Крайний 21 Семинар

1. Будем рассматривать поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ как векторное пространство над полем рациональных чисел, а умножение на число $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ в поле как линейный оператор. Найти след, определитель и характеристический многочлен этого оператора.

2. Какую степень над $\mathbb{F}_p$ имеет поле разложения многочлена $X^n - 1$?

3. Найти сопряженные для числа $\cos 2\pi/7$.

4. Вычислить сумму всех элементов конечного поля. Вычислить произведение всех ненулевых элементов конечного поля.

Комплексное число α называется целым алгебраическим, если оно являетя корнем нормированного многочлена с целыми коэффициентами.

5. Доказать, что $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ – целое алгебраическое число.

6. Доказать, что любое алгебраическое число становится целым алгебраическим, если его умножить на подходящее целое число.

7. Доказать, что у минимального нормированного многочлена целого алгебраического числа целые коэффициенты.

8. Пусть $M \subset \mathbb{C}$ – конечнопорожденный $\mathbb{Z}$-модуль. Если комплексное число α таково, что $\alpha M \subset M$, то α – целое алгебраическое число.

9. Сформулировать и доказать утверждение, обратное утверждению задачи 8.

10. Доказать, что целые алгебраические числа образуют кольцо.

11. Описать кольцо целых алгебраических чисел в квадратичных полях $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

12. Пусть L – конечное расширение поля рациональных чисел. Доказать, что множество целых алгебраических чисел из поля L содержит базис L над $\mathbb{Q}$ (т.е., целые алгебраические числа образуют $\mathbb{Z}$-решетку полного ранга в L).