Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Мероморфные функции — голоморфные отображения комплексных кривых в проективную прямую. Можно рассматривать и голоморфные отображения комплексных кривых в другие кривые. Прежде всего — автоморфизмы кривых, т.е. биголоморфные отображения кривой в себя. Автоморфизмы каждой кривой образуют группу.

Мероморфные функции — голоморфные отображения комплексных кривых в проективную прямую. Можно рассматривать и голоморфные отображения комплексных кривых в другие кривые. Прежде всего — автоморфизмы кривых, т.е. биголоморфные отображения кривой в себя. Автоморфизмы каждой кривой образуют группу.

Theorem

Группа автоморфизмов проективной прямой образована дробно-линейными преобразованиями

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, d — комплексные числа, такие, что $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$

Действительно, автоморфизм проективной прямой — это мероморфная функция степени 1. Всякая мероморфная функция степени k, как мы знаем, это рациональная функция — отношение двух взаимно простых многочленов степени k. Заметим, что умножение числителя и знаменателя на одно и то же ненулевое комплексное число не меняет дробно-линейного преобразования.

Лекция 8. Отображения кривых: отображения эллиптических кривых в эллиптические кривые

Кривая рода 1 — эллиптическая кривая — является фактором комплексной прямой $\mathbb{C}$ по решетке. Пусть $X = \mathbb{C}/L$, $Y = \mathbb{C}/M$ — две эллиптические кривые с выделенными нулями $L/L, M/M$ соответственно, $f : X \to Y$ — непостоянное голоморфное отображение. Выполнив композицию f со сдвигом, мы можем считать, что $f(0) = 0$. Из формулы Римана–Гурвица вытекает, что разветвленное накрытие тора тором не может иметь точек ветвления, т.е. является накрытием. Поэтому имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

При этом $F(0)$ — точка решетки M, и можно считать, что $F(0) = 0$. Более того, F отображает $p^{-1}(0)$ в $q^{-1}(0)$, т.е. $F(L) \subset M$. Функция $dF(z)/dz$ инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки L, поэтому она ограничена на X, поэтому она постоянна. Значит, $F(z) = cz$, где $c \neq 0$ — некоторая константа. Поэтому *любое голоморфное отображение эллиптических кривых индуцировано отображением $F(z) = cz + a$ комплексной прямой*, причем $cL \subset M$.

Theorem

Группа автоморфизмов данной эллиптической кривой $X = \mathbb{C}/L$, сохраняющих точку 0, — циклическая группа порядка 4, если решетка L квадратная, порядка 6, если решетка L гексагональная, и порядка 2 во всех остальных случаях.

Theorem

Группа автоморфизмов данной эллиптической кривой $X = \mathbb{C}/L$, сохраняющих точку 0, — циклическая группа порядка 4, если решетка L квадратная, порядка 6, если решетка L гексагональная, и порядка 2 во всех остальных случаях.

Corollary

Существуют неизоморфные эллиптические кривые.

Действительно, группы автоморфизмов изоморфных эллиптических кривых, сохраняющих данную точку, также должны быть изоморфны.

Доказательство. Отображение $z \mapsto cz$ переводит решетку L в себя. В частности, оно сохраняет площади, поэтому $|c| = 1$. Более того, c — корень из 1, поскольку иначе образы ненулевого элемента решетки образовывали бы всюду плотное множество на окружности. Если векторы τ_1, τ_2 порождают решетку L, то $c\tau_1 = u_1\tau_1 + v_1\tau_2$ и $c\tau_2 = u_2\tau_1 + v_2\tau_2$ (где числа u_1, v_1, u_2, v_2 целые), а значит c является собственным числом матрицы

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен 1, так как она сохраняет площади, и корень характеристического многочлена $x^2 - (u_1 + v_2)x + 1$ может быть корнем из 1 только если $(u_1 + v_2) = 0$ (что соответствует квадратной решетке), $(u_1 + v_2) = \pm 1$ (что соответствует гексагональной решетке, так как в этом случае $x^3 = \pm 1$) или $(u_1 + v_2) = \pm 2$ (что соответствует всем остальным решеткам — имеющим единственный нетривиальный автоморфизм $z \mapsto -z$).

Theorem

Пусть C_1, C_2 — две гладкие плоские коники. Определим отображение $f : C_1 \to C_1$, переводящее точку x коники C_1 во вторую точку пересечения с C_1 касательной к C_2, проходящей через x. Если для некоторой точки $x_1 \in C_1$ последовательность $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $x_4 = f(x_3), \dots$ имеет период длины n, то такая же последовательность, начинающаяся с любой точки $x \in C_1$, имеет период такой же длины.

Мы знаем, что это так для двух концентрических окружностей, однако утверждение оказывается гораздо более общим.

