R-матрицы и инварианты зацеплений

§ 1 Представления Бурау (Werner Burau)

Какие представления группы кос, помимо тривиального одномерного $g_i \mapsto x$, $x \in \mathbb{C}^\times$, мы знаем?

Представление B_n (точнее, S_n) перестановками набора n элементов:

Элементами набора у нас будут базисные векторы n-мерного пространства V: v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Действие перестановки $\pi \in S_n$:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix} \qquad v_i \xrightarrow{\pi} v_{\pi(i)}$$

Матрицы элементарных перестановок σ_j в базисе $\{v_i\}$ имеют вид

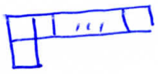
$$\sigma_j = (j, j+1) \longmapsto \begin{array}{c} \begin{array}{cc} j & j+1\text{-е столбцы} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & 0 & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ j \\ j+1\text{-е строки} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Это представление приводимо.

Одномерное тривиальное под-представление (отвечает диаграмме ) действует на векторе

n клеток

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} v_i \quad : \quad \sigma_j \omega = \omega .$$

$(n-1)$-мерное неприводимое под-представление, отвечающее диаграмме , действует на подпространстве с базисом $\tilde{v}_i = v_i - v_n$, $i=1,2,\dots,n-1$.

Вернер Бурау (1936) ввел дополнительный параметр в это представление B_n (уже не S_n):

$$b_i \longmapsto \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & & & 0 \\ \hline & 1-t & t & \\ & 1 & 0 & \\ \hline 0 & & & I_{n-i-1} \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ i \\ i+1 \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad\quad i & i+1 \end{array} & \end{array} \qquad (1a)$$

Здесь I_k – единичная матрица размера $k\times k$.

У матриц, представляющих b_i, 2 разных собственных значения: 1 и $-t$, поэтому изменением масштаба можно свести представление Бурау к представлению алгебры Ивахори-Гекке $H_n(q)$:

$$\mathrm{Burau}_n: \quad g_i \longmapsto \left(\begin{array}{c|cc|c} q\cdot I_{i-1} & & & 0 \\ \hline & \lambda & x & \\ & x^{-1} & 0 & \\ \hline 0 & & & q\cdot I_{n-i-1} \end{array}\right), \quad \lambda := q - \frac{1}{q}, \quad q, x \in \mathbb{C}^{\times} \qquad (1в)$$

Здесь второй параметр x устраняется преобразованием подобия. Он вводится для удобства дальнейших построений.

Упражнение 1 а) Убедитесь, что (1в) задает представление алгебры $H_n(q)$ /Достаточно рассмотреть случай $n=3$/

б) Определите неприводимые компоненты представления Бурау. Убедитесь:

$$\mathrm{Burau}_n = \underbrace{\boxed{\;|\;\ldots\;|\;}}_{n \text{ клеток}} \oplus \boxed{\;|\;\ldots\;|\;}$$

§2 R-матричные представления B_n

Пока мы построили представления B_n в пространствах малых размерностей ($\dim V = n$), поэтому и запас неприводимых компонент в них беден. Чтобы поймать больше разных представлений надо увеличить размерность пространств представлений. Давайте переставлять не отдельные элементы множеств, а линейные пространства. Рассмотрим

$$\boxed{W = V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{n \text{ раз}} = V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_n}$$

ввели нумерацию пространств в тензорном произведении. $V_i \cong V \;\; \forall i$

В этих пространствах действуют операторы перестановки:

$$\boxed{P \in \mathrm{Aut}(V\otimes V): \ P(u\otimes v) = v\otimes u \quad \forall u, v \in V}$$

По этому оператору строим его "копии" P_i, действующие в компонентах $V_i \otimes V_{i+1}$ пространства W:

$$\boxed{P_i \in \mathrm{Aut}(W): \quad P_i := \mathrm{Id}_{V^{\otimes(i-1)}} \otimes \underbrace{P}_{\text{действует в } V_i\otimes V_{i+1}} \otimes \mathrm{Id}_{V^{(n-i-1)}}}$$

Иногда P_i обозначают $P_{i\,i+1}$, чтобы явно указать, векторы каких пространств переставляются

Отображение

$$\sigma_i \longmapsto P_i$$

является представлением симметрической группы

$$S_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(W)$$

Упражнение 2. Проверьте, что это действительно так

Пример: Рассмотрим 2-мерное пространство V с базисом $\{v_1, v_2\}$. В $V\otimes V$ индуцируется базис:

$$\{v_1\otimes v_1, \ v_1\otimes v_2, \ v_2\otimes v_1, \ v_2\otimes v_2\}$$

элементы которого мы будем обозначать мульти-индексами: $\{v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}\}$

В этом базисе P имеет матрицу:

$$P = P_1 \,(= P_{12}) = \begin{array}{c|cccc} & 11 & 12 & 21 & 22 \\ \hline 11 & & & & \\ 12 & & & & \\ 21 & & & & \\ 22 & & & & \end{array}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\! \quad \begin{array}{c} \\ 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Она имеет блочный вид. Компоненты разложения ее на неприводимые представления S_2 указаны.

Попробуем ввести параметры в P по примеру Бурау: заменим 2×2 блок в P на 2×2 блок из (1Б) и изменим масштаб 1×1 блоков с тем, чтобы у получившейся матрицы было 2 разных собственных значения: q и $-q^{-1}$.

$$R = \begin{array}{c} \\ 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 11 & 12 & 21 & 22 \end{array} \\ \begin{bmatrix} q & & & \\ & q-\frac{1}{q} & x & \\ & x^{-1} & & \\ & & & q \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2)$$

Получившийся оператор $R \in \mathrm{Aut}(V\otimes V)$, $\dim V = 2$ имеет спектр $\mathrm{Spec}\, R = \{q^{\#3}, -\frac{1}{q}\}$. Он также удовлетворяет соотношению

$$\boxed{\begin{gathered} R_1 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_2, \text{ где} \\ R_1, R_2 \in \mathrm{Aut}(V^{\otimes 3}),\ R_1 = R \otimes \mathrm{Id}_V \\ R_2 = \mathrm{Id}_V \otimes R \end{gathered}} \qquad (3)$$

<u>Упражнение 3</u> Убедитесь в справедливости соотношений (3) для оператора (2)

Поэтому с использованием R (2) можно построить серию представлений

$$\boxed{\begin{aligned} &B_n \xrightarrow{\rho_R} \mathrm{Aut}(V^{\otimes n}) \\ &b_i \xmapsto{\rho_R} R_i := \mathrm{Id}_{V^{\otimes(i-1)}} \otimes R \otimes \mathrm{Id}_{V^{\otimes(n-i-1)}} \end{aligned}} \quad (4)$$

<u>Def:</u> Матрица $R \in \mathrm{Aut}(V^{\otimes 2})$, удовлетворяющая соотношениям (3), называется <u>R-матрицей</u>. Соотношения (3) при этом принято называть <u>уравнениями Янга-Бакстера</u>, или <u>соотношением кос</u>. По всякой R-матрице можно построить представление группы кос B_n (4) называемое <u>R-матричным</u>.

Если дополнительно R-матрица имеет минимальный многочлен вида

$$\boxed{(R - q\,\mathrm{Id}_{V^{\otimes 2}})(R + q^{-1}\mathrm{Id}_{V^{\otimes 2}}) = 0}, \quad (5)$$

то R-матрица называется <u>гекковской</u>, а порождаемое ей R-матричное представление, является представлением алгебры Гекке $H_n(q)$.

R-матрица (2) является гекковской.

