g_i + \frac{(q-q^{-1})a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} 1\right) v_\alpha} \qquad (2)$$

Посмотрим, как на него действуют J_i и J_{i+1}:

$$J_i \omega = g_i^{-1} J_{i+1} g_i^{-1} \left(g_i + \frac{(q-q^{-1})a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} 1\right) v_\alpha =$$

$$= a_{i+1} g_i^{-1} v_\alpha + \frac{(q-q^{-1})a_i a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} v_\alpha =$$

$$= a_{i+1} g_i v_\alpha + (q-q^{-1})\left(\frac{a_i a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} - a_{i+1}\right) v_\alpha$$

$$= a_{i+1} \omega$$

Аналогично:

$$J_{i+1} \omega = a_i \omega .$$

Очевидно также, что $J_k \omega = a_k \omega \quad \forall k \neq i, i+1$.

Таким образом мы построили $v_{\alpha'} = \omega$, $\alpha' = \sigma_i \circ \alpha$.

Для того, чтобы доказать оставшиеся пункты теоремы, нам потребуется

Лемма: Рассмотрим подпространство $U \subset V$, являющееся линейной оболочкой всех базисных векторов v_β, на которых элемент JM J_n принимает одинаковое собственное значение a:

$$U = \mathrm{Span}\left(v_\beta \in \{v_\alpha\} : J_n v_\beta = a v_\beta\right).$$

U является инвариантным пространством относительно действия $H_{n-1}(q) \subset H_n(q)$. Представление $H_{n-1}(q)$ на U неприводимо.

Доказательство: Инвариантность U относительно действия $H_{n-1}(q)$ следует из коммутативности J_n с генераторами g_i, $i = 1, \ldots, n-2$.

Неприводимость представления U докажем от противного. Предположим, что $\exists$ подпространство $U' \subset U$, $U' \neq U$: $H_{n-1}(q) U' = U'$.

Поскольку V – неприводимое представление $H_n(q)$, то для $U' \subset V$ имеем $H_n U' = V \supset U$.

С другой стороны

$$H_n U' = (H_{n-1} \oplus H_{n-1} g_{n-1} H_{n-1}) U' = U' \oplus H_{n-1} g_{n-1} U'$$

При доказательстве пункта б) Теорема 1 мы получили формулу (см. (2)):

$$\boxed{g_i v_\alpha = v_{\sigma_i \circ \alpha} + \frac{(q-q^{-1})a_{i+1}}{a_{i+1}-a_i} v_\alpha} \qquad (2a)$$

Если в качестве базиса в U' выбрать набор собственных векторов элементов J_i, $i=1,\dots,n-1$, то, применяя (2a) к этому базису, получим

$$g_i U' \subset W \oplus U'.$$

Здесь W – линейная оболочка векторов $\{v_{\sigma_{n-1}\circ\gamma}\}$, где $\{v_\gamma\}$ – базис в U'. В силу пункта a) теоремы 1 собственное значение J_n на этих векторах $\neq a$, и значит

$$W \cap U = 0.$$

Важное замечание: чтобы использовать базис собственных векторов элементов JM в неприводимом представлении U' алгебры $H_{n-1}(q)$ нам придётся считать, что процедура построения неприводимых представлений уже проведена для $H_{n-1}(q)$; все факты, перечисленные в §1, для неё уже доказаны. В частности, верен Факт 3, которым мы и пользуемся.

Таким образом, мы строим представления для алгебр Гекке индуктивно: последовательно для $H_2, H_3, \dots, H_n$. База индукции: 2-мерной абелевой алгебры $H_2(q)$ имеется 2 одномерных неприводимых представления. Для них все наши утверждения очевидны.

Продолжаем: поскольку J_n коммутирует с $\forall$ элементами $H_{n-1}(q)$, имеем:

$$H_{n-1} W \cap U = 0.$$

Таким образом

$H_n U' \cap U = (U' \oplus H_{n-1} W) \cap U = U' \cap U \neq U$, а значит $H_n U' \neq V$. Получили противоречие ▨

Приступим к доказательству пункта в) теоремы.

Пусть для определенности $a_{i+1} = q^2 a_i$.

Предположим, что вектор ω из формулы (2) нетривиален.

$$\omega\Big|_{a_{i+1}=q^2 a_i} = (g_i - q1) v_\alpha \neq 0. \qquad (2б)$$

В силу Леммы (применяемой последовательно к представлениям алгебр $H_n \subset H_{n-1} \subset \ldots \subset H_{i+1}$) представление алгебры Гекке $H_{i+1}(q)$, порождаемое вектором ω — $H_{i+1}(q)\omega$ — неприводимо. Оно содержит все векторы базиса $\{v_\alpha\}$ пространства V, для которых собственные значения элементов $J_{i+2}, \ldots, J_n$ совпадают с их собственными значениями на ω. Следовательно, должно быть

$$v_\alpha \in H_{i+1}(q)\omega.$$

Однако, формула (2б) и условие Гекке для g_i делают $\omega\Big|_{a_{i+1}=q^2a_i}$ собственным вектором g_i:

$$g_i\left(\omega\Big|_{a_{i+1}=q^2a_i}\right) = -q^{-1}\omega\Big|_{a_{i+1}=q^2a_i}, \qquad (3)$$

а значит, породить v_α из ω действием g_i не получается. Мы убедимся, что и действие всей $H_{i+1}(q)$ на $\omega\Big|_{a_{i+1}=q^2a_i}$ не порождает v_α.