Доказательство. Будем считать, что коники C_1, C_2, находятся в общем положении, т.е. пересекаются трансверсально в четырех точках. Пусть $C_2^\vee \subset (\mathbb{C}P^2)^\vee$ — кривая двойственная к C_2. Рассмотрим в поверхности $C_1 \times (C_2)^\vee$ подмножество $E = \{(x,\ell)|x \in \ell\}$.

Доказательство. Будем считать, что коники C_1, C_2, находятся в общем положении, т.е. пересекаются трансверсально в четырех точках. Пусть $C_2^\vee \subset (\mathbb{C}P^2)^\vee$ — кривая двойственная к C_2. Рассмотрим в поверхности $C_1 \times (C_2)^\vee$ подмножество $E = \{(x, \ell) | x \in \ell\}$.

Lemma

Кривая E эллиптическая.

Доказательство. Будем считать, что коники C_1, C_2, находятся в общем положении, т.е. пересекаются трансверсально в четырех точках. Пусть $C_2^\vee \subset (\mathbb{C}P^2)^\vee$ — кривая двойственная к C_2. Рассмотрим в поверхности $C_1 \times (C_2)^\vee$ подмножество $E = \{(x,\ell) | x \in \ell\}$.

Lemma

Кривая E эллиптическая.

Действительно, проекция $E \to C_1$ — накрытие степени 2, разветвленное в 4 точках (точках пересечения коники C_1 с C_2).

Доказательство. Будем считать, что коники C_1, C_2, находятся в общем положении, т.е. пересекаются трансверсально в четырех точках. Пусть $C_2^\vee \subset (\mathbb{C}P^2)^\vee$ — кривая двойственная к C_2. Рассмотрим в поверхности $C_1 \times (C_2)^\vee$ подмножество $E = \{(x, \ell) | x \in \ell\}$.

Lemma

Кривая E эллиптическая.

Действительно, проекция $E \to C_1$ — накрытие степени 2, разветвленное в 4 точках (точках пересечения коники C_1 с C_2).
Рассмотрим на кривой E инволюции $\sigma_1 : (x_1, \ell) \mapsto (x_2, \ell)$, переставляющую точки пересечения касательной к C_2 с C_1, и $\sigma_2 : (x, \ell_1) \mapsto (x, \ell_2)$, переставляющую две касательные к C_2, выходящие из одной точки коники C_1, $\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_2 = \mathrm{id}$. Всякая инволюция эллиптической кривой имеет вид $z \mapsto c - z$ для некоторой константы c. Поэтому $\sigma_1(z) = c_1 - z, \sigma_2(z) = c_2 - z$ и $f(z) = \sigma_2 \circ \sigma_1(z) = z + (c_2 - c_1)$ есть сдвиг. Его n-я степень тоже сдвиг, а если у сдвига есть неподвижная точка, то он является тождественным отображением.

Пусть C — гладкая неприводимая алгебраическая кривая, G — ее конечная группа автоморфизмов.

Lemma

Множество неподвижных точек нетождественного автоморфизма гладкой компактной алгебраической кривой конечно.

Лекция 8. Отображения кривых: теорема Гурвица

Пусть C — гладкая неприводимая алгебраическая кривая, G — ее конечная группа автоморфизмов.

Lemma

Множество неподвижных точек нетождественного автоморфизма гладкой компактной алгебраической кривой конечно.

Обозначим через C' двумерную компактную ориентируемую поверхность C/G (которая может и не быть алгебраической кривой; так происходит, если группа G действует несвободно). Естественная проекция $C \to C'$ является разветвленным накрытием. У всех точек поверхности C' за исключением конечного числа имеется $|G|$ прообразов, у точек ветвления их меньше. Для точки $x \in C$ обозначим через $G_x \subset G$ ее стационарную подгруппу; для всех точек кроме конечного числа она тривиальна. Формула Римана–Гурвица дает

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x \in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G|\left(\chi(C') - \sum_{x \in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x\in C} \left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

Theorem (Гурвиц)

Порядок конечной группы автоморфизмов гладкой неприводимой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ не превосходит $84(g-1)$.

Кривые, имеющие группу автоморфизмов такого порядка, называются *кривыми Гурвица*.
Доказательство.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x \in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G|\left(\chi(C') - \sum_{x \in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

Theorem (Гурвиц)

Порядок конечной группы автоморфизмов гладкой неприводимой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ не превосходит $84(g-1)$.

Кривые, имеющие группу автоморфизмов такого порядка, называются *кривыми Гурвица*.

Доказательство.

Обозначим через g' род поверхности $C' = C/G$. Пусть $|G| > 1$, так что $g' < g$.

