

1. Функционал

$$S[y(x)] = \int_0^1 \left( (y''(x))^2 + 5(y'(x))^2 + 4y^2(x) \right) dx$$

задан на пространстве функций  $y(x) \in C^\infty[0, 1]$  с фиксированными граничными условиями  $y'(0) = 0$ ,  $y(1) = -3$ .

- Найдите экстремаль функционала  $S[y(x)]$ , то есть функцию  $y(x)$  из указанного пространства, на которой функционал принимает экстремальное значение.
- На том же пространстве функций найдите экстремаль функционала

$$F[y(x)] = S[y(x)] + 6y'(1).$$

2\*. Функционал

$$\Phi[y(x)] = 2y(\alpha) + \int_0^1 \left( y^2 + (y')^2 \right) dx,$$

где  $0 < \alpha < 1$  — фиксированная внутренняя точка отрезка  $[0, 1]$ , задается на множестве непрерывных на отрезке  $[0, 1]$  функций с заданными значениями на границах:  $y(0) = y(1) = 0$ .

- Определите подпространство  $\mathcal{A} \subset \{f \in C^0[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$  функций, на котором функционал  $\Phi$  корректно определен, дифференцируем, и имеет экстремум (т.е., уточните свойства гладкости функций подпространства  $\mathcal{A}$  так, чтобы задача поиска экстремума  $\Phi[y(x)]$  имела решение).
- Найдите экстремум функционала  $\Phi$  на подпространстве  $\mathcal{A}$ .

3. Один конец невесомой упругой балки закрепили горизонтально в начале координат. На втором конце закрепили точечную массу  $m$ . Длина балки  $L$ , вся система находится в однородном поле тяжести  $\vec{g}$ , направленном вертикально (рис. 1). Определите форму балки  $y(x)$  в состоянии равновесия, полагая, что линейная плотность потенциальной энергии ее упругой деформации определяется формулой  $\kappa(y'')^2/2$ .

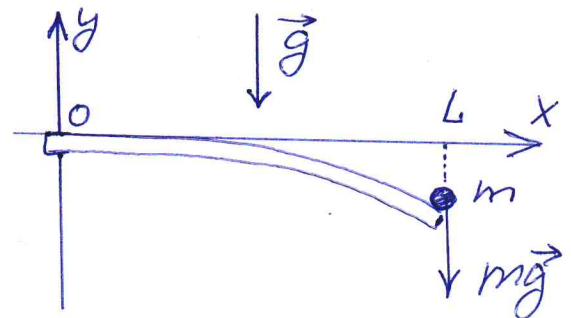


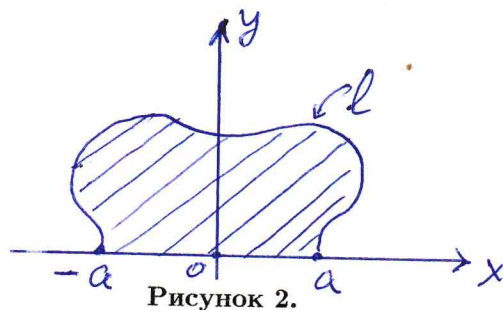
Рисунок 1.

4. Частица массы  $m = 1$  скользит без трения по поверхности сферы радиуса  $R$  в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения  $\vec{g}$  (модель сферического

маятника). Определите силу реакции  $\vec{N}$ , действующую на частицу со стороны сферы, и выразите  $\vec{N}$  в виде функции координат частицы и ее энергии.

**Указание.** Воспользуйтесь методом множителей Лагранжа, введя в лагранжиан свободной частицы связь  $f(\vec{r}) = R^2 - \vec{r}^2 = 0$ .

5. Среди плоских кривых фиксированной длины  $\ell > 2a$  начинающихся в точке  $(-a, 0)$  и заканчивающихся в точке  $(a, 0)$  плоскости  $\mathbb{R}^2$ , найдите кривую, которая вместе с отрезком  $[-a, a]$  оси абсцисс ограничивала бы наибольшую площадь (рис. 2). Для решения задачи воспользуйтесь методом множителей Лагранжа.



- Найдите общее решение дифференциального уравнения на экстремаль этой вариационной задачи (в нем множитель Лагранжа — одна из констант).
- Найдите связь множителя лагранжа  $\lambda$  и параметров задачи  $a$  и  $\ell$ .
- Предъявите явный вид решения  $y(x)$  в случае  $\ell = \pi a / \sqrt{2}$ .