Действительно: $H_{i+1}\omega|_{..} = (H_i \oplus H_i g_i H_i)\,\omega|_{..}$

Однако $\forall \varphi \in H_i\omega|_{..}$, $J_{i+1}\varphi = a_i\varphi$ (как и для $\omega|_{..}$)

а для v_α: $J_{i+1}v_\alpha = a_{i+1}v_\alpha$. Поэтому $v_\alpha \notin H_i\omega|_{..}$.

Осталось разобраться с $H_i g_i H_i \omega|_{..}$. Согласно (2a)

$$H_i\omega|_{..} \subset H_{i-2}\omega|_{..} \oplus \mathrm{Span}\{v_\beta \in V : J_i v_\beta = b v_\beta,\ J_{i+1}v_\beta = a_i v_\beta,\ b \neq q^2 a_i\}.$$

Поэтому

$$g_i H_i \omega|_{..} \subset \mathrm{Span}\{v_\beta \in V : J_{i+1}v_\beta = \underline{a_i}\, v_\beta \text{ или } J_{i+1}v_\beta = b v_\beta,\ b \neq \underbrace{q^2 a_i}_{(a_{i+1})}\}$$

тут мы учли и действие g_i на ω (3).

Поскольку действие H_i коммутативно с J_{i+1}, заключаем, что среди векторов $H_i g_i H_i \omega|_{..}$ нет таких φ, что $J_{i+1}\varphi = a_{i+1}\varphi$

Следовательно $v_\alpha \notin H_i g_i H_i \omega|_{..}$

Мы получили противоречие, которое разрешается требованием $\omega|_{..} = 0$, то есть

$$\boxed{g_i v_\alpha = q v_\alpha.} \tag{4}$$

Убедимся теперь, что $\nexists\, v_{\sigma_i \circ \alpha} \in V$. Действительно, если такой вектор есть, то, согласно Лемме, $v_{\sigma_i\circ\alpha} \in H_{i+1} v_\alpha$. Однако свойство (4) вектора v_α этому противоречит. Доказательство проводится так же, как мы только что доказывали, что (3) $\Rightarrow v_\alpha \notin H_{i+1,\omega}|_{..}$.

Пункт в) теоремы доказан.

Утверждение г) теоремы следует из Леммы и предположения индукции о том, что теорема выполняется для $H_{n-1}(q)$ (см. замечание на стр 12). ▧

Итак, с точностью до благополучного завершения индукции по n, мы доказали корректность представления индексов векторов v_α в виде (1a). Мы будем им далее пользоваться.

Поупражняемся в вычислении возможных значений индексов α.

Поскольку $J_1 = 1$, очевидно, $\boxed{a_1 = 1}$ $\forall v_\alpha$. Отсюда, и из пунктов б), в) теоремы следует, что

$$\boxed{a_i \in \{q^{2k}, k \in \mathbb{Z}\} \quad \forall i \ \forall v_\alpha.}$$

Для $H_2(q)$: имеем 2 вектора v_α с индексами

$$\alpha_1 = (1, q^2) \text{ и } \alpha_2 = (1, q^{-2}),$$

так как $J_2 = g_1^2$ имеет 2 собственных значения: $q^{\pm 2}$.

У абелевой 2-мерной алгебры $H_2(q)$ при условии $q^2 \neq -1$ (ср. с (4) на стр.4.) есть 2 различных одномерных представления, отвечающих индексам α_1 и α_2. Алгебра полупроста.

Упр 4. Убедитесь, что в случае $q^2=-1$, алгебра $H_2(q)$ изоморфна неполупростой алгебре верхнетреугольных 2×2 матриц вида

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{C}.$$

Для $H_3(q)$ пунктам а), б), в) теоремы удовлетворяют индексы

$$\alpha_1 = (1, q^2, q^4) \qquad \alpha_2 = (1, q^{-2}, q^{-4})$$

$$\alpha_{3a} = (1, q^2, q^{-2}) \qquad \alpha_{3b} = (1, q^{-2}, q^2)$$

$$\alpha_4 = (1, q^2, 1) \qquad \alpha_5 = (1, q^{-2}, 1)$$

Однако случаи α_4 и α_5 не реализуются. Действительно, например для v_{α_4} из пункта в) теоремы следует

$$g_1 v_{\alpha_4} = q v_{\alpha_4}, \; g_2 v_{\alpha_4} = -q^{-1} v_{\alpha_4},$$ что противоречит соотношению кос $g_1 g_2 g_1 = g_2 g_1 g_2$ (полагаем $q^2 \neq -1$).