Рассмотрим по отдельности три случая:

1. $g' \geq 2$. Тогда $2g - 2 \geq 2|G|$, откуда $|G| \leq g - 1$.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G|\left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

2. $g' = 1$. Тогда $2g - 2 = |G|\sum\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)$. Если точек ветвления нет, то $g = 1$, а мы предполагаем, что $g > 1$. Поэтому для некоторых точек $|G_x| \geq 2$, и правая часть не меньше, чем $|G|/2$, т.е. $|G| \leq 4(g-1)$.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x\in C} \left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3. $g' = 0$. Тогда $2g - 2 = |G| \left(\sum \left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right) - 2\right)$. Левая часть положительна, $|G| > 0$ и каждое слагаемое в сумме меньше 1, поэтому слагаемых должно быть не меньше трех.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C)=|G|\chi(C')-\sum_{x\in C}\frac{|G|}{|G_x|}(|G_x|-1)=|G|\left(\chi(C')-\sum_{x\in C}\left(1-\frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3. $g'=0$. Тогда $2g-2=|G|\left(\sum\left(1-\frac{1}{|G_x|}\right)-2\right)$. Левая часть положительна, $|G|>0$ и каждое слагаемое в сумме меньше 1, поэтому слагаемых должно быть не меньше трех.
3.1. Если число слагаемых больше четырех, то, поскольку каждое слагаемое не меньше $1/2$, получаем $2g-2\geq|G|/2$, откуда $|G|\leq 4(g-1)$.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C}\frac{|G|}{|G_x|}(|G_x|-1) = |G|\left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1-\frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3. $g'=0$. Тогда $2g-2 = |G|\left(\sum\left(1-\frac{1}{|G_x|}\right)-2\right)$. Левая часть положительна, $|G|>0$ и каждое слагаемое в сумме меньше 1, поэтому слагаемых должно быть не меньше трех.
3.1. Если число слагаемых больше четырех, то, поскольку каждое слагаемое не меньше $1/2$, получаем $2g-2\geq |G|/2$, откуда $|G|\leq 4(g-1)$.
3.2. Если в сумме 4 слагаемых, то хотя бы одно из чисел $|G_x|$ должно быть больше 2, откуда $2g-2\geq |G|(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-2)=\frac{1}{6}|G|$, или $|G|\leq 12(g-1)$.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x\in C} \left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1 - \frac{1}{a}) + (1 - \frac{1}{b}) + (1 - \frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \ge 3$.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G|\left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1 - \frac{1}{a}) + (1 - \frac{1}{b}) + (1 - \frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \ge 3$.

а) $c \ge 7 \implies |G| \le 84(g - 1)$;

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G|\left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1-\frac{1}{a}) + (1-\frac{1}{b}) + (1-\frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \ge 3$.

a) $c \ge 7 \Longrightarrow |G| \le 84(g-1)$;

b) $(c = 6)\&(a = 2) \Longrightarrow b \ge 4 \Longrightarrow |G| \le 24(g-1)$;

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x\in C} \left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1 - \frac{1}{a}) + (1 - \frac{1}{b}) + (1 - \frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \ge 3$.

a) $c \ge 7 \implies |G| \le 84(g-1)$;

b) $(c = 6)\&(a = 2) \implies b \ge 4 \implies |G| \le 24(g-1)$;

c) $(c = 6)\&(a \ge 3) \implies |G| \le 12(g-1)$;

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C)=|G|\chi(C')-\sum_{x\in C}\frac{|G|}{|G_x|}(|G_x|-1)=|G|\left(\chi(C')-\sum_{x\in C}\left(1-\frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1-\frac{1}{a})+(1-\frac{1}{b})+(1-\frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \ge 3$.
a) $c \ge 7 \Longrightarrow |G| \le 84(g-1)$;
b) $(c=6)\&(a=2) \Longrightarrow b \ge 4 \Longrightarrow |G| \le 24(g-1)$;
c) $(c=6)\&(a\ge 3) \Longrightarrow |G| \le 12(g-1)$;
d) $(c=5)\&(a=2) \Longrightarrow b \ge 4 \Longrightarrow |G| \le 40(g-1)$;

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x \in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G|\left(\chi(C') - \sum_{x \in C}\left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1 - \frac{1}{a}) + (1 - \frac{1}{b}) + (1 - \frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \ge 3$.
a) $c \ge 7 \Longrightarrow |G| \le 84(g-1)$;
b) $(c = 6)\&(a = 2) \Longrightarrow b \ge 4 \Longrightarrow |G| \le 24(g-1)$;
c) $(c = 6)\&(a \ge 3) \Longrightarrow |G| \le 12(g-1)$;
d) $(c = 5)\&(a = 2) \Longrightarrow b \ge 4 \Longrightarrow |G| \le 40(g-1)$;
e) $(c = 5)\&(a \ge 3) \Longrightarrow |G| \le 15(g-1)$;