Rem: Отличительные особенности R-матричных представлений B_n:

а) локальность: $\rho_R(b_i)$ действует нетривиально лишь в компонентах $V_i \otimes V_{i+1}$ пространства $V^{\otimes n}$

б) однородность: все $\rho_R(b_i)$ строятся с помощью одной и той же R.

Существуют обобщения R-матричных представлений, где эти условия ослабляются. Они строятся с помощью "динамических" R-матриц.

Rem: В определении R-матрицы подчеркивается, что R — это матрица, а не оператор. Дело в том, что преобразования подобия $R \mapsto URU^{-1}$, вообще говоря, не совместны с уравнением Янга-Бакстера (3). Поэтому свойство $R \in \mathrm{Aut}(V^{\otimes 2})$ быть R-матрицей зависит от выбора базиса в $V^{\otimes 2}$. Уравнения Янга-Бакстера сохраняются при ограниченном классе преобразований подобия:

$$\boxed{R_{12} \longmapsto X_1 X_2 R_{12} (X_1 X_2)^{-1}} \quad (6)$$

называемых калибровочными преобразованиями. Здесь $X \in \mathrm{Aut}(V)$ — связана с заменой базиса в V, $X_1 := X \otimes \mathrm{Id}_V$, $X_2 = \mathrm{Id}_V \otimes X$, так что $X_1 X_2 = X \otimes X$ — согласованная замена базиса в обеих компонентах V пространства $V \otimes V$.

В заключение параграфа предъявим обобщение R-матрицы (2) на случай пространств V большей размерности:

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{N} q\, e_{ii}\otimes e_{ii} + \sum_{i\neq j=1}^{N} x_{ij}\, e_{ij}\otimes e_{ji} + \lambda \sum_{1\le i<j\le N} e_{ii}\otimes e_{jj} \\ &\text{где } \lambda := q - \tfrac{1}{q}, \quad x_{ij}x_{ji} = 1 \ \forall i,j. \end{aligned}} \qquad (7)$$

Такие R-матрицы называют (каноническими) R-матрицами Дринфельда-Джимбо (Drinfeld-Jimbo). Они связаны с квантовыми группами серии $GL_q(N)$. Здесь $e_{ij} \in End(V)$ — уже упоминавшиеся матричные единицы — матрицы размера $N\times N$ ($\dim V = N$), у которых на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит единица, а все остальные — нули. При этом $e_{ij}\otimes e_{kl}$ — матрица размера $N^2\times N^2$, у которой единственная единица стоит на пересечении строки с индексом ik и столбца с индексом jl.

Поскольку матрица R (7) состоит из 1×1 блоков $\begin{array}{c|c} & ii \\ \hline ii & q \end{array}$ и 2×2 блоков $\begin{array}{c} \\ ij \\ ji \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} ij & ji \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda & x_{ij} \\ \frac{1}{x_{ij}} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$, $i<j$, то она, очевидно, гекковская.

Для проверки соотношений Янга-Бакстера для неё заметим, что матрицы R_1 и R_2 в в пространстве $V^{\otimes 3}$ действуют инвариантно на подпространствах размерностей 1, 3 и 6.

У них 1×1 блоки на пересечении строк и столбцов с индексом "iii";

3×3 блоки на пересечении строк и столбцов с индексами $\{iij, iji, jii\}$, $i\neq j$;

6×6 блоки на пересечении строк и столбцов с индексами $\{ijk, jik, jki, kji, ikj, kij\}$ $i<j<k$.

Поэтому уравнение Янга-Бакстера для R-матриц (7) можно проверять отдельно в 1×1, 3×3 и 6×6 блоках, причем в каждом из этих блоков оно выглядит универсально, вне зависимости от выбора индексов i, j, k.

Представим R_1 и R_2 в 6×6 блоке для $i=1$, $j=2$, $k=3$:

$$R_1 = \begin{array}{c|cccccc} & 123 & 213 & 231 & 321 & 132 & 312 \\ \hline 123 & \lambda & x_{12} & & & & \\ 213 & 1/x_{12} & 0 & & & 0 & \\ 231 & & & \lambda & x_{23} & & \\ 321 & & & 1/x_{23} & 0 & & \\ 132 & & 0 & & & \lambda & x_{13} \\ 312 & & & & & 1/x_{13} & 0 \end{array}$$

$$R_2 = \begin{array}{c|cccccc} & 123 & 213 & 231 & 321 & 132 & 312 \\ \hline 123 & \lambda & & & & x_{23} & \\ 213 & & \lambda & x_{13} & & & \\ 231 & & 1/x_{13} & 0 & & & \\ 321 & & & & 0 & & 1/x_{12} \\ 132 & 1/x_{23} & & & & 0 & \\ 312 & & & & x_{12} & & \lambda \end{array}$$

Упражнение 4: Проверьте, что выше приведенные матрицы R_1 и R_2 удовлетворяют уравнению Янга–Бакстера. Проверьте то же самое для 3×3 блоков $\{iij, iji, jii\}$.

Упражнение 5* Убедитесь, что матрица

a) $$\boxed{R = \sum_{i=1}^{N+M} \varepsilon_i q^{\varepsilon_i} e_{ii}\otimes e_{ii} + \sum_{i\neq j=1}^{N+M} (-1)^{\frac{(1-\varepsilon_i)(1-\varepsilon_j)}{4}} e_{ij}\otimes e_{ji} + \lambda \sum_{1\le i<j\le N+M} e_{ii}\otimes e_{jj}} \qquad (7b)$$

является гекковской R-матрицей. $\boxed{\varepsilon_i = \begin{cases} +1, & i=1\dots N \\ -1, & i=N+1\dots N+M \end{cases}}$

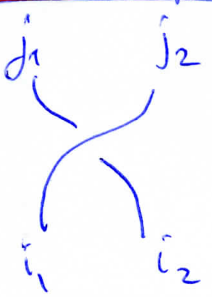
Эти R-матрицы связаны с квантовыми супергруппами $GL_q(N,M)$ (Кулиш П.П., Склянин Е.К. 1980)

Rem: В отличие от представления Burau (1б) в R-матричном представлении (7) не все параметры x_{ij} можно устранить калибровочным преобразованием (6).

Rem: При фиксированном $\dim V = N$ всякое R-матричное представление $H_n(q) \xrightarrow{\rho_R} \mathrm{Aut}(V^{\otimes n})$, начиная с некоторого n имеет нетривиальное ядро, т.е. не является точным: $n! > N^{2n}$ при $n\to\infty$.

§3 Косо обратимые R-матрицы.

