Семинар 9.

Везде в задачах основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто характеристики 0, $(x_0 : ... : x_n)$ - однородные координаты в пространстве $\mathbb{P}^n$, $F(x_0, ..., x_n)$ - форма степени d от переменных $x_0, ..., x_n$. Через $V(F)$ будем обозначать гиперповерхность $X = \{F(x_0, ..., x_n) = 0\}$ в $\mathbb{P}^n$.

Задача 1. Пусть уравнение кубической кривой X в $\mathbb{P}^2$ приведено в аффинной карте U (см. обозначения в задаче 2) к *нормальной форме Вейерштрасса*

$$y^2 = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3), \qquad \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3 \in \mathbf{k}, \tag{1}$$

Докажите, что X неособа тогда и только тогда, когда скаляры $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ различны.

Пусть S_n^d - пространство форм степени d от переменных $x_0, ..., x_n$, и пусть W - подпространство в S_n^d. Отображение

$$f_W :\ \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}(W^*), \quad x\ \mapsto\ (F \to F(x))$$

называется *отображением линейным рядом* $\mathbb{P}(W)$. Если $W = S_n^d$, то f_W называется *отображением полным линейным рядом* $\mathbb{P}(S_n^d)$. Отображение $v_d :\ \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$ полным линейным рядом $\mathbb{P}(S_1^d)$ называется *отображением Веронезе степени* d.

Задача 2. Найдите образ отображения Веронезе степени два $v_2 :\ \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$.

Задача 3. Рассмотрим кривую C - образ отображения Веронезе степени три $v_3 :\ \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$. В скольких точках пересекает кривую C общая плоскость в $\mathbb{P}^3$?

Задача 4. Пусть $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V)$, а a и b - два ненулевых неколлинеарных вектора в V.
1) В пространстве S_1^3 рассмотрим подпространство $W = \{F \in S_1^3 \mid F(a) = 0\}$. Найдите образ отображения $f_W :\ \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$.
2) В пространстве S_1^3 рассмотрим подпространство $W = \{F \in S_1^3 \mid F'(a) = 0\}$. Найдите образ отображения $f_W :\ \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$.
3) В пространстве S_1^3 рассмотрим подпространство $W = \{F \in S_1^3 \mid F(a) = F(b)\}$. Найдите образ отображения $f_W :\ \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$.

Задача 5. Пусть $X = V(F)$ - гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, где $\deg F = d$, и $a \in X$. Пусть l - касательная прямая к X в точке a. Возьмем произвольную точку $b \in l$, $b \neq a$, и пусть $f(\lambda) := F(a + \lambda b)$ имеет корень $\lambda = 0$ по меньшей мере кратности 3. В этом случае l называется *касательной перегиба в точке* $a \in X$. (Если при этом $n = 2$, то есть X - кривая в $\mathbb{P}^2$, то точка a называется точкой перегиба кривой X.) Предпоследняя ($(d-2)$-ая) поляра $Q_a(X) := P_a^{d-2}(X)$ точки a относительно X является гиперповерхностью степени 2 (гиперквадрикой) в $\mathbb{P}^n$. Она называется *полярной квадрикой* точки a относительно гиперповерхности X.
Докажите, что l является касательной перегиба в точке $a \in X$ тогда и только тогда, когда $l \subset \mathbb{T}_a X \cap Q_a(X)$.