Семинар 11 22.03.22

① Разбор 5-мин. прошлого семинара.

② Рассмотрим ещё один пример.

Пример 1.

Функционал

$$S[y(x)] = y(0)y'(0) + \int_0^1 \left((y'')^2 + f(x)y' + \sin y^2\right)dx$$

задан на пространстве $y(x) \in C^4[0,1]$, функция $f(x)$ – непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$: $f(x) \in C^1[0,1]$.

а) Найдите выражение для вариации $\delta S_{y(x)}[\delta y]$ на произвольной функции $y(x) \in C^4[0,1]$

б) Выделим в $C^4[0,1]$ аффинное подпространство $\mathcal{A} \subset C^4[0,1]$ функций с фиксированными условиями на концах отрезка: $\begin{matrix} y(0) = a \\ y'(1) = b \end{matrix}$ $\forall y \in \mathcal{A}$.

Найдите дифференциальное уравнение и граничные условия, определяющие экстремаль функционала $S[y]$ на подпространстве $\mathcal{A}$.

Решение:

а) По определению, вариацией (дифференциалом) функционала S на функции $y(x)$ является линейная по δy часть приращения функционала:

$$\delta S_{y(x)}[\delta y] = \left(S[y+\delta y] - S[y] \right) \Big|_{\text{линейная часть по } \delta y}$$

Здесь, естественно, $y+\delta y \in C^4[0,1]$.

Технически выделение линейной части приращения ничем не отличается от нахождения линейной по Δx части приращения $\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$ для обычной дифференцируемой функции, что сводится к вычислению линейного по Δx слагаемого в разложении в ряд Тейлора:

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \varphi'(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

Так, например, в подынтегральном выражении в приращении функционала S нужно найти линейную по $\delta y(x)$ часть следующей разности:

$$\sin(y+\delta y)^2 - \sin y^2 =$$
$$= \sin(y^2 + 2y\delta y + \delta y^2) - \sin y^2 =$$
$$= (\cos y^2)\, 2y\delta y + o(\delta y)$$

и так далее.

Учитывая эти простые соображения, получаем выражение для вариации:

$$\delta S_{y(x)}[\delta y] = \delta y(0)\cdot y'(0) + y(0)\cdot \delta y'(0) +$$
$$+ \int_0^1 \left(2y''\delta y'' + f(x)\,\delta y' + 2y\cos(y^2)\delta y \right) dx.$$

Воспользуемся интегрированием по частям и избавимся от производных у вариации δy в подынтегральном выражении. Например:

$$\int_0^1 y''\delta y''\,dx = y''\delta y'\Big|_0^1 - \int_0^1 y'''\delta y'\,dx =$$
$$= y''\delta y'\Big|_0^1 - y'''\delta y\Big|_0^1 + \int_0^1 y^{(4)}\delta y\,dx.$$

Окончательно получаем такое значение вариации δS на произвольной функции $y(x) \in C^4[0,1]$:

$$\delta S_{y(x)}[\delta y] = \delta y(0)\, y'(0) + y(0)\, \delta y'(0) +$$
$$+ 2y''\delta y'\Big|_0^1 - 2y^{(3)}\delta y\Big|_0^1 + f(x)\,\delta y\Big|_0^1 +$$
$$+ \int_0^1 \left(2y^{(4)} - f'(x) + 2y\cos y^2\right)\delta y(x)\,dx.$$

Как обычно, внеинтегральные слагаемые служат источником недостающих условий к дифференциальному уравнению.

б) Функции пространства A частично зафиксированы в крайних точках отрезка $[0,1]$:

$\underline{y(0)=a} \Rightarrow \delta y(0)=0$

$y'(0)$ – не фиксировано, поэтому $\delta y'(0)$ – может быть любым.

$y'(1)=b \Rightarrow \delta y'(1)=0$, а $\delta y(1)$ – произвольна.

Экстремаль определяется условием $\delta S_y[\delta y]=0$ для <u>любых</u> δy.

