Семинар 11

Задача 1. Пусть X - гладкая кубика, и $a \in X$. Рассмотрим поляру $P_a(X)$. Как мы знаем, коника $P_a(X)$ содежит точку a. Рассмотрим произвольную прямую l через точку a, и пусть l пересекает кубику X, помимо a, еще в различных точках b и c, а конику $P_a(X)$ еще в точке d. Докажите, что a, d, b, c - гармоническая четверка точек.

Задача 2. Дана особая кубика X в $\mathbb{P}^2$ с уравнением в форме Вейерштрасса $y^2 = x^2(x+1)$ (эта кубика называется "декартов лист"). Особая точка кубики X - это начало координат $O = (0,0)$. Найдите поляру $P_O(X)$.

Задача 3. В этой задаче условия и обозначения те же, что и в задаче 1 к семинару 10. А именно, пусть кривая C в $\mathbb{P}^3$ - образ отображения Веронезе степени три $v_3 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ (эта кривая называется *нормкубикой*). Пусть $(x : y : z : t)$ - проективные координаты в $\mathbb{P}^3$. Рассмотрим пространство S_3^2 квадратичных форм от переменных x, y, z, t и его подпространство $U = \{F \in S_3^2 \mid$ форма F обращается в нуль в точках нормкубики $C\ \}$. Как нам известно, $\dim_{\mathbf{k}} U = 3$. Тем самым, проективизация $\mathbb{P}(U)$ пространства U (то есть пространство квадрик в $\mathbb{P}^3$, проходящих через нормкубику C) - это проективная плоскость $\mathbb{P}^2$. Опишите подмножество K конусов в $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}^2$, то есть множество $K = \{Q \in \mathbb{P}(U) \mid$ квадрика Q является конусом$\}$.

Задача 4. (Это задача 2 из задания к семинару 10. Мы пользуемся взятыми оттуда обозначениями.) Пусть $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V)$, а a и b - два ненулевых неколлинеарных вектора в V.
1) В пространстве S_1^3 рассмотрим подпространство $W = \{F \in S_1^3 \mid F(a) = 0\}$. Найдите образ отображения $f_W : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$.
2) В пространстве S_1^3 рассмотрим подпространство $W = \{F \in S_1^3 \mid F'(a) = 0\}$. Найдите образ отображения $f_W : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$.
3) В пространстве S_1^3 рассмотрим подпространство $W = \{F \in S_1^3 \mid F(a) = F(b)\}$. Найдите образ отображения $f_W : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$.

Задача 5. Пусть X - гладкая кубика.
1) Докажите, что в любой точке $a \in X \cap He(X)$ кубика X пересекается с гессианом $He(X)$ трансверсально, то есть гессиан $He(X)$ также неособ в точке a, и касательные прямые $\mathbb{T}_a X$ и $\mathbb{T}_a He(X)$ различны. (Трансверсальное пересечение в точке a обозначается так: $X \underset{a}{\pitchfork} He(X)$.)
2) Докажите, что либо a - точка перегиба гессиана $He(X)$, то есть касательная $L = \mathbb{T}_a He(X)$ имеет с $He(X)$ трехкратное пересечение в точке a, либо L является простой компонентой гессиана $He(X)$, то есть $He(X) = L \cup Y$, где Y - коника, не содержащая точку a.