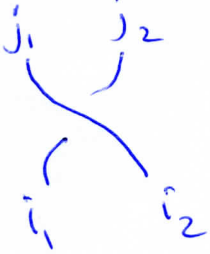
Представим R-матрицу $R \in \mathrm{Aut}(V\otimes V)$ картинкой

R : 

$= R^{j_1 j_2}_{i_1 i_2}$. (8a)

Здесь $i_1 i_2 / j_1 j_2$ — мульти-индекс столбца/строки R-матрицы; i_1, j_1 — матричные индексы первого пространства V_1, $i_2 j_2$ — второго пространства V_2 $(V^{\otimes 2} = V_1 \otimes V_2)$

R^{-1} естественно нарисовать так:

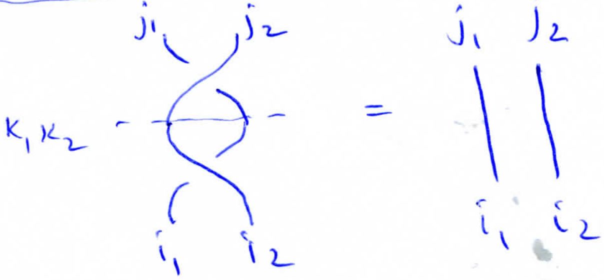
R^{-1} : 

$= (R^{-1})^{j_1 j_2}_{i_1 i_2}$ (8б)

Тогда формула

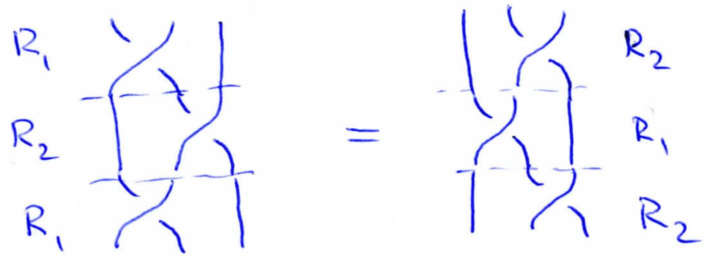
$$R \cdot R^{-1} = \mathrm{Id}_{V^{\otimes 2}} \; : \quad \sum_{k_1,k_2=1}^{N} R^{j_1 j_2}_{k_1 k_2} (R^{-1})^{k_1 k_2}_{i_1 i_2} = \delta^{j_1}_{i_1} \delta^{j_2}_{i_2}$$

представляется так:



что соответствует 2-му движению Рейдемейстера при изотопических преобразованиях узлов/зацеплений.

Третьему движению Рейдемейстера соответствует уравнение Янга-Бакстера (3):



Для того, чтобы обеспечить применение R-матриц в теории инвариантов узлов/зацеплений, надо еще найти аналог 1-го движения Рейдемейстера в виде формулы для R-матриц. С этой целью мы рассмотрим обращение R-матриц не в вертикальном, а в горизонтальном направлении, то есть не по паре индексов $(j_1 j_2)$, а по паре $(i_2 j_2)$.

Def: Назовём R-матрицу R_{12} косо-обратимой если существует матрица Ψ^R_{12}, такая что

$$\boxed{Tr_{(2)} R_{12} \Psi^R_{23} = Tr_{(2)} \Psi^R_{12} R_{23} = P_{13}} \qquad (9)$$

Здесь символ $Tr_{(2)}$ означает взятие следа для матричных индексов пространства V_2:

$$Tr_{(2)} R_{12} \Psi^R_{23} = \sum_{i_2, j_2 = 1}^{N} R^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} \, \Psi^{R\, i_2 j_3}_{j_2 i_3} = \delta^{j_3}_{i_1} \delta^{j_1}_{i_3} = P_{13}$$

P_{13} – матрица оператора перестановки

Ψ^R_{12} называется <u>косо-обратной матрицей</u> для матрицы R.

Зафиксируем еще обозначения

$$\boxed{C^R_2 := Tr_{(1)}\,\Psi^R_{12}\ , \quad D^R_1 := Tr_{(2)}\,\Psi^R_{12}} \qquad (10)$$

или в индексах:

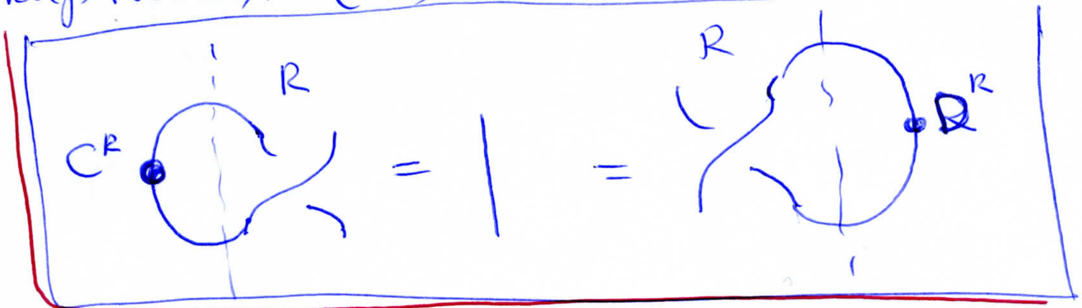
$$(C^R)^{j_2}_{i_2} = \sum_{i_1} (\Psi^R)^{i_1 j_2}_{i_1 i_2}\ , \quad (D^R)^{j_1}_{i_1} = \sum_{i_2} (\Psi^R)^{j_1 i_2}_{i_1 i_2}$$

Ключевое свойство матриц $C^R, D^R \in Aut(V)$:

$$\boxed{Tr_{(1)}\, C^R_1 R_{12} = I_2\ , \quad Tr_{(2)}\, D^R_2 R_{12} = I_1} \qquad (11)$$

Здесь $I_{2/1}$ – единичный оператор в пространстве $V_{2/1}$.

В картинках (11) выглядит так:



(11a)

что похоже на 1-е движение Рейдемейстера.

<u>Доказательство (11)</u>: Возьмем $Tr_{(1)}$ от правого соотношения в (9):

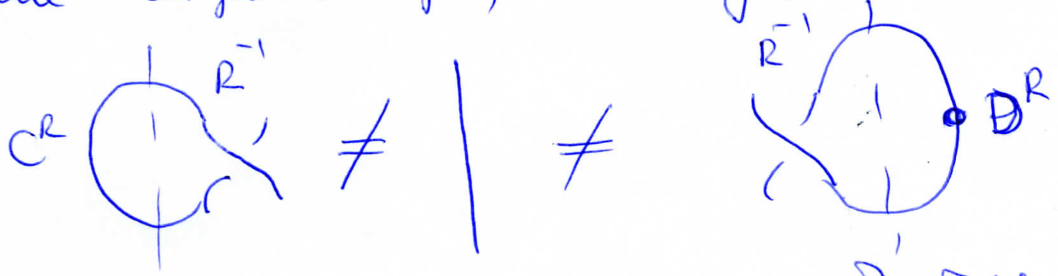
$$Tr_{(1)}\left(Tr_{(2)}\,\Psi^R_{12} R_{\cancel{1}23}\right) = Tr_{(2)}\, C^R_2 R_{\cancel{1}23}$$

С другой стороны:

$$\boxed{Tr_{(1)}\, P_{13} = I_3} \longrightarrow (11)$$

∎

Rem: (11a) — это еще не вполне 1-е движение Рейдемейстера, поскольку, вообще говоря



С этим нам еще предстоит разобраться.

Упражнение 6. Докажите, что если R — кособратимая матрица, то свойства (11) однозначно фиксируют матрицы C^R и D^R.

