СЕМИНАР 13

Скобки Пуассона в Гамильтоновой динамике.

Напомним кратко основные сведения о структуре Гамильтонового подхода к описанию механических систем.

- Основа описания динамики (как и в Лагранжевом подходе) — конфигурационное пространство M механической системы. В достаточно общем случае это некоторое (гладкое) многообразие, размерность которого[1] называется числом степеней свободы системы. Мы будем считать, что на M введены (локальные) *обобщенные координаты* $\{q_i\}_{1\leq i\leq n}$, где $n = \dim M$.
- Гамильтонова динамика развивается на кокасательном расслоении T^*M конфигурационного пространства, это кокасательное расслоение называется фазовым пространством и для краткости будет обозначаться $\Phi = T^*M$. Координаты $\{p_i\}_{1\leq i\leq n}$ в слое фазового пространства — обобщенные импульсы.
- Разнообразные физические характеристики механической системы — наблюдаемые величины, представляются вещественнозначнными гладкими фунциями $f(q,p)$ на фазовом пространстве: $f \in C^\infty(\Phi)$.
- Временная эволюция наблюдаемых системы определяется двумя компонентами: выделенной наблюдаемой $H(q,p)$, выражающей энергию системы и называемой функцией Гамильтона или Гамильтонианом, а также Пуассоновой структурой:

  $$\{\,,\,\} : C^\infty(\Phi) \times C^\infty(\Phi) \to C^\infty(\Phi),$$

  которая в терминах обобщенных координат и сопряженных им обобщенных импульсов записывается в виде

  $$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right). \tag{1}$$

  Динамика наблюдаемых задается уравнениями Гамильтона:

  $$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \Rightarrow \quad \dot{f} = \{f, H\} \quad \forall\, f(q,p) \in C^\infty(\Phi).$$

Обобщим эту картину на случай, когда конфигурационное пространство механической системы не является кокасательным расслоением на каком-то конфигурационном пространстве. Обобщение касается вида скобок Пуассона (1). Из формулы (1) легко получить 4 свойства скобок Пуассона, на которых базируется следующее аксиоматическое определение пуассоновой структуры на алгебре гладких функций на произвольном гладком многообразии (на самом деле, даже на произвольной коммутативной алгебре).

Определение. Пуассоновой структурой (или скобкой Пуассона) на многообразии M называется отображение $\{\,,\,\} : \mathcal{F}(M)\times\mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ алгебры функций $\mathcal{F}(M)$, удовлетворяющее следующим свойствам (ниже f, g и h — произвольные функции из алгебры $\mathcal{F}(M)$):

1. $\{f,g\} = -\{g,f\}$ — кососимметричность,
2. $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f,h\} + \beta\{g,h\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — билинейность,

[1] Мы рассматриваем только конечномерные конфигурационные пространства.

3. $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$ — тождество Якоби,

4. $\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$ — скобка Пуассона есть дифференцирование коммутативной алгебры функций.

Если на гладком многообразии M введены локальные координаты $\{z_i\}_{1\le i\le m}$, $m = \dim M$ то можно показать, что любая Пуассонова структура на алгебре гладких функций $C^\infty(M)$ имеет вид:

$$\{f,g\} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_i}\,\omega_{ij}(z)\,\frac{\partial g}{\partial z_j}, \tag{2}$$

где m^2 функций $\omega_{ij}(z)$ называются компонентами *Пуассонова тензора* и полностью определяют свойства Пуассоновой структуры. Очевидно, что Пуассонов тензор задается скобкой локальных координат:

$$\omega_{ij}(z) = \{z_i, z_j\}.$$

Гамильтоновы векторные поля

Пуассонова структура на многообразии M позволяет каждой функции $f \in C^\infty(M)$ поставить в соответствие *Гамильтоново векторное поле* $X_f \in TM$, которое определяется своим действием на функции на M:

$$X_f \triangleright g := \{f,g\}, \quad \forall\, g \in C^\infty(M).$$

В координатах z_i в силу формулы (2) Гамильтонову векторному полю X_f соответствует следующий линейный дифференциальный оператор первого порядка:

$$X_f = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_i}\,\omega_{ij}\,\frac{\partial}{\partial z_j} := \partial_i f\,\omega_{ij}\partial_j. \tag{3}$$