Равенство 0 интеграла в δS =5=
даёт дифференциальное уравнение
(ур-е Эйлера-Лагранжа) на экстремалях:

$$\boxed{y^{(4)}(x) + y(x)\cos(y^2(x)) = \frac{1}{2} f'(x)}$$

По определению пространства A
имеем 2 граничных условия:

$$\boxed{y(0) = a \quad y'(1) = b.}$$

Ещё 2 условия получаются из внеинтегральных слагаемых в δS:

$$\delta S_{y(x)}[\delta y] = (y(0) - 2y''(0))\,\underline{\delta y'(0)} +$$
$$+ (f(1) - 2y^{(3)}(1))\,\underline{\delta y(1)} + \int (\ldots\ldots)\,\delta y\, dx = 0$$

В силу произвольности $\delta y(1)$ и $\delta y'(0)$
необходимо требовать выполнения
равенств:

$$\boxed{\begin{cases} y(0) - 2y''(0) = 0 \Rightarrow y''(0) = \frac{a}{2} \\ y^{(3)}(1) = \frac{1}{2} f(1) \end{cases}}$$

Это и есть 2 недостающих
граничных условия.

(III) Геодезические линии на круговом конусе

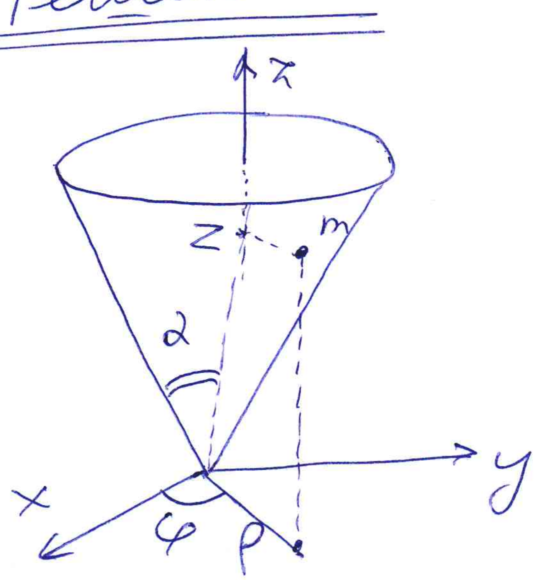
Пример 2.

По поверхности кругового конуса с углом раствора α движется свободная частица массы m (никакие силы кроме идеальных сил реакции поверхности на частицу не действуют.)

а) Выписать Лагранжиан системы в подходящих обобщенных координатах, найти выражения для законов сохранения (интегралов движения).

б) С помощью интегралов движения составить дифференциальное уравнение геодезической линии на конусе и решить его.

Решение:



Выберем цилиндрические координаты. Система имеет 2 степени свободы. Возьмем в качестве обобщенных координат полярные координаты ρ и φ.

$$x = \rho \cos\varphi \quad y = \rho \sin\varphi \quad z = \frac{\rho}{tg\alpha}.$$

а) Частица свободная => её Лагранжиан совпадает с кинетической энергией:

$$L = T_{кин} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2\left(1 + \frac{1}{tg^2\alpha}\right) + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) =$$

$$\boxed{= \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2\alpha} + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) = L}$$

В системе есть 2 закона сохранения:

<u>полной энергии</u> $\equiv T_{кин} = \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2\alpha} + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) = E = const$

Проекция момента импульса на ось $O\vec{z}$ (следствие <u>цикличности</u> координаты φ):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = J = const$$

б) Чтобы получить дифф. уравнение на геодезическую линию $\rho(\varphi)$, избавимся от производных <u>по времени</u> $\dot{\varphi}$ и $\dot{\rho}$.

$$\frac{\dot\rho^2}{\sin^2\alpha} + \rho^2\dot\varphi^2 = \frac{2E}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot\varphi^2\left(\rho^2 + \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\dot\rho}{\dot\varphi}\right)^2\right) = \frac{2E}{m} \qquad (*)$$

$\dot\varphi$ выразим из закона сохранения момента импульса $\dot\varphi = \frac{J}{m\rho^2}$ и учтем, что $\frac{\dot\rho}{\dot\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi}$.

Таким образом, уравнение $(*)$ приводится к виду:

$$\frac{J^2}{m^2\rho^4}\left(\rho^2 + \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right) = \frac{2E}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \sin^2\alpha\,\rho^2\left(\frac{2mE}{J^2}\rho^2 - 1\right)} \qquad (**)$$

Это и есть уравнение на геодезическую линию $\rho(\varphi)$.

