Семинар 10

Задача 1. Рассмотрим в $\mathbb{P}^3$ кривую C - образ отображения Веронезе степени три $v_3: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$. (Мы пользуемся обозначениями, введенными в задании к семинару 9.) Пусть $(x:y:z:t)$ - проективные координаты в $\mathbb{P}^3$. Рассмотрим пространство S^2_3 квадратичных форм от переменных x, y, z, t и его подпространство $U = \{F \in S^2_3 \mid$ форма F обращается в нуль в точках кривой $C\}$.
1) Найдите размерность m и какой-нибудь базис $F_1, ..., F_m$ пространства U.
2) существует ли такой базис $F_1, ..., F_m$, что квадрики $Q_i = V(F_i),\ i = 1, ..., m$, - конуса в $\mathbb{P}^3$?

Задача 2. (Это задача 4 из задания к семинару 9.) Пусть $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V)$, а a и b - два ненулевых неколлинеарных вектора в V.
1) В пространстве S^3_1 рассмотрим подпространство $W = \{F \in S^3_1 \mid F(a) = 0\}$. Найдите образ отображения $f_W: \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$.
2) В пространстве S^3_1 рассмотрим подпространство $W = \{F \in S^3_1 \mid F'(a) = 0\}$. Найдите образ отображения $f_W: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$.
3) В пространстве S^3_1 рассмотрим подпространство $W = \{F \in S^3_1 \mid F(a) = F(b)\}$. Найдите образ отображения $f_W: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$.

Задача 3. (Это задача 5 из задания к семинару 9.) Пусть $X = V(F)$ - гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, где $\deg F = d$, и $a \in X$. Пусть l - касательная прямая к X в точке a. Возьмем произвольную точку $b \in l$, $b \neq a$, и пусть $f(\lambda) := F(a + \lambda b)$ имеет корень $\lambda = 0$ по меньшей мере кратности 3. В этом случае l называется *касательной перегиба в точке* $a \in X$. (Если при этом $n = 2$, то есть X - кривая в $\mathbb{P}^2$, то точка a называется точкой перегиба кривой X.) Предпоследняя ($(d-2)$-ая) поляра $Q_a(X) := P^{d-2}_a(X)$ точки a относительно X является гиперповерхностью степени 2 (гиперквадрикой) в $\mathbb{P}^n$. Она называется *полярной квадрикой* точки a относительно гиперповерхности X.
Докажите, что l является касательной перегиба в точке $a \in X$ тогда и только тогда, когда $l \subset \mathbb{T}_a X \cap Q_a(X)$.

Пусть $(x_0 : x_1 : x_2)$ - однородные координаты в $\mathbb{P}^2$, $F(x_0, x_1, x_2)$ - форма степени d, $X = V(F)$ - кривая в $\mathbb{P}^2$. Напомним, что полярная коника $Q_a(X) = P^{d-2}_a(X)$ точки $a \in \mathbb{P}^2$ относительно кривой X имеет уравнение:

$$Q_a(X) = \{\sum_{i,j=0}^{2} x_i x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) = 0\}.$$

Дадим еще одно определение. Кривая $He(X)$ с уравнением

$$He(X) = \{x \in \mathbb{P}^2 \mid \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = 0\}. \tag{1}$$

называется *гессианом* (или *кривой Гессе*) кривой X. Нетрудно видеть, что гессиан $He(X)$ имеет степень $3(d-2)$. (В частности, гессиан кубической кривой является также кубической кривой.)

Задача 4. Докажите, что

$$X \cap He(X) = \mathrm{Sing}X \cup \{\text{множество точек перегиба кривой } X\},$$

то есть каждая точка пересечения кривой X с ее гессианом $He(X)$ либо является особой точкой кривой X, либо является точкой перегиба на X.

Задача 5. 1) Докажите, что если X - гладкая кубика в $\mathbb{P}^2$, и $a \in He(X)$, $b \in \mathrm{Sing}Q_a(X)$, то $a \in \mathrm{Sing}Q_b(X)$.
2) Кривая

$$St(X) := \bigcup_{a \in He(X)} \mathrm{Sing}Q_a(X)$$

называется *штейнерианом* (или *кривой Штейнера*) кривой X. Докажите, пользуясь утверждением 1), что если X - гладкая кубика в $\mathbb{P}^2$, то ее гессиан и штейнериан совпадают:

$$He(X) = St(X).$$