Индексы α_1 и α_2 отвечают двум одномерным представлениям $H_3(q)$. Вектора $v_{\alpha_{3a}}$ и $v_{\alpha_{3b}}$ могут породить 2-мерное неприводимое представление, так как значения центральных в $H_3(q)$ симметричных многочленов от J_1, J_2, J_3 на них совпадают (см. факт 4, стр. 6). Нам в этом еще предстоит убедиться.

Развивая эти рассуждения, сформулируем правила построения индексов α в $H_n(q)$:

Правило: $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — допустимый индекс вектора v_α (1) если, и только если

1) $a_1 = 1$,

2) $\forall i \quad \{a_i q^2, a_i q^{-2}\} \cap \{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}\} \neq \emptyset$,

3) $\forall i, j: \quad i<j, \ a_i = a_j = a$

$\exists\, k, l: \ i<k<j, \ i<l<j, \ a_k = q^2 a, \ a_l = q^{-2} a.$

Упр 5. Докажите правило, пользуясь теоремой 1 и разобранным примером $H_3(q)$.

Это правило соответствует алгоритму построения стандартных таблиц Юнга. Действительно, сопоставим элементам JM нумерованные клетки

$$\boxed{J_i \longleftrightarrow \Diamond_{i}},$$

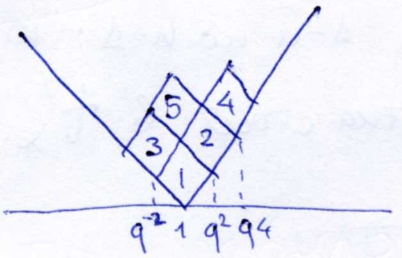
и будем их бросать в яму вида:

Клетки бросаем последовательно по возрастанию номеров, начиная с $\diamondsuit\!1$. Они должны опускаться строго вдоль вертикальных линий.

Первая клетка должна попасть в минимум ямы — позицию с координатой 1.

Вторая клетка должна опуститься в один из образовавшихся локальных минимумов, то есть на позиции с координатами q^2 или q^{-2}.

И так далее: каждая следующая клетка должна попасть в локальный минимум образовавшейся уже конфигурации. Получившиеся конфигурации являются стандартными таблицами Юнга:



$\Longleftrightarrow$

1	2	4
3	5	

Координата вертикальной линии, вдоль которой опускается клетка $\diamondsuit\!i$ называется содержанием (content) клетки. Она совпадает с собственным значением a_i оператора J_i на соответствующем векторе v_α. Например, нарисованной выше конфигурации клеток соответствует вектор с индексом $\alpha = \{1, q^2, q^{-2}, q^4, 1\}$:

$$\boxed{v_\alpha = v_{\{1, q^2, q^{-2}, q^4, 1\}} = v_{\tiny\begin{array}{|ccc}1&2&4\\3&5\end{array}}}.$$

Таким образом, по всякой стандартной таблице Юнга t_λ, отвечающей разбиению $\lambda \vdash n$ (оно же — диаграмма Юнга), однозначно восстанавливается допустимый согласно Правилу собственный вектор v_{t_λ} элементов JM J_i, $i=1,\dots,n$.

И наоборот, индукцией по n убеждаемся, что допустимый индекс α, конструируемый по Правилу, обязательно соответствует стандартной таблице.

Ещё одно важное наблюдение: как уже было отмечено при обсуждении допустимых индексов α для $H_3(q)$ (см. стр. 16), векторы v_{t_λ} и $v_{t'_{\lambda'}}$, где $\lambda, \lambda' \vdash n$

а) не могут принадлежать одному представлению V, если $\lambda \neq \lambda'$ (факт 4 + условия на q из факта 2 + лемма Шура)

б) появляются вместе в представлении V, если $\lambda = \lambda'$ (индукция по n + Лемма + пункт б) Теоремы 1)

Таким образом, неприводимые представления V алгебры $H_n(q)$ можно "нумеровать" разбиениями $\lambda \vdash n$, а базисные вектора в них — станд. таблицами t_λ, $\lambda \vdash n$

Правило получения допустимых индексов α даёт нам способ построения полиномов из элементов Юциса-Мэрфи, которые принадлежат ядру (тождественно зануляются) в любом рассматриваемом нами представлении V.

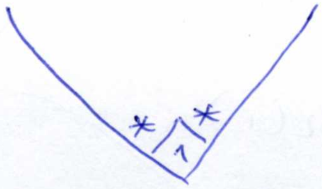
Доказав, что наша процедура перечисляет все неприводимые представления полупростой алгебры $H_n(q)$, мы убедимся, что эти полиномы тождественно зануляются в алгебре $H_n(q)$, т.е. являются характеристическими тождествами для подалгебры элементов JM. Действительно, в $H_n(q)$ (в отличие от $\mathbb{C}[B_n]$) подалгебра, порождаемая элементами J_i, $i=1,\dots,n$, должна быть конечномерной, а значит в ней должны быть полиномиальные тождества на J_i.

