Семинар 8.

Везде в задачах основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто характеристики 0, $(x_0 : ... : x_n)$ - однородные координаты в пространстве $\mathbb{P}^n$, $F(x_0, ..., x_n)$ - форма степени d от переменных $x_0, ..., x_n$. Через $V(F)$ будем обозначать гиперповерхность $X = \{F(x_0, ..., x_n) = 0\}$ в $\mathbb{P}^n$.

Задача 1. Пусть $a = (a_0 : ... : a_n)$ и $b = (b_0 : ... : b_n)$ - две различные точки в $\mathbb{P}^n$. Как мы знаем,

$$F(b + \lambda a) = F(b) + \frac{\lambda}{1!}(D_a F)(b) + \frac{\lambda^2}{2!}(D_a^2 F)(b) + ... + \frac{\lambda^d}{d!}(D_a^d F)(b), \qquad \lambda \in \mathbf{k},$$

где $D_a F = \sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$ - оператор поляризации. Рассмотрим многочлен $f(x_1, ..., x_n) := F(1, x_1, ..., x_n)$. Этот многочлен уже не является однородным, поэтому можно разложить его на однородные слагаемые (формы) f_k, где $k = \deg f_k$:

$$f(x_1, ..., x_n) = f_0 + f_1 + f_2 + ... + f_d, \qquad f_0 = F(1, 0, ..., 0) \in \mathbf{k}, \quad f_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad f_2 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j, \ \ldots \quad (1)$$

1) Покажите, что коэффициенты α_i в линейной форме f_1 имеют вид: $\alpha_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, 0, ..., 0), \ i = 1, ..., n$.
2) Выведите отсюда, что $b = (1 : 0 : ... : 0) \in \mathrm{Sing}X$ (то есть b является особой точкой на X) тогда и только тогда, когда $f_0 = 0$ и $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$, то есть когда $f_0 \equiv f_1 \equiv 0$.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи рассмотрим случай $n = 2$, то есть $X = V(F)$ - кривая на плоскости $\mathbb{P}^2$, и, упрощая обозначения, положим $x = x_1, \ y = x_2$. Можно считать (x, y) аффинными координатами в аффинной карте $U = \mathbb{P}^2 \smallsetminus \{x_0 = 0\}$. В этой карте точка b имеет координаты $(0, 0)$. Пусть $b \in \mathrm{Sing}X$, так что в разложении (1) имеем $f_0 \equiv f_1 \equiv 0$, а $f_2 \not\equiv 0$, то есть это разложение начинается с ненулевой квадратичной формы $f_2 = \alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{22}y^2$. Так как поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто, то форма f_2 разлагается в произведение двух ненулевых линейных форм: $f_2 = L_1(x, y) \cdot L_2(x, y)$, где $L_i(x, y) = \gamma_i x + \delta_i y, \ i = 1, 2$. Линейные формы L_1 и L_2 определяют в $\mathbb{P}^2$ прямые $l_i = V(L_i), \ i = 1, 2$, проходящие через точку b. Точка b называется *обыкновенной двойной точкой* кривой X, если формы L_1 и L_2 непропорциональны, то есть если прямые l_1 и l_2 различны. Пусть b - обыкновенная двойная точка кривой X, и пусть точка a не лежит ни на X, ни на прямых l_1 и l_2. Обозначим $m_1 = \langle a, b \rangle$.
1) Проверьте, что $b \in P_a(X)$, но $b \notin \mathrm{Sing}P_a(X)$.
2) Так как b - неособая точка на поляре $P_a(X)$, то, значит, $m_2 := \mathbb{T}_b P_a(X)$ - прямая. Докажите, что пара прямых l_1, l_2 гармонически делит пару прямых m_1, m_2, то есть l_1, l_2, m_1, m_2 - гармоническая четверка прямых.
3) Найдите $P_b^{d-2}(X)$.

Задача 3. 1) Пусть X - гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, $b \in \mathrm{Sing}X$. Докажите, что $b \in P_a(X)$ для произвольной точки $a \in \mathbb{P}^n$.
2) При $k \geqslant 2$ точка $b \in X$ называется *особой точкой кратности* k на X, если в разложении (1) $f_0 \equiv f_1 \equiv ... \equiv f_{k-1} \equiv 0$, но $f_k \not\equiv 0$. Докажите, что для точки b кратности k на X и произвольной точки $a \in \mathbb{P}^n$ верно включение $b \in P_a(X) \cap P_a^2(X) \cap ... \cap P_a^{k-1}(X)$.

Задача 4. Пусть уравнение кубической кривой X в $\mathbb{P}^2$ приведено в аффинной карте U (см. обозначения в задаче 2) к *нормальной форме Вейерштрасса*

$$y^2 = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3), \qquad \beta_1, \ \beta_2, \ \beta_3 \in \mathbf{k}, \qquad (2)$$

Докажите, что X неособа тогда и только тогда, когда скаляры $\beta_1, \ \beta_2, \ \beta_3$ различны.