Поскольку $E = T_{кин} > 0$ всегда, введем краткое обозначение

$$\frac{2mE}{J^2} = a^2 = Const.$$

Поскольку мы ищем вещественные решения уравнения (**), то нас интересует только область

$$a^2 \rho^2 \geq 1.$$

Сделаем замену искомой функции $\rho(\varphi)$, которая будет автоматически учитывать это ограничение: введём функцию $\vartheta(\varphi)$ равенством:

$$a^2 \rho^2 = \frac{1}{\cos^2 \vartheta(\varphi)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\rho(\varphi) = \frac{1}{a \cos \vartheta(\varphi)}}$$

Поскольку $\rho(\varphi) \geq 0$, нас интересует интервал значений $0 \leq \vartheta(\varphi) < \frac{\pi}{2}$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\varphi} &= \frac{\sin\vartheta}{a\cos^2\vartheta} \frac{d\vartheta}{d\varphi} \\ \rho &= \frac{1}{a\cos\vartheta(\varphi)} \end{aligned}\right\} \text{— подставим это всё в (**):}$$

$$\frac{\sin^2\vartheta}{a^2\cos^4\vartheta} \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 = \sin^2\alpha \frac{1}{a^2\cos^2\vartheta} \left(\frac{1}{\cos^2\vartheta} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 = \sin^2\alpha = \text{Const}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vartheta(\varphi)}{d\varphi} = \pm \sin\alpha$$

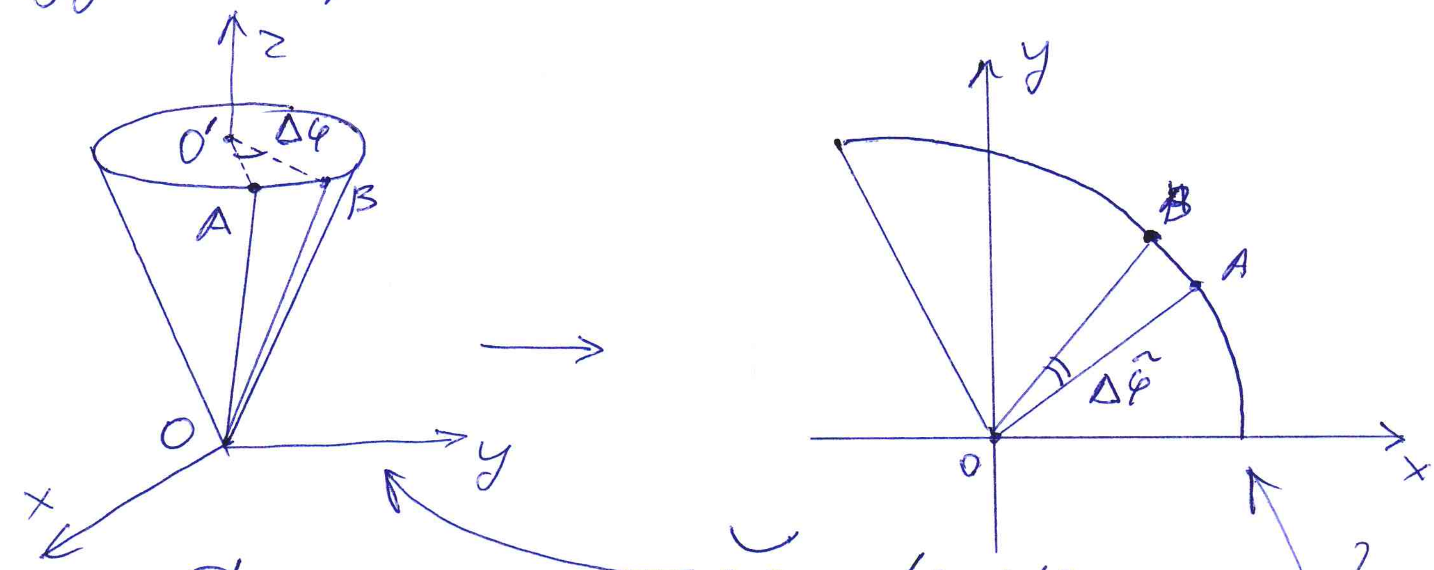
$$\vartheta(\varphi) = \pm\varphi\sin\alpha + \vartheta_0$$

Знак не важен, так как $\cos\vartheta(\varphi)$ — чётная функция.