Мы их построим индуктивно по n:

В $H_1(q)$ $\quad J_1 - 1 = 0$ – очевидно $\Leftrightarrow$ 

В $H_2(q)$ $\quad (J_2 - q^2)(J_2 - q^{-2}) = 0$ – это условие (5) Гекке.

Это тождество мы графически интерпретируем как возможность положить клетку $\langle 2 \rangle$ в одно из двух мест:



с контентами q^2 и q^{-2}.

Прежде, чем перейти к рассмотрению $H_3(q)$ обратим внимание, что соотношение (5) позволяет нам построить разложение единицы алгебры $H_2(q)$ в сумму взаимно-ортогональных идемпотентов (проекторов) / пирсовское разложение единицы /:

$$P_{\begin{smallmatrix}2&\\1&\times\end{smallmatrix}} = \frac{J_2 - q^2}{q^{-2} - q^2}$$

контент помеченной "x" клетки, куда не попала $\boxed{2}$

контент клетки, куда попала $\boxed{2}$

$$P_{\begin{smallmatrix}\times&\\1&2\end{smallmatrix}} = \frac{J_2 - q^{-2}}{q^2 - q^{-2}} \qquad (6)$$

$$\boxed{\begin{gathered} P_{\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} P_{\begin{smallmatrix}1&2\end{smallmatrix}} = 0, \quad P^2_{\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}}, \quad P^2_{\begin{smallmatrix}1&2\end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix}1&2\end{smallmatrix}} \\ P_{\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} + P_{\begin{smallmatrix}1&2\end{smallmatrix}} = 1 \end{gathered}}$$

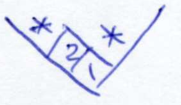
Обратим внимание, что мы не при всяких значениях q можем нормировать проекторы $P_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}$ и $P_{\begin{smallmatrix}\square&\square\end{smallmatrix}}$.

Требуется $q^4 \neq 1$, или $[2]_q = q + q^{-1} \neq 0$ (если исключить случаи $q = \pm 1$, отвечающие симм. группе S_n).

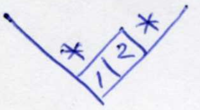
Так появляются условия полупростоты. При $[2]_q = 0$

проекторы $P_{\boxed{}\boxed{}}$, $P_{\boxed{}/\boxed{}}$ ненормируемы, построить шурсовское разложение единицы в $H_2(q)$ не удаётся, и $H_2(q)$ не полупроста.

Перейдём к $H_3(q)$. Характеристические тождества строятся так:

 $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &P_{\boxed{2}\boxed{1}}\cdot(J_3-q^2)(J_3-q^{-4})\equiv 0 \\ \text{или}\quad &(J_2-q^2)(J_3-q^2)(J_3-q^{-4})\equiv 0 \end{aligned}} \qquad (7\,а)$$

 $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &P_{\boxed{1}\boxed{2}}\,(J_3-q^4)(J_3-q^{-2})\equiv 0 \\ \text{или}\quad &(J_2-q^{-2})(J_3-q^{-2})(J_3-q^4)\equiv 0 \end{aligned}} \qquad (7\,в)$$

Возникло 2 новых тождества, по одному для каждого проектора из $H_2(q)$. Они порождают новые проекторы:

$$\begin{cases} P_{\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\times} = P_{\boxed{2}\boxed{1}}\cdot\dfrac{J_3-q^2}{q^{-4}-q^2} \\[2ex] P_{\times\boxed{2}\boxed{1}\boxed{3}} = P_{\boxed{2}\boxed{1}}\cdot\dfrac{(J_3-q^{-4})}{q^2-q^{-4}} \end{cases}$$

контент, помеченной "x" клетки, куда могла встать, но не встала $\boxed{3}$

контент клетки, куда встала $\boxed{3}$

эти 2 идемпотента происходят из тождества (7 а)

$$P_{\begin{smallmatrix}1&2&3\end{smallmatrix}^{+}} = P_{\begin{smallmatrix}1&2\end{smallmatrix}} \cdot \frac{J_3 - q^{-2}}{q^4 - q^{-2}}$$

$$P_{\begin{smallmatrix}1&2\\3\end{smallmatrix}^{+}} = P_{\begin{smallmatrix}1&2\end{smallmatrix}} \cdot \frac{J_3 - q^{4}}{q^{-2} - q^{4}}$$

– эти идемпотенты строятся по тождеству (7 в)

Свойства построенных идемпотентов:

*) $P_{\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}} + P_{\begin{smallmatrix}1&3\\2\end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}}$; $P_{\begin{smallmatrix}1&2&3\end{smallmatrix}} + P_{\begin{smallmatrix}1&2\\3\end{smallmatrix}} = P_{\begin{smallmatrix}1&2\end{smallmatrix}}$

**) $$P_t \cdot P_s = \delta_{t,s} P_t ,$$

где $t, s \in \left\{ \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&3\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&2\\3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&2&3\end{smallmatrix} \right\}$

$\Downarrow$

Четверка построенных идемпотентов дает пирсовское разложение единицы в алгебре $H_3(q)$

Упражнение 5 Для каждого из идемпотентов в $H_3(q)$ постройте тождество для элементов Юциса-Мэрфи в $H_4(q)$. По этим тождествам постройте пирсовское разложение единицы в $H_4(q)$

В конце концов для $H_n(q)$ мы получаем взаимно-однозначные сопоставления

$$\boxed{V_\alpha \longleftrightarrow \overset{\text{стандартная таблица}}{t_\lambda} ,\ \lambda \vdash n \Longleftrightarrow \overset{\text{идемпотент}}{P_{t_\lambda} \in H_n(q)}}$$

$\uparrow$ кодирует индекс α

причем, если $\alpha = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$, то есть

$$J_i v_\alpha = a_i v_\alpha ,$$

то

$$J_i P_{t_\lambda} = P_{t_\lambda} J_i = a_i P_{t_\lambda}$$

откуда следует, что идемпотент P_{t_λ} является проектором на вектор v_{t_λ}:

$$P_{t_\lambda} V = \mathbb{C} v_{t_\lambda}, \text{ если } v_{t_\lambda} \in V$$
$$P_{t_\lambda} V = 0 \ , \text{ если } v_{t_\lambda} \notin V$$

При этом в одном и том же пространстве V нетривиально могут действовать лишь проекторы, отвечающие одной и той же диаграмме Юнга.

Идемпотенты P_{t_λ} ортонормированы и примитивны (поскольку проецируют на одномерные подпространства). Они задают пирсовское разложение единицы в $H_n(q)$: $\sum_{t_\lambda, \lambda \vdash n} P_{t_\lambda} = 1$.

Rem: при построении идемпотентов P_{t_λ} приходится исключать значения q, при которых в знаменателях идемпотентов появляются нули (т.е. совпадающие корни в характеристических тождествах для J_i). Это как раз условия полупростоты алгебры $H_n(q)$ (см. факт 2).

Rem: Полупростые алгебры над $\mathbb{C}$ (по теореме Веддерберна–Артина) изоморфны прямым произведениям матричных алгебр, т.е. алгебрам блочно-диагональных матриц. При этом построенные нами идемпотенты можно считать прообразами диагональных матричных единиц — матриц с единственным ненулевым элементом — единицей где-то на ее диагонали.

Пример: Предложенная схема задаёт изоморфизм $H_3(q)$ с алгеброй 4×4 матриц с двумя 1×1 диагональными блоками и одним 2×2 блоком

$$H_3(q) \cong \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Построенные нами 4 идемпотента при этом изоморфизме сопоставляются четырем диагональным матричным единицам с единицами на отмеченных * местах. Два идемпотента $P_{\tiny\begin{matrix}2&3\\1&\end{matrix}}$ и $P_{\tiny\begin{matrix}3&2\\1&\end{matrix}}$ располагаются в одном 2×2 блоке.

§3 Неприводимые представления $H_n(q)$

II. Недиагональные матричные единицы

Мы построили серию идемпотентов в $H_n(q)$ — P_α — аналогов диагональных матричных единиц. Попробуем построить целиком изоморфизм $H_n(q)$ в прямое произведение матричных алгебр, т.е. найти формулы и для недиагональных матричных единиц. Для этого изучим свойства оператора $(g_i + \lambda \frac{a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} 1)$, отображающего $v_\alpha \to v_{\alpha'}$ /см. (2)/

Переобозначим $a_{i+1}/a_i = q^{2x}$ (естественно, т.к. $a_i \in \{q^{2\mathbb{Z}}\}$), $x \in \mathbb{Z}$

и назовём

$$\boxed{g_i(x) := \left(g_i - \frac{q^x}{[x]_q} 1\right)} \qquad (8)$$

бакстеризованным элементом g_i. Нам потребуется чтобы параметр x, зачастую называемый спектральным, принимал значения в $\mathbb{Z}$. Однако, в приложениях бывает $x \in \mathbb{C}$. Название "спектральный" для x происходит из приложений.

Свойства бакстеризованных элементов:

Лемма 2: Для генераторов g_i алгебры Гекке $H_n(q)$ имеем:

a) $$\boxed{g_i(x)\, g_i(-x) = \frac{[x+1]_q [x-1]_q}{([x]_q)^2} 1} \qquad (9a)$$

б) $$\boxed{g_i(x)g_{i+1}(x+y)g_i(y) = g_{i+1}(y)g_i(x+y)g_{i+1}(x)} \quad (9б)$$

Соотношения (9а), (9б) $\forall x, y$ эквивалентны соотношениям (1б), (1в) на артиновы генераторы g_i, g_{i+1} из §1.

