Введение в теорию интегральных уравнений. Листок 3.

Срок сдачи – 25 апреля.

1. Найти детерминант $D(\lambda)$ и минор $D(x,t|\lambda)$ Фредгольма:

$$\text{a) } \varphi(x) = x + \lambda\int\limits_0^1 xt\varphi(t)dt, \qquad \text{b) } \varphi(x) = x + \lambda\int\limits_0^1 (xt+t^2)\varphi(t)dt.$$

2. Показать, что если $K(x,t) = \sum_{m=1}^n f_m(x)g_m(t)$, то $D(\lambda)$ будет полиномом от λ степени n.

3. Найти резольвенты ядер для уравнений Фредгольма 2-го рода:

$$\begin{array}{rll} [0,1]: & \text{a) } K(x,t) = 2x - t, & \text{b) } K(x,t) = xt(x-t), \\ [0,2\pi]: & \text{c) } K(x,t) = \sin x \cos t, & \text{d) } K(x,t) = \sin x - \sin t. \end{array}$$

4. Используя рекуррентные соотношения

$$d_n(x,t) = K(x,t)d_n - n\int\limits_a^b K(x,s)d_{n-1}(s,t)ds, \qquad d_n = \int\limits_a^b d_{n-1}(s,s)ds$$

найти резольвенты ядер для уравнений Фредгольма 2-го рода:

$$\begin{array}{rll} [-1,1]: & \text{a) } K(x,t) = x + t + 1, & \text{b) } K(x,t) = x - \sinh t, \\ [0,1]: & \text{c) } K(x,t) = \sin 2\pi(x+t), & \text{d) } K(x,t) = 4xt - x^2. \end{array}$$

5. С помощью резольвенты решить следующие интегральные уравнения:

$$\text{a) } \varphi(x) - \lambda\int\limits_0^{2\pi} \sin(x+t)\varphi(t)dt = f(x), \qquad \text{b) } \varphi(x) - \lambda\int\limits_0^1 (2x-t)\varphi(t)dt = \frac{x}{6},$$

$$\text{c) } \varphi(x) - \lambda\int\limits_0^1 (4xt - x^2)\varphi(t)dt = x, \qquad \text{d) } \varphi(x) - \lambda\int\limits_{-1}^0 (1+x)(1-t)\varphi(t)dt = f(x).$$