Итак, ответ для геодезической:

$$\boxed{\rho\cos(\varphi\sin\alpha+\vartheta_0)=\frac{1}{a}}$$

Если перейти к развёртке конуса на плоскость XOY, то эта кривая будет прямой на развёртке.



Длина дуги $\breve{AB} = O'A\cdot\Delta\varphi =$
$= OA\sin\alpha\cdot\Delta\varphi$

$\breve{AB} = OA\Delta\tilde\varphi$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \Delta\tilde\varphi = \Delta\varphi\sin\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde\varphi = \varphi\sin\alpha$ — это полярный угол на плоскости развертки.

Координата $\tilde{\rho}$ на плоскости развертки пропорциональна координате ρ точки конуса:

$$\rho_A = |OA| \sin\alpha = \tilde{\rho}_A \sin\alpha.$$

Поэтому уравнение геодезической

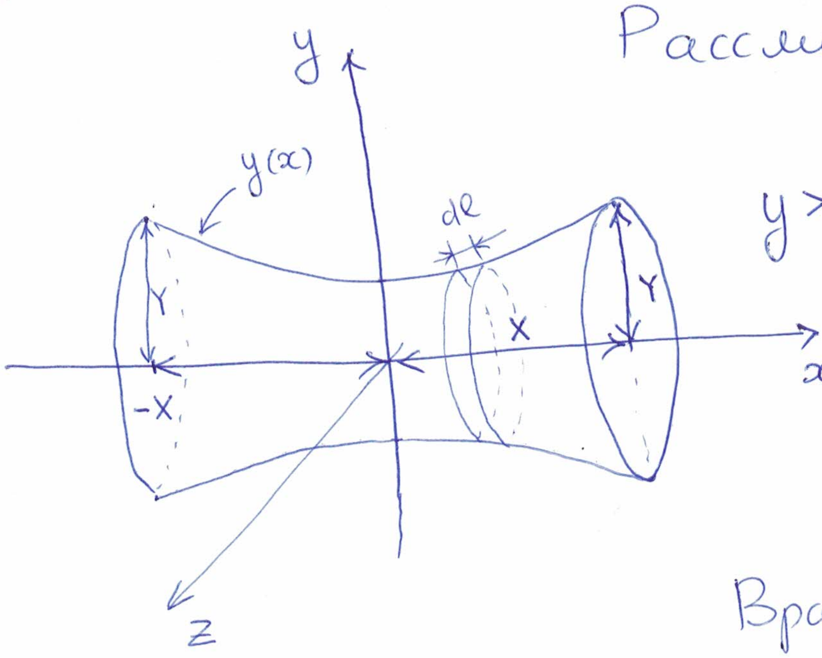
$$\rho \cos(\varphi \sin\alpha + \vartheta_0) = \frac{1}{a}$$

в терминах полярных координат развертки примет вид:

$$\boxed{\tilde{\rho} \cos(\tilde{\varphi} + \vartheta_0) = \frac{1}{a \sin\alpha} = C = \mathrm{Const}}$$

А это есть уравнение <u>прямой</u> в полярных координатах развертки $(\tilde{\rho}, \tilde{\varphi})$.

Задача о мыльных пленках.



Рассмотрим семейство функций $y(x)$, $x \in [-X, X]$, $y > 0$, с фиксированными значениями на границах

$$y(-X) = y(X) = Y$$

Вращая такие функции вокруг оси $O\vec{x}$ мы получаем поверхности вращения (см. Рис.). Необходимо определить $y(x)$ такую, чтобы площадь ее фигуры вращения была минимальной. Экспериментально такие поверхности можно получать, натягивая мыльную плёнку между двумя кольцами.