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x| - 1) = |G| \left(\chi(C') - \sum_{x\in C} \left(1 - \frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1-\frac{1}{a}) + (1-\frac{1}{b}) + (1-\frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \ge 3$.
a) $c \ge 7 \implies |G| \le 84(g-1)$;
b) $(c=6)\&(a=2) \implies b \ge 4 \implies |G| \le 24(g-1)$;
c) $(c=6)\&(a \ge 3) \implies |G| \le 12(g-1)$;
d) $(c=5)\&(a=2) \implies b \ge 4 \implies |G| \le 40(g-1)$;
e) $(c=5)\&(a \ge 3) \implies |G| \le 15(g-1)$;
f) $(c=4)\&a(\ge 3) \implies |G| \le 24(g-1)$.

Формула Римана–Гурвица

$$\chi(C) = |G|\chi(C') - \sum_{x\in C} \frac{|G|}{|G_x|}(|G_x|-1) = |G|\left(\chi(C') - \sum_{x\in C}\left(1-\frac{1}{|G_x|}\right)\right).$$

3.3. Пусть в сумме есть 3 ненулевых слагаемых, и числа $|G_x|$ равны a, b, c, $a \le b \le c$. Сумма $(1-\frac{1}{a}) + (1-\frac{1}{b}) + (1-\frac{1}{c})$ должна быть больше 2, поэтому $c > 3$, а $b \ge 3$.

a) $c \ge 7 \implies |G| \le 84(g-1)$;

b) $(c=6)\&(a=2) \implies b \ge 4 \implies |G| \le 24(g-1)$;

c) $(c=6)\&(a\ge 3) \implies |G| \le 12(g-1)$;

d) $(c=5)\&(a=2) \implies b \ge 4 \implies |G| \le 40(g-1)$;

e) $(c=5)\&(a\ge 3) \implies |G| \le 15(g-1)$;

f) $(c=4)\&a(\ge 3) \implies |G| \le 24(g-1)$.

Значение $|G| = 84(g-1)$ достигается только при $a=2, b=3, c=7$. *Гладкая компактная неприводимая алгебраическая кривая рода g может иметь группу автоморфизмов из $84(g-1)$ элементов только в том случае, если на ней существует мероморфная функция с ровно тремя критическими значениями, причем все прообразы этих критических значений являются критическими точками — кратностей $2, 3, 7$, соответственно.*

Лекция 8.

Лекция 8.

Семинар 8. Задачи

- Проверьте, что композиция двух дробно-линейных преобразований

$$z \mapsto \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, z \mapsto \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2},$$

  задается произведением матриц, т.е. группа автоморфизмов проективной прямой изоморфна группе $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$.
- Проверьте, что подгруппа $\{\pm I\} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ нормальна.
- Докажите, что образы трех точек полностью определяют дробно-линейное преобразование.
- Найдите подгруппу в группе дробно-линейных преобразований а) оставляющую неподвижной данную пару точек; б) оставляющую неподвижной данную точку.

Семинар 8. Задачи

- Найдите количество d-кратных накрытий данной эллиптической кривой (рассматриваемых с точностью до изоморфизма накрытий).
- Пусть C — гиперэллиптическая кривая рода $g \geq 2$, $f : C \to \mathbb{C}P^1$ — гиперэллиптическое накрытие, $\{t_1, \dots, t_{2g+2}\} \subset \mathbb{C}P^1$ — точки ветвления накрытия. Докажите, что группа автоморфизмов G кривой C является членом точной последовательности групп

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to G \to \mathrm{Aut}(\{t_1, \dots, t_{2g+2}\}) \to 0,$$

  где предпоследний член это подгруппа в группе дробно-линейных преобразований, переводящая можество точек ветвления в себя.
- Вычислите порядок группы автоморфизмов *кривой Больца* — кривой рода 2, заданной уравнением

$$y^2 = x^5 - x.$$

- Докажите, что не существует кривой Гурвица рода 2.

- Плоская *кривая Клейна* задается уравнением $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$.
  а) Докажите, что эта кривая гладкая и ее род равен 3.
  б) Укажите 168 автоморфизмов кривой Клейна. В частности, проверьте, что она допускает автоморфизм порядка 7

$$(x : y : z) \mapsto (x, \zeta^4 y, \zeta^5 z),$$

  где ζ — примитивный корень из 1, $\zeta^7 = 1$.

Семинар 8. Задачи

- Что представляют собой факторповерхности эллиптических кривых по группам их автоморфизмов, сохраняющих 0? Как ответ зависит от группы автоморфизмов?
- Вычислите порядок группы автоморфизмов кривой Ферма $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, сохраняющих 0.
- Вычислите порядок группы автоморфизмов кривой Ферма $x^4 + y^4 + z^4 = 0$.

Семинар 8. Задачи