Следующее утверждение даёт связь между Ψ^R и R^{-1}:

Утверждение 1 Если R — косо-обратимая R-матрица, то выполнены соотношения:

$$\boxed{\begin{aligned} C_1^R\Psi_{12}^R &= R_{21}^{-1}C_2^R, \quad & \Psi_{12}^R C_1^R &= C_2^R R_{21}^{-1} \\ D_2^R\Psi_{12}^R &= R_{21}^{-1}D_1^R, \quad & \Psi_{12}^R D_2^R &= D_1^R R_{21}^{-1} \end{aligned}} \tag{12}$$

Доказательство: Используем соотношение Янга-Бакстера в виде

$$R_{12}^{\varepsilon} R_{23} R_{12}^{-\varepsilon} = R_{23}^{-\varepsilon} R_{12} R_{23}^{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

Домножим слева на $\Psi_{01}^R\Psi_{34}^R$ и вычислим $\mathrm{Tr}_{(1,3)}$:

$$\mathrm{Tr}_{(1)}\Psi^R_{01}R^{\varepsilon}_{12}\left(\mathrm{Tr}_{(3)}\Psi^R_{34}R_{23}\right)R^{-\varepsilon}_{12} = \mathrm{Tr}_{(3)}\Psi^R_{34}R^{-\varepsilon}_{23}\left(\mathrm{Tr}_{(1)}\Psi^R_{01}R_{12}\right)R^{\varepsilon}_{23}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{Tr}_{(1)}\Psi^R_{01}R^{\varepsilon}_{12}P_{24}R^{-\varepsilon}_{12} = \mathrm{Tr}_{(3)}R^{-\varepsilon}_{23}P_{02}R^{\varepsilon}_{23}\Psi^R_{34}$$

переставили Ψ^R_{34} по циклу под знаком $\mathrm{Tr}_{(3)}$

Вычислим от получившейся формулы следы $\mathrm{Tr}_{(0)}$ или $\mathrm{Tr}_{(4)}$:

$$\mathrm{Tr}_{(0)}:\quad \boxed{\mathrm{Tr}_{(1)}C^R_1R^{\varepsilon}_{12}P_{24}R^{-\varepsilon}_{12} = C^R_4 I_2}$$

$$\mathrm{Tr}_{(4)}:\quad \boxed{\mathrm{Tr}_{(3)}R^{-\varepsilon}_{23}P_{02}R^{\varepsilon}_{23}D^R_3 = D^R_0 I_2} \qquad (*)$$

При вычислении мы опять воспользовались формулой для следов от оператора перестановки

$$\boxed{\mathrm{Tr}_{(1)}P_{12} = I_2 = \mathrm{Tr}_{(3)}P_{23}},$$

и учли определения C^R и D^R.

Домножим первое из соотношений (*) на P_{24} справа и учтём свойство оператора перестановки:

$$\boxed{M_1P_{12} = P_{12}M_2\,,\quad M_2P_{12} = P_{12}M_1,}$$

где M – любой оператор $\in \mathrm{End}(V)$.

Получим:

$$\boxed{\mathrm{Tr}_{(1)}C^R_1R^{\varepsilon}_{12}R^{-\varepsilon}_{14} = C^R_4P_{24}} \qquad (**)$$

В случае $\varepsilon=+1$ домножим последнее равенство на Ψ^R_{23} справа и вычислим $Tr_{(2)}$:

$$Tr_{(1)} C^R_1 \left(Tr_{(2)} R_{12} \Psi^R_{23}\right) R^{-1}_{14} = C^R_4 \left(Tr_{(2)} \Psi^R_{43} P_{24}\right)$$

$$Tr_{(1)} C^R_1 P_{13} R^{-1}_{14} = C^R_4 \Psi^R_{43}$$

В левой части переставляем R^{-1}_{14} под знаком $Tr_{(1)}$ по циклу налево, а затем, переставляем $R^{-1}_{14} C^R_1$ направо через P_{13}. Получаем

$$Tr_{(1)} P_{13} \quad R^{-1}_{34} C^R_3 = C^R_4 \Psi^R_{43}$$

$$\underline{R^{-1}_{34} C^R_3 = C^R_4 \Psi^R_{43}}\,,$$ — левое соотношение из первой строки в (12). Правое соотношение из этой строки получается, если, взяв $\varepsilon=-1$, домножить (**) на Ψ^R_{43} и вычислить $Tr_{(3)}$.

Соотношения из второй строки в (12) получается, если аналогичным образом преобразовать второе соотношение в (*) ▨

Следствие 2: В условиях Утв. 1:

$$\boxed{C^R D^R = D^R C^R}$$

Док-во: Примените $Tr_{(2)}$ к двум верхним соотношениям в (12). ▨

Следствие 3: В условиях Утв. 1:

$$\boxed{[R_{12}, C^R_1 C^R_2] = [R_{12}, D^R_1 D^R_2] = 0} \quad (13)$$

Доказательство: $\underbrace{R^{-1}_{12} C^R_1} C^R_2 = C^R_2 \underbrace{\Psi^R_{21} C^R_2} = C^R_2 C^R_1 R^{-1}_{12} = C^R_1 C^R_2 R^{-1}_{12}$. — мы использовали соотношения 1-й строки (12). Вторая строка (12) даст коммутативность R^{-1}_{12}, а следовательно и R_{12}, с $D^R_1 D^R_2$ ▨

Def: Косо-обратимая R-матрица R называется *строго косо-обратимой*, если хотя бы одна из матриц C^R, D^R обратима.

Корректность этого определения подтверждается

Утверждением 4: Следующие утверждения равносильны:

a) R — строго-косо-обратимая R-матрица

б) R и R^{-1} — косо-обратимы.

Если а) или б) выполнены, то C^R и D^R обе обратимы, причём

$$\boxed{C^{R^{-1}} = (D^R)^{-1}, \quad (D^{R^{-1}}) = (C^R)^{-1}} \qquad (14)$$

Доказательство: Докажем а) $\Rightarrow$ б)

$$\mathrm{Tr}_{(2)} R_{12} \Psi^R_{23} = P_{13}$$

Домножаем на D^R_3 справа, применяем в левой части (12)

$$\mathrm{Tr}_{(2)} \underbrace{R_{12} D^R_2}\ R^{-1}_{32} = D_1 P_{13}$$

цикл

Домножаем обе части на $(D_1^R)^{-1}$ — тут используем предположение <u>строгой</u> косо-обратимости R с обратимой D^R; в левой части под знаком $Tr_{(2)}$ проносим по циклу $(D_1^R)^{-1} R_{12} D_2^R$:

$$Tr_{(2)} R^{-1}_{32} \left((D_1^R)^{-1} R_{12} D_2^R \right) = P_{13}$$

Это соотношение свидетельствует о косо-обратимости R^{-1} и даёт формулу

$$\Psi^{R^{-1}}_{12} = (D_2^R)^{-1} R_{21} D_1^R$$

$$\Downarrow$$

$$D_2^R \Psi^{R^{-1}}_{12} = R_{21} D_1^R$$

Применяя $Tr_{(1)}$ получаем: $\Downarrow$

$$\boxed{D^R C^{R^{-1}} = Id_V}$$

Докажем б) => а)

$$Tr_{(2)} \Psi^R_{12} R_{23} = P_{13}$$

Домножаем на C_1^R слева и применяем (12)

$$Tr_{(2)} R^{-1}_{21} C_2^R R_{23} = P_{13} C_3^R$$

Домножаем на $\Psi^{R^{-1}}_{10}$ и вычисляем $Tr_{(1)}$ — тут используем предположение косо-обратимости R^{-1}:

$$Tr_{(2)} P_{20} \underbrace{C_2^R R_{23}}_{\text{по циклу под знаком } Tr_{(2)}} = Tr_{(1)} P_{13} \Psi^{R^{-1}}_{30} C_3^R$$

$$\Downarrow$$

$$C_0^R R_{03} = \Psi^{R^{-1}}_{30} C_3^R$$

Применяем $Tr_{(0)}$:

$$\boxed{Id_V = D^{R^{-1}} C^R},$$

откуда, в частности, следует строгая косо-обратимость R.