Площадь поверхности вращения

$$\boxed{S[y(x)] = \int\limits_{-Y}^{Y} \underbrace{\underbrace{2\pi y(x)}_{\text{периметр окружности}} \underbrace{\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx}_{=\,dl\text{ — длина боковой образующей куска конуса}}}_{\text{площадь боковой поверхности куска конуса (см. рис.)}}}$$

Поиск экстремалей этого функционала — типичная задача механики: концы кривой $y(x)$ фиксированы.

x играет роль времени. "Лагранжиан" задачи $L = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}$ не зависит явно от времени x, значит выполняется закон сохранения "энергии".

$$"E" = y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = -\frac{2\pi y}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$$

Разрешаем соотношение относительно y':

$$\boxed{y'^2 = \frac{1}{\alpha^2}y^2 - 1}$$, где α – некоторая константа

Заменой $y(x) \mapsto \varphi(x)$: $\begin{cases} y = \alpha \operatorname{ch}\varphi, \\ y' = \alpha \operatorname{sh}\varphi \cdot \varphi', (\varphi \neq 0) \end{cases}$

получаем уравнение

$$\boxed{\alpha^2\varphi'^2 = 1}$$

Выбор знака φ здесь несущественен. Выбираем решение $\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}x + \varphi_0$

Симметричность граничных условий для y: $y(X) = y(-X)$ приводит к $\varphi_0 = 0$. Получаем ответ

$$\boxed{y(x) = \alpha \operatorname{ch}\frac{x}{\alpha}}$$

где значение параметра $\alpha(X, Y)$ должно определяться из граничного условия

$$\boxed{Y = \alpha \operatorname{ch}\frac{X}{\alpha}}$$

Не для всяких X и Y это условие разрешимо. Вот отличие граничных условий вариационных задач от начальных условий механических задач.

Прежде чем разрешить это условие, посчитаем площадь фигуры:

$$S = \int_{-X}^{X} 2\pi \left(\alpha\, ch\frac{x}{\alpha}\right) \underbrace{ch\frac{x}{\alpha}}\, dx =$$

это $\sqrt{1+y'^2}$, т.к. $y' = sh\frac{x}{\alpha}$

$$= 2\pi\alpha \int_{-X}^{X} \frac{ch\frac{2x}{\alpha}+1}{2}\, dx =$$

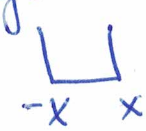
преобразуем, используя $Y = \alpha\, ch\frac{X}{\alpha}$

$$= 2\pi\alpha X + \pi\alpha^2 sh\left(\frac{2X}{\alpha}\right) =$$

$$\boxed{S = 2\pi X\alpha + 2\pi Y\sqrt{Y^2-\alpha^2}}$$

У параметра α есть геом. смысл: $y(0)=\alpha$ — это радиус фигуры в самом узком месте.

Ясно, что $\alpha \in [0, Y]$

$\alpha \to 0$, т.е. фигура схлопывается в 2 донышка от цилиндра, $y(x)$ имеет вид 

. $S = 2\pi Y^2$ верно!

$\alpha \to Y$, т.е. фигура превращается в боковую поверхность цилиндра $y(x) =$  $S = 4\pi XY$

Rem.: при "тупой" подстановке выходит $2\pi XY$.
На самом деле $\alpha = Y(1-\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$ приводит к $X \to 0$ как $X = \sqrt{2}Y\varepsilon + o(\varepsilon)$ (см. $Y = \alpha\, ch\, X/\alpha$)

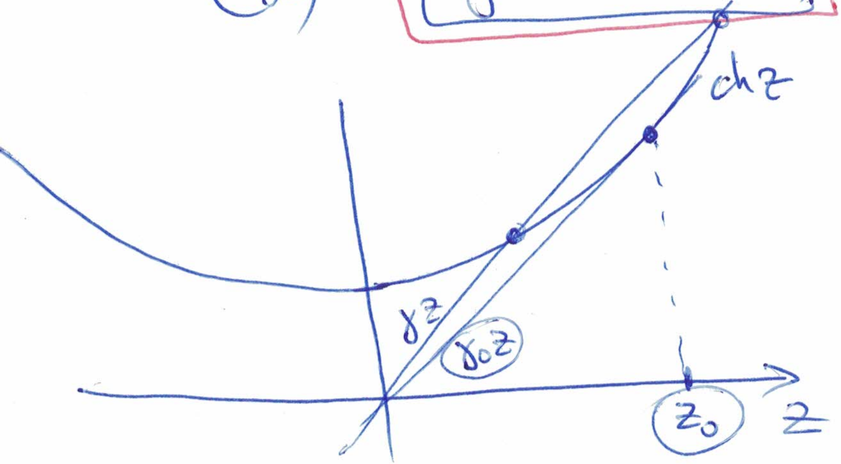
Поэтому $S = 2\pi(\sqrt{2}Y\varepsilon)\cdot Y + 2\pi Y \cdot Y\overbrace{\sqrt{1-(1-\varepsilon^2)^2}}^{=\sqrt{2}\varepsilon} = 4\pi(\sqrt{2}Y\varepsilon)Y = 4\pi XY$

