

Экзамен 2 апреля 2022 года

Вариант 3

1. Обозначим через  $P_{17}(X)$  произведение всех неприводимых нормированных многочленов степени 17 над полем из пяти элементов  $\mathbb{F}_5$ . Найти частное от деления многочлена  $X^{5^{17}} - X$  на многочлен  $P_{17}(X)$  в кольце  $\mathbb{F}_5[X]$ .

2. Рассмотрим группу  $G = \text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$  автоморфизмов алгебраического замыкания поля рациональных чисел, а в ней подгруппу  $\Gamma = \{\gamma \in G \mid \gamma(\sqrt{2} + \sqrt{7}) = (\sqrt{2} + \sqrt{7})\}$ . Докажите, что группа  $\Gamma$  будет нормальной подгруппой в группе  $G$  и найдите фактор-группу  $G/\Gamma$ .

3. Можно ли в пространстве двумерного комплексного неприводимого представления группы диэдра  $D_5$  (=группа симметрий правильного пятиугольника) выбрать такой базис, что все операторы представления запишутся в этом базисе рациональными матрицами (то есть матрицами с рациональными матричными элементами)?