Мы намеренно провели доказательства а) => б) и б) => а) так, чтобы получились обе формулы (14). Отсюда следует, что: обратимость $D^R \Leftrightarrow$ обратимость C^R. Рассуждение а) => б) можно провести и в предположении обратимости C^R (попробуйте) ▨

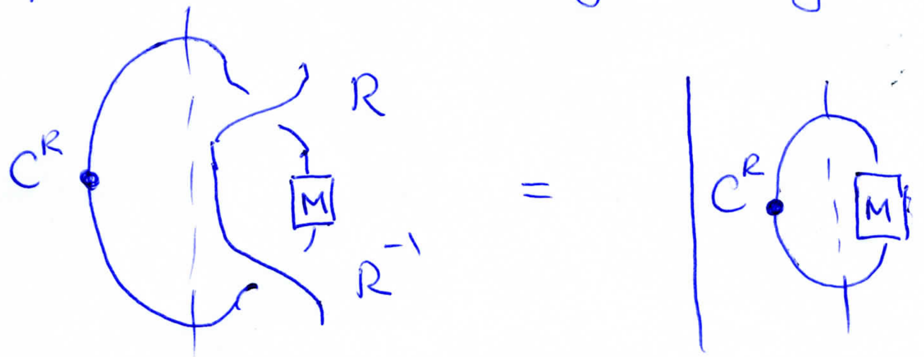
Утверждение 5: Пусть $M \in Mat_N(U)$, где U — произвольное линейное пространство, то есть, M — матрица размера $N \times N$, чьи компоненты $\in U$. Пусть R — косо-обратимая R-матрица. Тогда

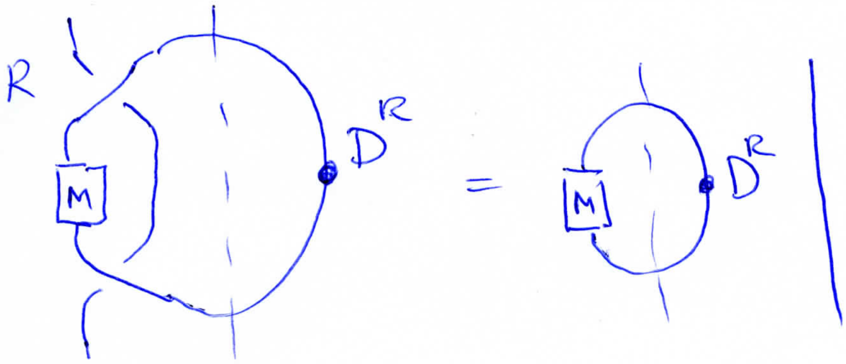
$$\boxed{\begin{aligned} Tr_{(1)} C^R_1 R^{\varepsilon}_{12} M_2 R^{-\varepsilon}_{12} &= I_2 \, Tr(C^R M) \\ Tr_{(2)} D^R_2 R^{\varepsilon}_{12} M_1 R^{-\varepsilon}_{12} &= I_1 \, Tr(D^R M) \end{aligned}} \quad (15)$$

Доказательство: Будем использовать формулы (*) со стр. 15:

Умножение 1-й / 2-й формулы на M_4 / M_0 и вычисление $Tr_{(4)} / Tr_{(0)}$ даёт соотношения (15) ▨

Соотношения (15) имеют графическую интерпретацию, аналогичную 2-му движению Рейдемейстера:





Эти соотношения нам пригодятся в дальнейшем при изучении структуры квантовых матричных алгебр.

Утверждение 6. Пусть R – строго косо-обратимая гекковская R-матрица. Тогда:

$$\boxed{\begin{aligned} D^R &= (1 - \lambda \operatorname{Tr} D^R)\, D^{R^{-1}} \\ C^R &= (1 - \lambda \operatorname{Tr} C^R)\, C^{R^{-1}} \end{aligned}} \tag{16}$$

$$\boxed{\operatorname{Tr} D^R = \operatorname{Tr} C^R} \tag{17}$$

Доказательство: Для проверки (16) надо вычислить $\operatorname{Tr}_{(1)} C^R \ldots$ или $\operatorname{Tr}_{(2)} D^R$ от соотношения $R^{-1}_{12} = R_{12} - \lambda I_{12}$.

Соотношение (17) следует из (16) и (14) ▨

Rem: При калибровочных преобразованиях R-матрицы $R_{12} \mapsto (X_1X_2)R_{12}(X_1X_2)^{-1}$ C^R и D^R ведут себя:

$$C^R \mapsto XC^RX^{-1}, \quad D^R \mapsto XD^RX^{-1}, \quad X \in Aut(V)$$

поэтому C^R и D^R могут рассматриваться как операторы $C^R, D^R \in Aut(V)$

Пример: Для Дринфельд-Джимбовской R-матрицы (7) вычисляем

$$\boxed{\begin{aligned}
\Psi^R &= q^{-1}\sum_{i=1}^N e_{ii}\otimes e_{ii} + \sum_{i\neq j}\frac{1}{x_{ij}}\, e_{ij}\otimes e_{ji} - \sum_{i<j}\frac{q-1/q}{q^{2(j-i)}}\, e_{ii}\otimes e_{jj} \\
C^R &= \sum_i \frac{1}{q^{2i-1}}\, e_{ii} = \mathrm{diag}\{q^{-1}, q^{-3}, \dots, q^{-2N+1}\} \\
D^R &= \sum_i \frac{1}{q^{2N-2i+1}}\, e_{ii} = \mathrm{diag}\{q^{-2N+1}, \dots, q^{-3}, q^{-1}\} \\
\mathrm{Tr}\, C^R &= \mathrm{Tr}\, D^R = \frac{[N]_q}{q^N}, \\
D^{R^{-1}} &= q^{2N} D^R, \quad C^{R^{-1}} = q^{2N} C^R
\end{aligned}} \qquad (18)$$

Упражнение 7*. Вычислите Ψ^R, D^R, C^R для R-матрицы Кулиша-Скленина из упражнения 5*, стр 10

§4 R-матрицы и инварианты узлов/зацеплений

В этом разделе мы кратко опишем конструкцию инвариантов узлов/зацеплений, использующую R-матричные представления группы кос. Для этого нам потребуются результаты о связи узлов/зацеплений и кос.

<u>Узел</u> — класс изотопий замкнутых кривых без самопересечений в $\mathbb{R}^3$. <u>Зацепление</u> — класс изотопий нескольких замкнутых кривых в $\mathbb{R}^3$ без само- и взаимных пересечений.

Узел/зацепление однозначно определяется <u>регулярной проекцией</u> одной из представляющих его (наборов) кривых в $\mathbb{R}^2$. Регулярными называются проекции, когда в одной точке проекции накладываются не более двух точек исходной кривой, причем для двух пересекающихся в проекции отрезков кривой указывается кто над кем проходит (относительно плоскости проекции).

Регулярные проекции, отвечающие одному узлу/зацеплению, связаны между собой (конечной) последовательностью <u>движений Рейдемейстера (1920г.г)</u>

Напомним эти движения:

I тип:

II тип:

III тип:

На всяком узле/зацеплении можно ввести ориентацию, указав направления движения вдоль его замкнутых кривых. Очевидно, что всякой косе можно сопоставить ориентированный узел/связку:

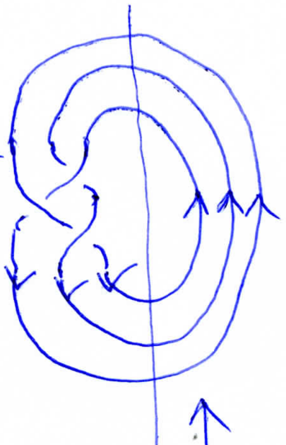
Пример:

Коса $b_2 b_1^{-1} b_2$

Стрелки различают верхние и нижние концы косы

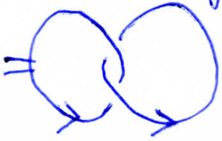
$\longmapsto$

Зацепление



Процедура замыкания косы

=



Зацепление Хопфа

Теорема (Александер, 1928) Всякой ориентированной связке/узлу можно сопоставить замыкание некоторой косы (вообще говоря, не единственным образом).

