Механика 2022

Домашнее задание № 7

Срок сдачи задания **25 апреля 2022**

---

1. Пусть $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — произвольная гладкая векторная функция от трехмерных векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$:

$$\vec{F} = f_1\vec{r} + f_2\vec{p} + f_3[\vec{r}\times\vec{p}],$$

где f_i — скалярные функции от $\vec{r}^2$, $\vec{p}^2$ и $(\vec{r}\cdot\vec{p})$, компоненты $\vec{r}$ и $\vec{p}$ — координаты и сопряженные импульсы с канонической скобкой Пуассона:

$$\{r_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Вычислите следующие скобки Пуассона:

а) $\{\vec{F}, (\vec{M}\cdot\vec{n})\}$,

где $\vec{M} = [\vec{r}\times\vec{p}]$ — вектор углового момента, $\vec{n}$ — заданный постоянный вектор (его компоненты не зависят от $\vec{r}$ и $\vec{p}$).

б) $\{\vec{F}, \vec{M}^2\}$.

2. Лагранжиан одномерного гармонического осциллятора имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2x^2}{2}, \qquad \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}.$$

а) Найдите обобщенный импульс и постройте гамильтониан H этой системы.

б) С помощью вещественных переменных x и p построим комплесную величину a:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x + i\,\frac{p}{m\omega}\right).$$

Запишите гамильтониан в терминах a и $\bar{a}$.

в) Вычислите скобки Пуассона $\{a, \bar{a}\}$ и $\{a, H\}$.

г) Выпишите гамильтоново уравнение движения для a и найдите его общее решение.

3. Лагранжиан точечного заряда q массы m, движущегося в пространстве $\mathbb{R}^3$ в постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$ параллельном оси Oz, в декартовых координатах имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{qB}{2c}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right),$$

где $B = |\vec{B}|$, константа c — скорость света в вакууме.

а) Найдите обобщенные импульсы и постройте гамильтониан этой системы.

б) Найдите решение гамильтоновых уравнений движения, отвечающее начальным данным
$$x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad p_x(0) = p_z(0) = p, \quad p_y(0) = 0,$$
и определите соответствующую траекторию движения.

в) Вычислите скобки Пуассона $\{v_i, v_j\}$, $1 \le i, j \le 3$, между компонентами *скорости* заряда:
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

4. Лагранжиан двумерного изотропного осциллятора в декартовых координатах пространства $\mathbb{R}^2$ имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

а) Найдите обобщенные импульсы и постройте гамильтониан этой системы.

б) Докажите, что следующие три функции

$$J_1 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 - p_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 - y^2\right), \quad J_2 = \frac{1}{m}\,p_x p_y + m\omega^2 xy, \quad J_3 = \omega\left(xp_y - yp_x\right)$$

являются интегралами движения.

в) Докажите, линейная оболочка $\mathcal{L}$, порожденная всевозможными линейными комбинациями функций J_i, инвариантна относительно скобки Пуассона: скобка Пуассона любых двух элементов из $\mathcal{L}$ принадлежит $\mathcal{L}$.

5. Гамильтониан намагниченного шара в однородном магнитном поле $\vec{B}$ имеет вид

$$H = \frac{\vec{M}^2}{2I} - \gamma \vec{M}\cdot\vec{B},$$

где $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$ — вектор момента импульса шара, I и γ — заданные положительные константы (момент инерции шара и так называемое гиромагнитное отношение соответственно). Найдите гамильтоновы уравнения движения для компонент момента импульса M_i и решите их для случая однородного постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси Oz: $\vec{B} = (0, 0, B)$.