Соотношение (9а) часто называют условием унитарности, а (9б) — уравнением Янга–Бакстера. Термины происходят из матфизических моделей.

Упр 6: Докажите Лемму

Выбирая подходящие значения спектрального параметра x мы используем $g_i(x)$, как в Теореме 1, для построения в пару к вектору $v_\alpha \in V$ вектора $v_{\alpha'} \in V$, $\alpha' = \sigma_i \circ \alpha$.

Выбираем $q^{2x} = a_{i+1}/a_i$, тогда

– если $x = \pm 1$, то $g_i(x)v_\alpha = 0$ и $\nexists\, v_{\alpha'} \in V$

– если $x \neq \pm 1$, то зададим действие g_i на паре $v_\alpha, v_{\alpha'}$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{[x+1]_q}{[x]_q} v_{\alpha'} &:= g_i(x)v_\alpha, \\ g_i(-x)v_{\alpha'} &= \frac{[x-1]_q}{[x]_q} v_\alpha \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(10) \\ &(\text{по Лемме 2а}) \end{aligned}$$

Мы также знаем, как P_α и $P_{\alpha'}$ действуют на базисные вектора V:

$$\boxed{P_\alpha v_\beta = \delta_{\alpha\beta} v_\alpha\,, \quad P_{\alpha'} v_\beta = \delta_{\alpha'\beta} v_{\alpha'} \quad \forall \beta} \tag{11}$$

Проследим теперь за их совместным действием:

$$\boxed{\left(g_i(x) P_\alpha\right) v_\beta = \frac{[x+1]_q}{[x]_q}\delta_{\alpha\beta} v_{\alpha'} \quad \forall\beta,\ x = \frac{a_{i+1}}{a_i}} \tag{12}$$

это очевидно следует из (10), (11), и это совпадает с действием недиагональной матричной единицы $\frac{[x+1]_q}{[x]_q} E_{\alpha'\alpha}$ в V.

Есть еще один оператор, действующий таким же образом:

$$\left(P_{\alpha'} g_i(-x)\right) v_\alpha = P_{\alpha'}\left(g_i(x) + \left(\frac{q^x}{[x]_q} + \frac{q^{-x}}{[x]_q}\right) 1\right) v_\alpha =$$

$$P_{\alpha'}\left(\frac{[x+1]_q}{[x]_q} v_{\alpha'} + \frac{q^x + q^{-x}}{[x]_q} v_\alpha\right) = \frac{[x+1]_q}{[x]_q} v_{\alpha'},$$

$$\left(P_{\alpha'} g_i(-x)\right) v_{\alpha'} = P_{\alpha'} \frac{[x-1]_q}{[x]_q} v_\alpha = 0$$

$$\left(P_{\alpha'} g_i(-x)\right) \underset{\beta \neq \alpha, \alpha'}{v_\beta} = 0 \text{ (проверьте!)}$$

Учитывая, что действия операторов $g_i(x) P_\alpha$ и $P_{\alpha'} g_i(-x)$ совпадают в неприводимом представлении V, содержащем вектора v_α и $v_{\alpha'}$, и тождественно равны 0 в остальных неприводимых представлениях, в предположении полупростоты $H_n(q)$ получаем следующий результат:

Теорема 2 Для любой пары P_α и $P_{\alpha'}$ в $H_n(q)$: $\alpha' = \sigma_i \circ \alpha$ имеем:

Если $x \neq \pm 1$, где $q^{2x} := \frac{a_{i+1}}{a_i}$, $\alpha = \{a_1, \dots \underset{\downarrow}{a_i}, \underset{\downarrow}{a_{i+1}} \dots a_n\}$ (i и (i+1) места)

то

$$\boxed{g_i(x) P_\alpha = P_{\alpha'} g_i(-x)} \quad (13а)$$

$$\boxed{P_\alpha g_i(x) = g_i(-x) P_{\alpha'}} \quad (13б)$$

Если же $x = \pm 1$, то α' не является допустимым индексом $\Rightarrow \nexists P_{\alpha'}$. При этом выполняются соотношения

$$\boxed{g_i(x) P_\alpha = P_\alpha g_i(x) = 0} \quad (13в)$$

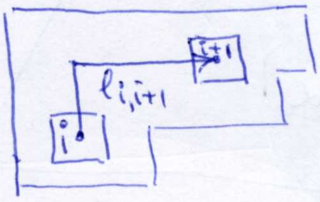
Доказательство: Рассуждения, приводящие к (13а) мы уже провели. Доказательство (13б) такое же с заменой $\alpha \leftrightarrow \alpha'$. (13в) проверяется с использованием пункта в) Теоремы 1. ▨