В последнем равенстве приняты сокращенные обозначения для частных производных $\partial_i := \partial/\partial z_i$ и введено правило суммирования: если какой-то индекс встречается в формуле дважды, то по нему подразумевается суммирование по всем его допустимым значениям (правило суммирования по повторяющимся индексам):

$$a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i b_i.$$

Если обратиться к Гамильтоновым динамическим уравнениям, то видно, что траектории $z(t,a)$ временной эволюции координат являются интегральными кривыми Гамильтонова векторного поля[2] $-X_H$:

$$\begin{cases} \dot z_i = \{z_i, H\} = -X_H \triangleright z_i, \\ z_i(0) = a_i, \end{cases}$$

где a_i — координаты некоторой точки многообразия M, через которую проходит интегральная кривая $z(t,a)$ поля $-X_H$ в момент $t=0$.

Пример 1. Для одномерной системы с каноническими скобками Пуассона $\{q,p\} = 1$ найдите явную форму Гамильтоновых векторных полей X_f и X_g (в виде дифференциальных операторов) для функций $f = (q^2+p^2)/2$ и $g = qp$.

[2] Часто Гамильтоновы векторные поля определяются с другим знаком, чем это сделали мы: $X_f \triangleright g = \{g,f\}$. Тогда в динамических уравнениях в терминах гамильтоновых полей не будет знака минус, но он появится в коммутаторах полей в соответствующей алгебре Ли (см. ниже).

Решение. Обозначим $z_1 = q$, $z_2 = p$. Учитывая вид матрицы Пуассонова тензора при такой нумерации координат фазового пространства, получаем в соответствии с определением Гамильтонова вектроного поля (3):

$$\|\omega_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_f = (\partial_q f, \partial_p f) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} = q\partial_p - p\partial_q.$$

Аналогично $X_g = \{g, q\}\partial_q + \{g, p\}\partial_p = p\partial_p - q\partial_q$. Для X_g мы применили немного другой (эквивалентный) способ рассуждений: компонента векторного поля при производной ∂_i совпадает с результатом действия этого поля на координату z_i:

$$X_g = (X_g)_i \partial_i \quad \Rightarrow \quad (X_g)_i = X_g \triangleright z_i = \{g, z_i\}.$$

Пример 2. Докажите, что множество всех Гамильтоновых полей на гладком вещественном многообразии M является вещественной алгеброй Ли, где в качестве скобки Ли выступает коммутатор Гамильтоновых полей: $[X_f, X_g] := X_f X_g - X_g X_f$.

Решение. По определению, алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ это $\mathbb{K}$-линейное пространство V с бинарной операцией (скобкой Ли) $[\,,\,] : V \times V \to V$, которая удовлетворяет первым трем аксиомам, приведенным выше в определении абстрактной скобки Пуассона.

Фактически, нам нужно доказать, что множество Гамильтоновых векторных полей замкнуто относительно линейного комбинирования с постоянными коэффициентами и относительно операции коммутирования. Этого будет достаточно, потому что операция коммутирования в ассоциативной алгебре[3] удовлетворяет аксиомам скобки Ли (проверяется элементарно).

Доказательство замкнутости подмножества Гамильтоновых векторных полей относительно взятия линейных комбинаций и коммутирования на линейности скобки Пуассона и на тождестве Якоби для нее.

Действительно, легко проверяется следующее равенство дифференциальных операторов первого порядка при действии на произвольную функцию $w \in C^\infty(M)$:

$$(\alpha X_f + \beta X_g) \triangleright w := \alpha\{f, w\} + \beta\{g, w\} = \{\alpha f + \beta g, w\} := X_{\alpha f + \beta g} \triangleright w, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

что доказывает замкнутость пространства Гамильтоновых векторных полей относительно линейных комбинаций с постоянными числовыми коэффициентами.

Докажем теперь следующую формулу для коммутатора: $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$. Зафиксируем некоторую произвольную функцию $w \in C^\infty(M)$ и найдем результат последовательного действия на нее двух Гамильтоновых векторных полей:

$$X_f X_g \triangleright w := X_f \triangleright (X_g \triangleright w) = X_f \triangleright \{g, w\} = \{f, \{g, w\}\}.$$

Теперь для действия коммутатора получаем выражение:

$$[X_f, X_g] \triangleright w = (X_f X_g - X_g X_f) \triangleright w = \{f, \{g, w\}\} - \{g, \{f, w\}\} = \{f, \{g, w\}\} + \{g, \{w, f\}\}.$$

Но в соответствии с тождеством Якоби последнее выражение равно $-\{w, \{f, g\}\}$, поэтому окончательный ответ принимает вид:

$$[X_f, X_g] \triangleright w = \{\{f, g\}, w\} = X_{\{f,g\}} \triangleright w.$$

[3]Здесь мы пользуемся тем, что Гамильтоновы векторные поля принадлежат ассоциативной алгебре всех дифференциальных операторов на пространстве $C^\infty(M)$.