Теперь поищем $\alpha(X,Y)$:

$$\boxed{Y = \alpha \operatorname{ch}\frac{X}{\alpha}} \qquad (*)$$

Переобозначим $\boxed{\gamma = \frac{Y}{X}, \quad z = \frac{X}{\alpha}}$.

$(*)$ $\boxed{\gamma z = \operatorname{ch} z}$ — надо решить по z



Не при всех γ решения есть.

Касание при $\gamma = \gamma_0$

$$\begin{cases} \gamma_0 = \operatorname{sh} z \\ \gamma_0 z = \operatorname{ch} z \end{cases} \leftarrow \text{уравнения на } z_0$$

$$\boxed{\operatorname{th} z_0 = \frac{1}{z_0}}$$

Численно решается: $\boxed{z_0 = 1{,}199678\ldots}$

При этом $\boxed{\gamma_0 = \operatorname{sh} z_0 = 1{,}509\ldots = \frac{Y}{X}}$

Начиная с такого отношения $\frac{Y}{X}$ есть фигура min площади

$\gamma > \gamma_0$ — 2 решения уравнения $(*)$

Какое верное?

Проведем численный эксперимент

$\boxed{Y = 2 \; , \; X = 1 \quad \Rightarrow \gamma = 2 > \gamma_0}$

2 корня $\quad z_1 = 0{,}589\ldots , \quad \alpha_1 = \frac{X}{z_1} = \frac{1}{z_1} = 1{,}697$

$z_2 = 2{,}127\ldots , \quad \alpha_2 = \frac{1}{z_2} = 0{,}470$

Площади поверхностей

$S_1 = 23{,}97 \qquad \alpha_1 = y_1(0) = 1{,}697$

$S_2 = 27{,}38 \qquad \alpha_2 = y_2(0) = 0{,}470$

Боковая пов-сть цилиндра $S_{бок} = 2\pi Y \cdot 2X = 8\pi \cong 25{,}1$

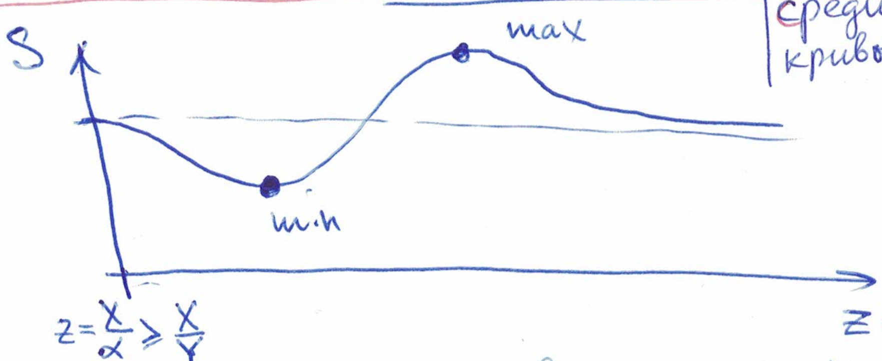
Площадь донышек: $S_{2\,дна} = 2(\pi Y^2) = 8\pi \cong 25{,}13$

Получили такое изменение площадей

	$\alpha = y(0) = Y = 2$	$\alpha = 1{,}697$	$\alpha = 0{,}470$	$\alpha = 0$
$S=$	25,13	23,97	27,38	25,13

это min

это max среди семейства кривых $y = \alpha \operatorname{ch} \frac{x}{\alpha}$



При уменьшении γ вплоть до $\gamma_0 = 1{,}509$ min и max сходятся и при $\gamma = \gamma_0$ min пропадает $\Rightarrow$ пленка лопается!