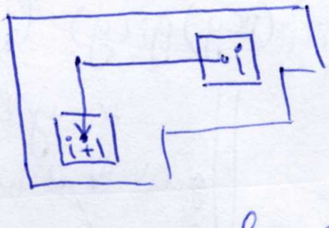
Rem: Мы видели, что образом $g_i(x) P_\alpha$ из (13а) в End(V) является недиагональная матричная единица $\frac{[x+1]_q}{[x]_q} E_{\alpha'\alpha}$, если определить базисные векторы v_α и $v_{\alpha'}$, как в (10)

Нетрудно проверить, что образом $P_\alpha g_i(x)$ из (13б) в этом же базисе будет $\frac{[x-1]_q}{[x]_q} E_{\alpha\alpha'}$

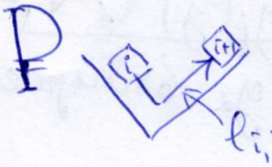
Таким образом мы построили прообразы недиагональных матричных единиц $E_{\alpha\alpha'}$, $E_{\alpha'\alpha}$, $\alpha' = \sigma_i \circ \alpha$ в алгебре Гекке (с точностью до их нормировки).

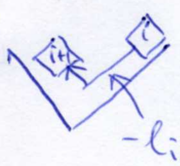
Параметр x в формулах (13) имеет наглядную графическую интерпретацию.

Если $\alpha \longmapsto t_x =$ 

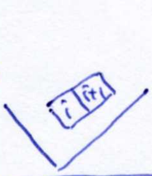
$\alpha' \longrightarrow t'_x =$ 

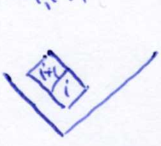
то x — это длина крюка $l_{i,i+1}$, проведенного из клетки $\boxed{i}$ в клетку $\boxed{i+1}$ (единицей длины считается размер клетки). Крюк ориентирован от $\boxed{i}$ к $\boxed{i+1}$. $l_{i,i+1}$ положительна/отрицательна, если крюк ориентирован вверх-вправо / влево-вниз. Графическая запись (13):

$g_i(l_{i,i+1}) P$ 

$= P$ 

$g_i(-l_{i,i+1})$

$g_i(1) P$ 

$= 0$, $g_i(-1) P$ 

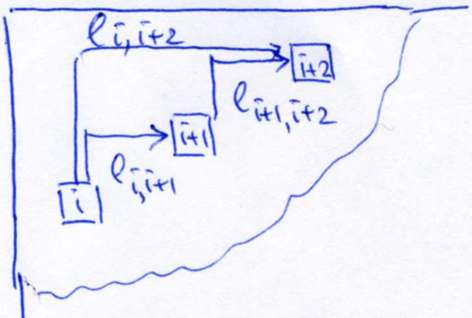
, etc.

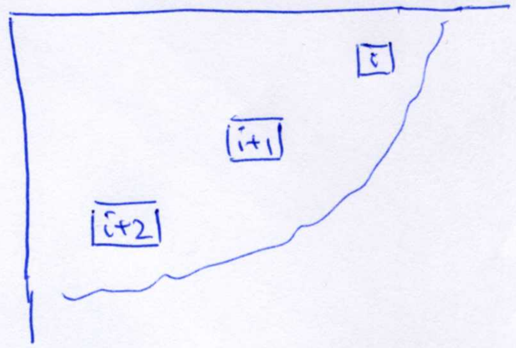
Реализовав в $H_n(q)$ прообразы недиагональных матричных единиц из $\mathrm{End}(V)$ мы, наконец, можем построить явно представление V:

— Стартуем с $\forall$ базисного вектора v_{t_λ} представления V_λ.

— Строим последовательно все остальные векторы $v_{t'_\lambda}$ из базиса этого представления, действуя операторами $g_i(\pm x)$, как в (10).

— Выполнение соотношений для артиновых генераторов $H_n(q)$ g_i, $i = 1 \dots n-1$, удобней проверять в их эквивалентном виде, представленном в Лемме 2 -(9а, б). При этом проверка (9б) сводится к установлению идентичности двух путей перехода от v_α к v_β, где

$\alpha =$ 

$\beta =$ 

Первый способ перехода $\alpha \to \beta = (\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i) \circ \alpha$ соответствует умножению проектора на v_α — P_α — слева на $g_i(\ell_{i+1,i+2})\, g_{i+1}(\ell_{i,i+2})\, g_i(\ell_{i,i+1})$

Второй способ перехода $\alpha \to \beta = (\sigma_{i+1}\circ\sigma_i\circ\sigma_{i+1})\alpha$ соответствует умножению P_α слева на

$$g_{i+1}(l_{i,i+1})\, g_i(l_{i,i+2})\, g_{i+1}(l_{i+1,i+2})$$

С учётом равенства $l_{i,i+2} = l_{i,i+1} + l_{i+1,i+2}$, уравнение Янга-Бакстера, а значит и соотношение кос выполняются для g_i, g_{i+1}.