В силу произвольности w, мы получаем равенство операторов в левой и правой частях, что и завершает доказательство нашего утверждения.

Вырожденная скобка и Пуассонов центр

Определение. Функция $f \in C^\infty(M)$ называется пуассон-центральной, если ее скобка Пуассона с любой другой функцией на многообразии тождественно равна нулю:

$$\{f, g\} \equiv 0, \quad \forall\, g \in C^\infty(M).$$

Множество пуассон-центральных функций образует Пуассонов центр алгебры $C^\infty(M)$.

Очевидно, любая постоянная функция принадлежит Пуассонову центру. Кроме того, в силу линейности скобки Пуассона и тождества Лейбница центр образует подалгебру в ассоциативной алгебре функций $C^\infty(M)$.

Определение. Пуассонова структура на многообразии M называется *невырожденной*, если ее Пуассонов центр состоит только из констант. В противном случае, когда имеются не постоянные пуассон-центральные функции, Пуассонова структура называется *вырожденной*.

Опираясь на формулу (2) легко показать, что скобка Пуассона вырождена (соответственно, невырождена) тогда и только тогда, когда вырождена (невырождена) матрица Пуассонова тензора: $\det\omega = 0$ (соответственно, $\det\omega \neq 0$).

Каноническая Пуассонова структура (1) на кокасательном расслоении T^*M не вырождена, так как ее Пуассонов тензор имеет матрицу

$$\omega = \|\omega_{ij}\| = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix},$$

где I_n и O_n соответственно единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$.

Пуассоновы структуры на алгебре функций любого *нечетномерного* многообразия обязательно вырождены, в силу того, что кососимметрическая матрица Пуассонова тензора нечетной размерности обязательно вырождена.

Если Пуассонова структура вырождена, то существуют непостоянные пуассон-центральные функции. Пусть f одна из таких функций. Тогда уравнение $f(z) = \mathrm{const}$ определяет некоторое подмногообразие в M и все Гамильтоновы векторные поля касательны к этому подмногообразию, поскольку в силу центральности f любое Гамильтоново векторное поле обладает нулевым действием на f:

$$X_g \triangleright f = \{g, f\} = 0, \quad \forall\, g \in C^\infty(M).$$

В силу того, что Гамильтоновы векторные поля образуют алгебру Ли, верно и обратное утверждение (теорема Фробениуса): существует разбиение многообразия M в дизъюнктное объединение подмногообразий (симплектическое слоение), такое, что Гамильтоновы векторные поля касательны к каждому подмногообразию (листу слоения) и скобка Пуассона не вырождена при ограничении на листы слоения.

С точки зрения Гамильтоновой динамики это означает, что если начальные данные уравнений движения даются точкой $z_i(0) = a_i$, принадлежащей какому-то листу слоения, то в процессе эволюции траектория движения системы остается на этом листе для любого момента $t > 0$.

Важный класс вырожденных скобок Пуассона связан с алгебрами Ли. Пусть $\mathcal{G}$ — конечномерная алгебра Ли, $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ — некоторый базис линейного пространства $\mathcal{G}$, $n = \dim\mathcal{G}$. Тогда скобку Ли достаточно задать на базисных элементах:

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k.$$

Напомним, что по индексу k проводится суммирование от 1 до n. Числовые коэффициенты C_{ij}^k называются структурными константами алгебры Ли в базисе $\{e_i\}$.

В этом случае на линейном пространстве $M = \mathcal{G}^*$ можно ввести координаты z_i относительно дуального базиса к базису $\{e_i\}$ и задать структуру *Пуассона-Ли* на алгебре функций $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ с помощью следующего Пуассонова тензора:

$$\{z_i, z_j\} = C_{ij}^k z_k. \tag{4}$$

Проиллюстрируем эту конструкцию и введенные ранее понятия на простом примере.

