Механика 2022

Домашнее задание № 6

Срок сдачи задания: **11 апреля 2022**

---

1. Действие механической системы с двумя степенями свободы имеет вид:

$$S[x(t), y(t)] = \int \left\{ \dot{x}^2 y^2\, t + \dot{y}^2 x^4 + \frac{\dot{x}\dot{y}\, t^2}{x^2} \right\} dt$$

а) При каких значениях параметров $a, b \in \mathbb{R}$ преобразование Δ_ε:

$$\tilde{x} = e^{\varepsilon} x, \qquad \tilde{y} = e^{a\varepsilon} y, \qquad \tilde{t} = e^{b\varepsilon} t,$$

является симметрией действия?

б) В случае, когда Δ_ε является симметрией, постройте соответствующий Нётеров интеграл движения.

2. Движение заряженной частицы массы m и заряда e в поле электрического диполя в пространстве $\mathbb{R}^3$ характеризуется следующим Лагранжианом:

$$L = \frac{m\,\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} - \frac{e(\vec{d}, \vec{r})}{r^3},$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор частицы, $r = |\vec{r}|$, $\vec{d}$ — постоянный вектор, называемый дипольным моментом.

а) Определите, какие из преобразований группы Галилея являются симметриями этой системы и постройте соответствующие Нётеровские интегралы движения.

б) Докажите, что однопарамерическая группа преобразований Δ_α является симметрией действия системы:

$$\Delta_\alpha : \quad \tilde{\vec{r}} = \alpha \vec{r}, \quad \tilde{t} = \alpha^2 t, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus 0.$$

Постройте отвечающий этой группе Нётеров интеграл движения.

3. Движение материальной точки массы m вдоль оси $O\vec{x}$ в однородном силовом поле определяется Лагранжианом:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + mgx.$$

Докажите, что однопараметрическая группа преобразований

$$\Delta_\varepsilon : \quad \tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x + \varepsilon$$

является группой симметрии системы и выпишите соответствующий Нётеров интеграл движения.