На этом мы практически завершили построение неприводимых представлений $H_n(q)$ в ее полупростом режиме. Подытожим:

1) Неприводимые представления нумеруются разбиениями $\lambda \vdash n$. Размерность представления V_λ равна числу d_λ стандартных таблиц Юнга формы λ.

Алгоритм Робинсона-Шенстеда (Robinson-Schensted) устанавливает взаимнооднозначное соответствие перестановок из S_n и пар стандартных таблиц Юнга одной формы $\lambda \vdash n$. Следовательно,

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2,$$

и построив неприводимые представления для всех $\lambda \vdash n$ мы доказали $\dim H_n(q) = n!$ (факт 1)

2) Построив прообразы диагональных и недиагональных матричных единиц $E_{\alpha,\beta}$ (α, β — стандартные таблицы, отвечающие одной диаграмме Юнга $\lambda \vdash n$), мы реализовали изоморфизм

$$\boxed{H_n(q) \cong \underset{\lambda \vdash n}{\times} Mat(d_\lambda, \mathbb{C})}.$$

Изоморфизм реализуется при условиях

$$\boxed{[k]_q \neq 0 \quad , \; k = 2, \ldots, n}$$

(это когда при нормировке идемпотентов P_α не возникает нулей в знаменателе).
Он означает полупростоту $H_n(q)$ и ее изоморфность $\mathbb{C}[S_n]$ (факт 2)

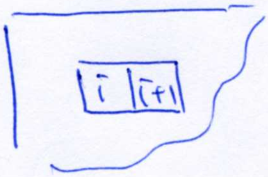
3) Элементы JM $J_1, \ldots J_n$, могут быть диагонализованы в представлениях V_λ, $\lambda \vdash n$, и различают базисные вектора $\Rightarrow$ элементы JM порождают максимальную коммутативную подалгебру $H_n(q)$ (факт 3).

4) Центр $H_n(q)$ совпадает с алгеброй скалярных матриц из факторов $Mat(d_\lambda, \mathbb{C})$, которые порождаются симметрическими многочленами от $J_1, \ldots J_n$, Например: $1_\lambda = \sum_{t_\lambda} P_{t_\lambda}$ (факт 4).
$t_\lambda \leftarrow$ сумма по всем станд. таблицам формы λ.

Можно строить и явные матрицы для артиновых генераторов g_i в базисе $\{v_\alpha\}$.

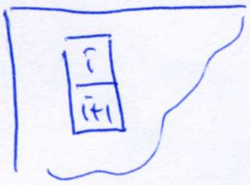
Каждая g_i в базисе $\{v_\alpha\}$ имеет блочно-диагональный вид с блоками размера 1×1 и 2×2.

1×1 блок отвечает векторам v_α, индекс α которых имеет вид

$\alpha =$ 

, тогда $g_i(1)v_\alpha = 0$, то есть

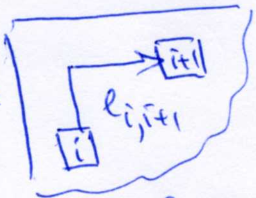
$$\boxed{g_i v_\alpha = q v_\alpha}$$

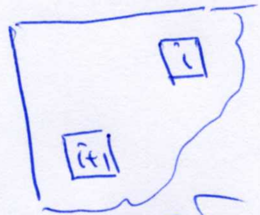
$\alpha =$ 

, тогда $g_i(-1)v_\alpha = 0$, то есть

$$\boxed{g_i v_\alpha = -q^{-1} v_\alpha}$$

2×2 блоки соответствуют парам векторов $v_\alpha,\ v_{\alpha'} = \sigma_i\circ\alpha$:

$\alpha =$ 

$\alpha' =$ 

На этой паре g_i действует 2×2 матрицей

$$g_i = \begin{pmatrix} \dfrac{q^{l}}{[l]_q} & \dfrac{[l-1]_q}{[l]_q} \\[2ex] \dfrac{[l+1]_q}{[l]_q} & -\dfrac{q^{-l}}{[l]_q} \end{pmatrix}, \quad l \equiv l_{i,i+1}$$

Пример: В 2-мерном представлении $H_3(q)$ $V_{\ydiagram{2,1}}$ в базисе $\left\{ v_{\begin{ytableau}1&2\\3\end{ytableau}},\ v_{\begin{ytableau}1&3\\2\end{ytableau}} \right\}$ имеем

$$g_1 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -\frac{q^{-2}}{[2]_q}, & \frac{[3]_q}{[2]_q} \\ \frac{1}{[2]_q}, & \frac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix}$$

Упр 7 Постройте явно матрицы генераторов g_i, $i=1,2,3,4$ алгебры $H_5(q)$ в представлениях, отвечающих диаграммам Юнга

$$\ydiagram{3,2} \quad \text{и} \quad \ydiagram{3,1,1}\,.$$