Мы не будем детально расписывать доказательство. Приведем простейший пример сопоставления

Трилистник:

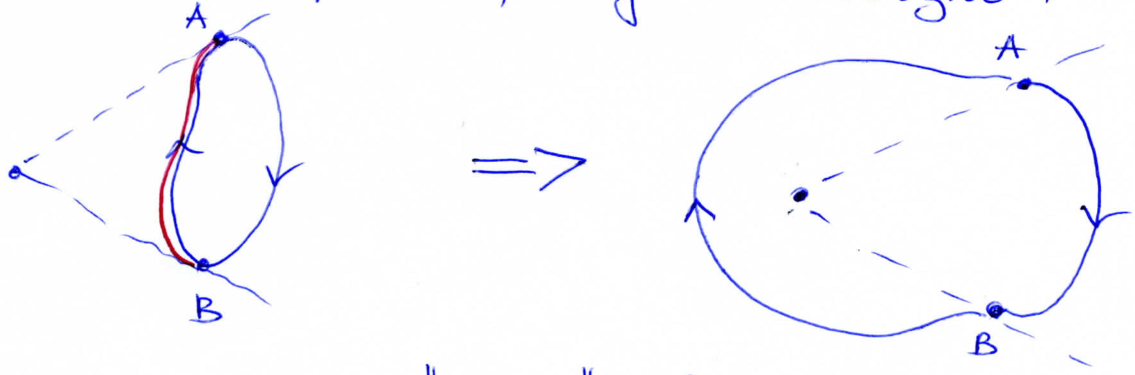
$\Longrightarrow$

= замыкание b_1^3

Отмечаем точку внутри, выпускаем из неё луч и начинаем его вращать, скажем, по часовой стрелке.

Нам повезло, что все линии узла, пересекающие этот луч, ориентированы одинаково — по часовой стрелке. Поэтому мы крутим луч и отмечаем, через какие перекрестья линий он проходит: всегда он пересекается 2-мя линиями, при вращении луча они перекрещиваются 3 раза, причем всякий раз дальняя от начала луча линия проходит над ближней. Соответственно, трилистнику сопоставляется замыкание косы $b_1^3 \in B_2$.

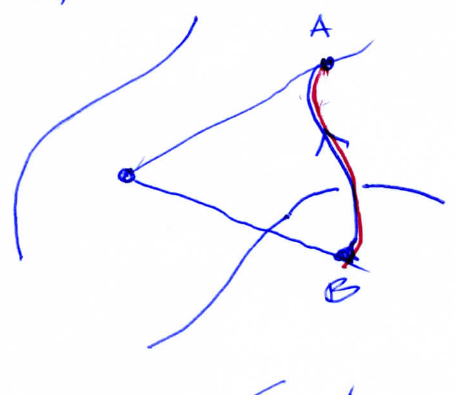
Простейший вариант, когда не повезло:



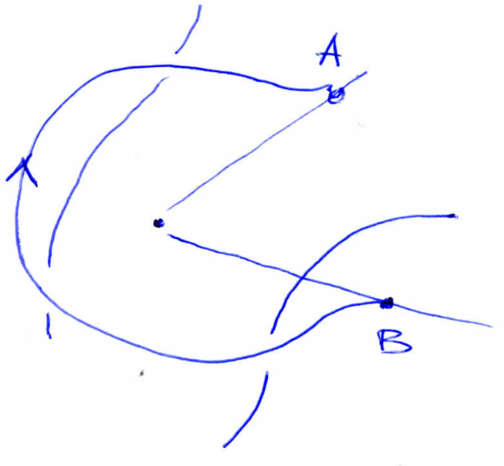
На рисунке сверху "плохо" выбран центр вращающегося луча. В результате 1) число линий, которые его пересекают переменно: 0 или 2 2) линии пересекают луч в разных направлениях. Все это лечится процедурой "перекидывания" плохого (т.е. неправильно направленного — красного) отрезка узла через центр вращения — см. рис. справа.

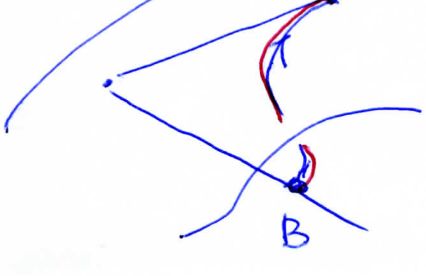
В общем случае, при перекидывании неправильно ориентированного участка узла/зацепления надо учесть положение перекидываемого участка по отношению к остальным, пересекающимся с ним на проекции участкам узла/зацепления.

Правила перекидывания:

