

Семинар 20

Через ξ_n обозначим примитивный корень степени n из единицы.

Доказать неразрешимость с помощью циркуля и линейки следующих классических задач.

1. Построить отрезок, длина которого равна стороне квадрата, площадь которого равна площади данного круга.
 2. Разделить угол $\pi/3$ на три равные части.
 3. Построить отрезок, равный стороне куба, объем которого в два раза больше объема данного куба.
 4. Построить отрезок, равный стороне правильного 11-угольника.
 5. Верно ли, что $\mathbb{Q}(\xi_n) \cap \mathbb{Q}(\xi_m) = \mathbb{Q}(\xi_{(m,n)})$?
 6. Рассмотрим поле $\mathbb{F}_2(a)$, где $a^4 + a + 1 = 0$. Найти минимальный многочлен числа $a^3 + a + 1$ над \mathbb{F}_2 .
 7. Доказать, что уравнение $X^5 - 35X^4 + 7 = 0$ неразрешимо в радикалах над полем рациональных чисел.
- 8*. Пусть $f(X)$ – неприводимый многочлен над полем K . Если уравнение $f(X) = 0$ разрешимо в радикалах над K , то группа Галуа этого многочлена разрешима. Доказать. (С: обратите внимание на задачи 3 и 4 19 семинара). Обратное утверждение тоже верно, но....
- 9*. Найти группу Галуа многочлена $X^5 + 20X + 6$ над полем рациональных чисел.

Семинар 19

1. Найти $Gal(\xi_{24})$ над полем рациональных чисел.
2. Сколько подгрупп порядка 2 содержится в группе Галуа из задачи 1? Опишите их и найдите их неподвижные поля.
3. Рассмотрим поле алгебраических чисел K , содержащее число ξ_n , и обозначим через $L = K(u)$, $u^n = a$, для некоторого $a \in K$, простое радикальное расширение поля K . Доказать, что L/K расширение Галуа с циклической группой Галуа. Ее порядок делит n .
4. Рассмотрим поле алгебраических чисел K . Доказать, что группа $Gal(K(\xi_n))/K$ изоморфна подгруппе мультипликативной группы кольца вычетов $\text{mod } n$, а потому абелева. Ее порядок делит $\phi(n)$.