Группа кос, квантовые группы и приложения

Листок 3. R-матрицы и инварианты узлов

Рекомендуемый срок сдачи: 13.04.2022

---

1. Представление Бурау. Проверьте, что формулы

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g_i\, v_k & = & q\, v_k, \ \ \forall\, k \neq i, i+1, \\ g_i\, v_i & = & (q - q^{-1})\, v_i + x\, v_{i+1}, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n-1, \\ g_i\, v_{i+1} & = & x^{-1}\, v_i, \end{array} \right.$$

где $x, q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, задают действие артиновых генераторов $g_i \in H_n(q)$ на n-мерном пространстве с базисом $\{v_k\}_{k=1,\ldots,n}$. Постройте разложение этого представления в прямую сумму неприводимых 1-мерного и $(n-1)$-мерного представлений. Каким диаграммам Юнга отвечают эти неприводимые представления?

2. Проверьте, что следующие R-матрицы, действующие на тензорном квадрате 2-мерного пространства, удовлетворяют соотношению Гекке $(R - qId)(R + q^{-1}Id) = 0$ и соотношению кос $R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}$.
Rem. Для упрощения вычислений можно воспользоваться соображениями, приведенными на стр.8-9 записок лекций.

а) $R = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q - q^{-1} & x & \cdot \\ \cdot & x^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}$ — R-матрица Дринфельда-Джимбо (тип $gl(2)$).

б) $R = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q - q^{-1} & x & \cdot \\ \cdot & x^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -q^{-1} \end{pmatrix}$ — R-матрица Кулиша-Склянина (тип $gl(1|1)$).

в) $R = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & y \\ \cdot & q - q^{-1} & x & \cdot \\ \cdot & x^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -q^{-1} \end{pmatrix}$ — R-матрица Риттенберга (тип $gl(1|1)$).

В последнем пслучае параметры x, y не произвольны: их следует подобрать так, чтобы выполнялось соотношение кос.

3.*[1] Для R-матриц из предыдущей задачи определите кратности их собственных значений q и $-q^{-1}$. Проверьте, что

– ядру R-матричного представления $H_3(q)$, порождаемого R-матрицей Дринфельда-Джимбо, принадлежит идемпотент, отвечающий разбиению $\{1, 1, 1\} \vdash 3$;

[1] Задачи, помеченные значком $*$ являются дополнительными.

– ядрам R-матричных представлений $H_4(q)$, порождаемых R-матрицами Кулиша-Склянина и Риттенберга, принадлежат примитивные идемпотенты, отвечающие разбиению $\{2,2\} \vdash 4$ (для каждой R-матрицы достаточно проверить утверждение для одного из примитивных идемпотентов).

Rem. Используйте выражения для идемпотентов в терминах элементов Юциса-Мерфи (см. лекции по алгебрам Гекке). При вычислениях можно воспользоваться программами аналитического счета, типа "Mathematica".

4. Для R-матриц из задачи 2 постройте косо-обратные им матрицы Ψ^R и определите матрицы R-следов C^R и D^R.

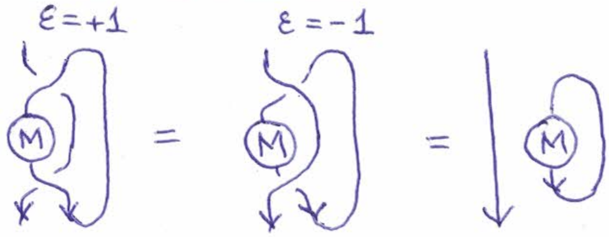
5. Пусть $R \equiv R_{12} \in \mathrm{Aut}(V \otimes V)$ — косо-обратимая R-матрица. V — $\mathbb{C}$-линейное пространство, $N = \dim V$.

Пусть $M \in \mathrm{Mat}_N(U)$ — произвольная $N \times N$ матрица, компоненты которой являются элементами некоторого $\mathbb{C}$-линейного пространства U. Докажите справедливость соотношений

$$\mathrm{Tr}_{R_{(2)}}\left(R_{12}^{\varepsilon} M_1 R_{12}^{-\varepsilon}\right) = \mathrm{Id}_1\left(\mathrm{Tr}_R M\right), \quad \text{где } \varepsilon = \pm 1, \quad \mathrm{Tr}_R M := \mathrm{Tr}(D^R M).$$

Rem. Воспользуйтесь формулой (*) со стр. 15 записок лекций.

Графически эти соотношения можно изобразить так:

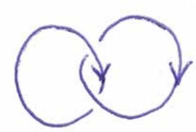


6. Для всех изображенных на рисунках ниже ориентированных узлов/зацеплений постройте косы, замыканием которых они являются, и вычислите инвариант HOMFLY $f(L)$ (см. стр. 32 записок лекций). Для разных примеров попробуйте провести вычисления как с помощью R-матричной техники (см. формулы (19),(20)), так и с использованием скейн-соотношения (см. формулы (22),(23)).

- Зацепления Хопфа

а)

б)

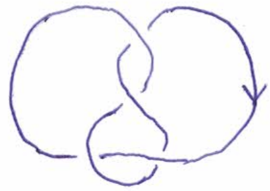


- Трилистник и его зеркальное отражение

а)

б)

- Узел "восьмерка"



- Зацепление вида