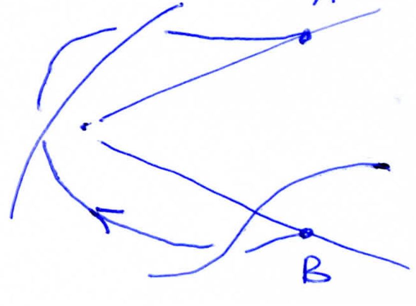


перекидываем => **над** всеми

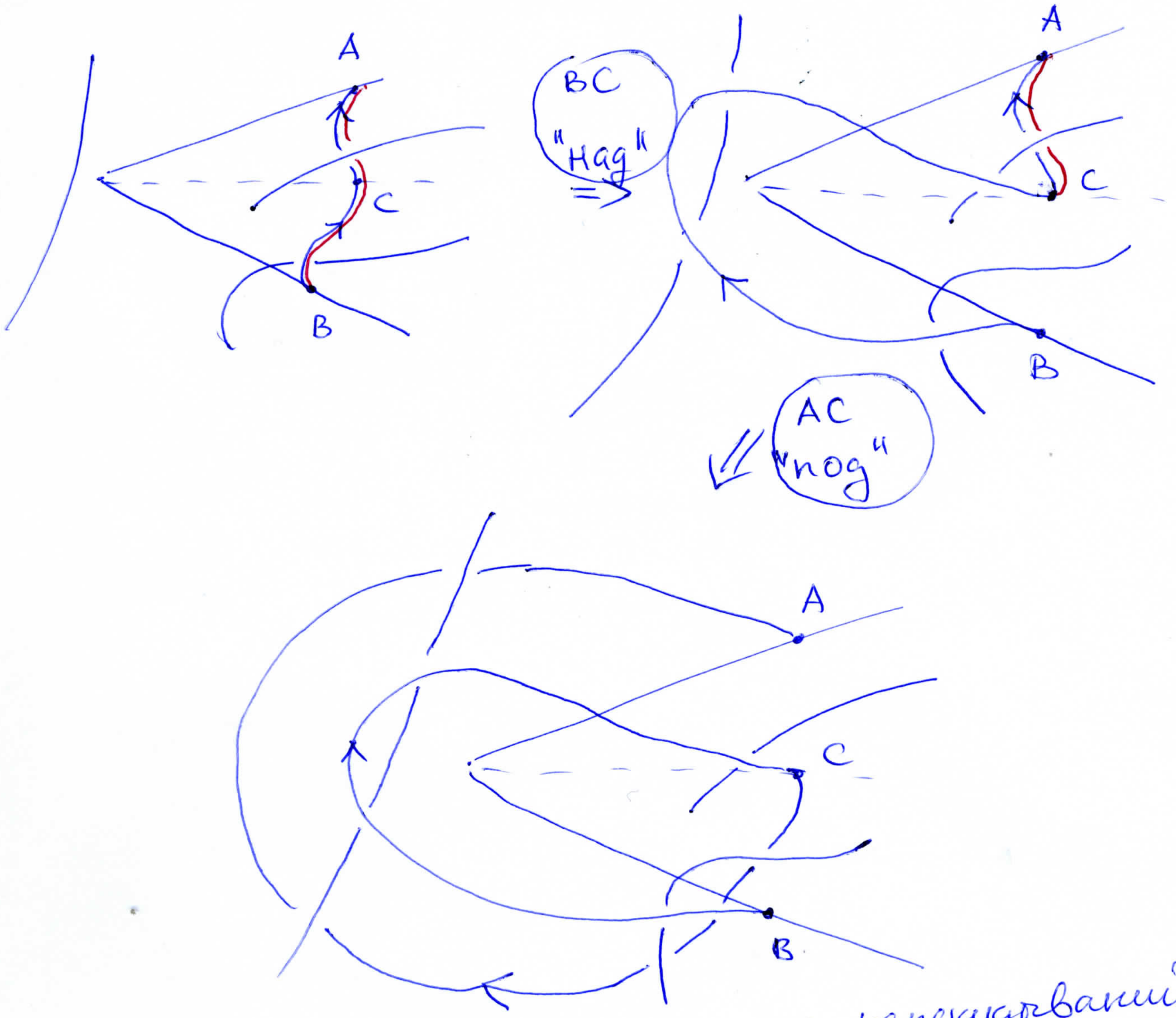




перекидываем => **под** всеми



В более сложных случаях неправильно ориентированный участок приходится разбивать на куски:



Таким образом за конечное число перекидываний удается исправить все неправильно ориентированные куски узла/зацепления.

Представленный метод — подобие предложенного Александером способа восстановления замыкания косы по ориентированному узлу/зацеплению. Он нагляден, но не поддается хорошей алгоритмизации.

Хороший алгоритм восстановления замкнутой косы по узлу/зацеплению был предложен Вожелем (Vogel, 1990)

Описание этого алгоритма можно найти в книге "Теория узлов", Мантуров В.О. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005, глава 9, § 9.2.

или в книге "Группа кос", К. Кассель, В.Г. Тураев, МЦНМО, 2014, глава 2 § 2.4

Сопоставление ориентированному узлу/зацеплению замыкания косы неоднозначно. Семейство замыканий кос, соответствующих одному узлу/зацеплению описывается теоремой А.А. Маркова. Эта теорема, сформулированная в 1936 г., получила детальное доказательство лишь в 1974 г. (J. Birman)

<u>Теорема</u> (Марков) Две косы, замыкание которых даёт один и тот же ориентированный узел/зацепление, связаны конечной последовательностью преобразований 2-х видов (<u>марковских преобразований</u>)

а) <u>сопряжение в B_n</u>: для $\forall x \in B_n$

$$\boxed{x \mapsto a x a^{-1} \quad \forall a \in B_n}$$

б) <u>связь кос из B_n и B_{n+1}</u>

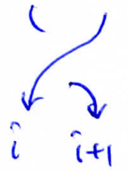
$$\boxed{\forall x \in B_n: \quad x \longleftrightarrow x b_n^{\varepsilon} \in B_{n+1}, \quad \varepsilon = \pm 1}$$

Это преобразование можно производить в обе стороны.

Эту теорему мы приводим без доказательства (см.

Теперь опишем процедуру построения инвариантов узлов/зацеплений по R-матричным представлениям группы кос, предложенную В. Тураевым (1988).

Пусть R — строго косо-обратимая R-матрица гекковского типа. Всякой косе сопоставим её R-матричное представление:

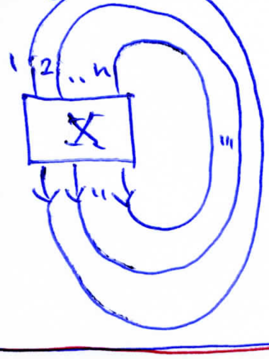


$$= b_i \xmapsto{\rho_R} \varkappa R_i \in \mathrm{Aut}(V^{\otimes n})$$

$$= b_i^{-1} \xmapsto{\rho_R} \frac{1}{\varkappa} R_i^{-1} \qquad (19)$$

Параметр $\varkappa \in \mathbb{C}^{\times}$ — масштабный параметр — мы зафиксируем подходящим образом в дальнейшем.

Замыканию косы $X \in B_n$ мы сопоставим вычисление следующего следа в её R-матричном представлении (19):



$$\longmapsto \underbrace{\frac{1}{\varkappa^n} \mathrm{Tr}_{(1,2,\dots n)} D_1^R D_2^R \dots D_n^R}\, \rho_R(X) \qquad (20)$$

Построенная по рецепту (20) функция уже инвариант движений Рейдемейстера II и III типов (в косе X) — просто потому, что мы используем при ее построении ++представление группы кос++. Если мы хотим, чтобы эта функция была инвариантом узла/зацепления, отвечающего замыканию косы X, надо обеспечить инвариантность этой функции при марковских преобразованиях.

Инвариантность относительно преобразований сопряжения гарантируется циклическим свойством следа, а также свойством коммутативности:

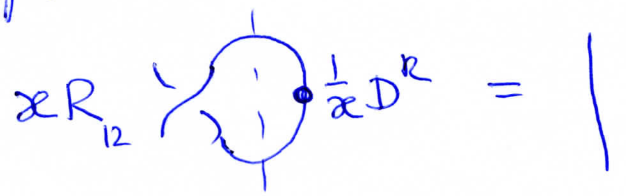
$$\left[D_1^R D_2^R \dots D_n^R ,\ \rho_R(Y)\right] = 0 \quad \forall Y \in B_n,$$

следующим из (13). (стр 16)

Инвариантность при преобразованиях Маркова вида $x \leftrightarrow x b_n$, $x \in B_n$, следует из (11):

$$\left(\frac{1}{\varkappa}\mathrm{Tr}_{(2)} D_2^R\right) \rho_R(b_1) = \cancel{\frac{1}{\varkappa}}\mathrm{Tr}_{(2)} D_2^R \cdot \cancel{\varkappa} R_{12} = I_1,$$

или в картинках:



Инвариантность при преобразованиях Маркова вида $x \leftrightarrow x b_n^{-1}$, $x \in B_n$, обеспечивается выбором $\varkappa$:

$$\left(\frac{1}{\varkappa}\mathrm{Tr}_{(2)} D_2^R\right)\rho_R(b_1^{-1}) = \frac{1}{\varkappa}\mathrm{Tr}_{(2)} D_2^R\, \frac{1}{\varkappa} R_{12}^{-1} =$$

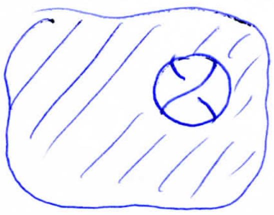
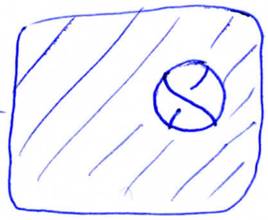
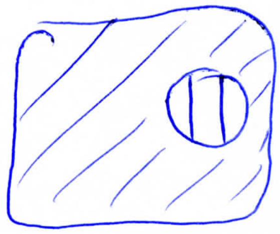
$$= \frac{1}{\varkappa^2}\mathrm{Tr}_{(2)} \underbrace{(1-\lambda \mathrm{Tr} D^R)\, D_2^{R^{-1}}}_{\overset{\shortparallel}{D_2^R}\ (\text{см. } (16))} R_{12}^{-1} = \frac{1-\lambda \mathrm{Tr} D^R}{\varkappa^2}\, I_1$$

требуется: $$\boxed{\varkappa = (1-\lambda \mathrm{Tr} D^R)^{1/2}} \quad (21)$$

С таким выбором $\varkappa$ формулы (19), (20) поставляют нам инварианты узлов/зацеплений.

В случае, когда R — Дринфельд-Джимбовская R-матрица (7), можно выбрать $\boxed{\varkappa = q^{-N}}$ (см. (18))

Обозначим:

$L_+ =$ , $L_- =$ , $L_0 =$ 

три узла/зацепления, отличающиеся друг от друга лишь расположением двух кусков нитей в одном, обозначенном на рисунках месте.

Для узла/зацепления L обозначим $f(L)$ — инвариант, вычисляемый по рецепту (19)–(21).

<u>Утверждение 6.</u> Инвариант $f(L)$ однозначно характеризуется скейн-соотношением (skein relation)

$$\boxed{\frac{1}{\varkappa} f(L_+) - \varkappa f(L_-) = \lambda f(L_0)} \quad (22)$$

и значением на тривиальном узле $\bigcirc$:

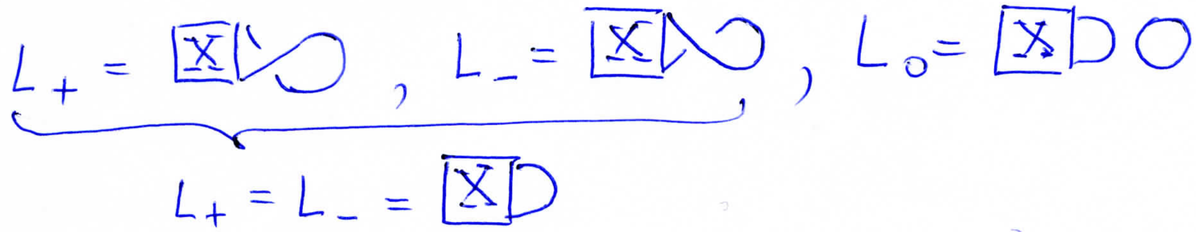
$$\boxed{f(\bigcirc) = \frac{1}{\varkappa}\mathrm{Tr}\, D^R = \frac{1-\varkappa^2}{\lambda\varkappa}} \qquad (23)$$

Доказательство:

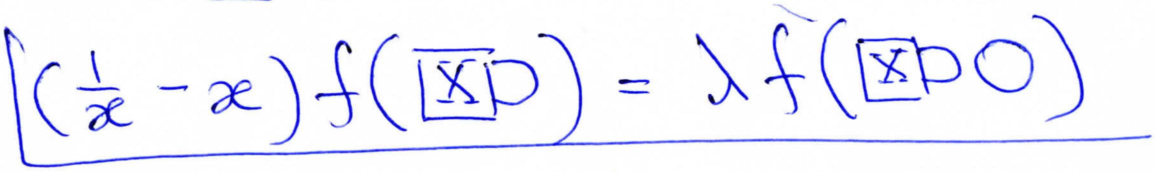
Во-первых, заметим, что соотношения (22) для инварианта f являются следствием условия Гекке на R-матрицу: $R_{12} - R_{12}^{-1} = \lambda I_{12}$.

Значение $f(\bigcirc)$ (23) получается прямым вычислением.

Поясним теперь однозначность задания $f(L)$ с помощью соотношений (22), (23). Соотношения (22) позволяют распутать любой узел/зацепление, то есть свести его к линейной комбинации тривиальных зацеплений: $f(\bigcirc^k)$. Для вычисления последних используем скейн-соотношение для узлов



Имеем:



В частности $f(\bigcirc^{k+1}) = \dfrac{\frac{1}{\varkappa} - \varkappa}{\lambda} f(\bigcirc^k)$,

и с учётом (23) вычисляем

$$\boxed{f(\bigcirc^k) = \left(\frac{1-\varkappa^2}{\lambda\varkappa}\right)^k} \qquad (24)$$

Rem: Инвариант $f(L)$ (22)–(23) (или (19)–(21)) можно считать зависящим от двух независимых параметров $\varkappa$ и q ($\lambda := q - \frac{1}{q}$). Это, с точностью до нормировки, инвариант FYHLMO (Freyd, Yetter, Hoste, Likorish, Millett, Ocneanu, 1985). Как следует из наших построений, — это наиболее общий вид инвариантов узлов/зацеплений, которые можно построить с помощью гекковских R-матриц.

Однопараметрический частный случай: $\lambda = q - q^{-1}$, $\varkappa = q^{-2}$ (с точностью до замены параметра и нормировки). Он является инвариантом Джонса (Jones, 1985). Он строится по Дринфельд-Джимбовской R-матрице (7) в простейшем случае $\dim V = N = 2$ с нормировкой $f(O) = 1$.

Предельный переход $\varkappa \to 1$ даёт инвариант Александера-Конвея (Alexander 1923, Conway 1969). Для него $f(O^k) = 0$ при $k > 1$.

Примеры.

1) Трилистник:

$$f(\text{Трил.}) = \frac{1}{\varkappa^2} Tr_{(1,2)} D_1^R D_2^R (\varkappa R_{12})^3 = \left(\text{учтём условие Гекке}\right)$$

$$= \varkappa Tr_{(1,2)} D_1^R D_2^R (R_{12} + \lambda R_{12}^2) =$$

$$\overset{!}{=} \varkappa Tr_{(1,2)} D_1^R D_2^R ((1+\lambda^2) R_{12} + \lambda I_{12}) =$$

$$= \varkappa \, Tr D^R \cdot \{(1+\lambda^2) + \lambda \, Tr D^R\} = \left(\text{учтём } Tr D^R = \frac{[N]_q}{q^N},\ \varkappa = q^{-N} \text{ для R-матриц Дринфельда-Джимбо}\right)$$

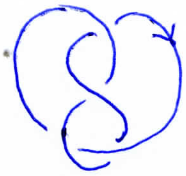
$$= q^{-2N} [N]_q (1 + \lambda^2 + \lambda q^{-N} [N]_q) =$$

$$\boxed{f(\text{Трил.}) = q^{-2N}[N]_q\left(q^2+q^{-2}-q^{-2N}\right)}$$

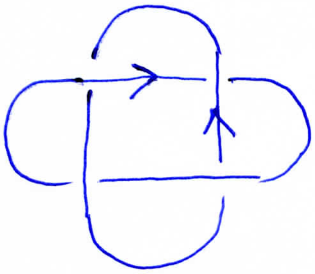
Упражнение 8. Вычислите инвариант f (для R-матриц Дринфельда–Джимбо) для зеркального отражения трилистника. Убедитесь, что трилистник и его зеркальное отражение — разные узлы.

Упражнение 9 Постройте более простое, чем приведенное на стр 23 замыкание косы, отвечающее зацеплению Хопфа . Вычислите для него инвариант $f(L)$.

Упражнение 10 Для узла "восьмерка" постройте отвечающее ему замыкание косы (простейшее из них находится в B_3). Вычислите инвариант $f(L)$.



Упражнение 11* Для зацепления, постройте замыкание косы (простейшее — в B_4). Для этого стоит использовать алгоритм Вогеля.



Вычислите инвариант $f(L)$.