Скобка Пуассона-Ли и симплектическое слоение

Рассмотрим алгебру Ли $sl(2, \mathbb{R})$ вещественных 2×2 матриц с нулевым следом. Линейное пространство таких матриц трехмерно и мы выберем базис $sl(2, \mathbb{R})$ в виде следующих элементов:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Более традиционным является так называемый Картановский базис в виде набора матриц

$$H = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{2}(X + Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \frac{1}{2}(X - Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако наш выбор удобнее для анализа симплектических листов соответствующей скобки Пуассона-Ли.

Скобка Ли алгебры $sl(2, \mathbb{R})$ задается обычным матричным коммутатором. Структурные константы $sl(2, \mathbb{R})$ в выбранном базисе находятся по скобке Ли базисных векторов:

$$[Z, X] = 2Y, \quad [Z, Y] = 2X, \quad [X, Y] = -2Z. \tag{5}$$

Введем на вещественном линейном пространстве $sl^*(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$ координаты (x, y, z) и зададим скобку Пуассона-Ли в соответствии с набором структурных констант в соотношениях (5):

$$\{z, x\} = 2y, \quad \{z, y\} = 2x, \quad \{x, y\} = -2z. \tag{6}$$

Данная Пуассонова структура вырождена, так как задана на функциях трехмерного многообразия. Нетрудно убедиться, что однородный квадратичный полином $F(x, y, z) = z^2 + x^2 - y^2$ принадлежит Пуассонову центру:

$$\{F, x\} = \{F, y\} = \{F, z\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{F, f\} = 0, \quad \forall f(x, y, z) \in C^\infty(sl^*(2, \mathbb{R})).$$

Можно показать, что полином F порождает весь Пуассонов центр в том смысле, что любая пуассон-ценртральная функция $G(x, y, z)$ является функцией от F:

$$\{G, f\} = 0, \quad \forall f \in C^\infty(sl^*(2, \mathbb{R})) \quad \Leftrightarrow \quad G(x, y, z) = \tilde{G}(F(x, y, z)).$$

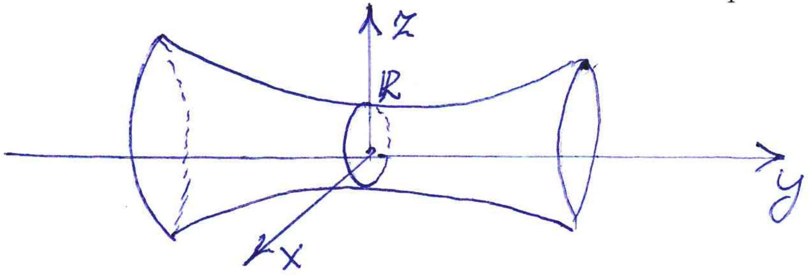
Вследствие этого листы симплектического слоения трехмерного линейного пространства $sl^*(2, \mathbb{R})$ совпадают с поверхностями уровня полинома F:

$$z^2 + x^2 - y^2 = C = \text{const}. \tag{7}$$

Это набор двумерных[4] поверхностей, при ограничении на которые скобка (6) становится невырожденной и по ней можно построить симплектическую форму на каждой такой поверхности.

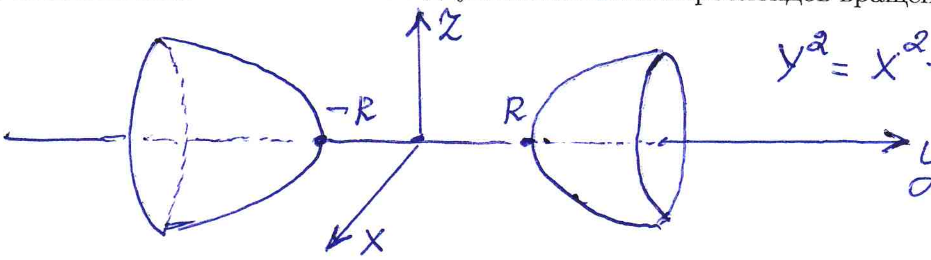
Явный вид поверхностей (7) для разных значений константы C легко находится.

а) $\underline{C = R^2 > 0}$. Это семейство однополостных гиперболоидов вращения с осью симметрии $O\vec{y}$:



$$y^2 = x^2 + z^2 - R^2$$

б) $\underline{C = -R^2 < 0}$. Это семейство двухполостных гиперболоидов вращения с осью симметрии $O\vec{y}$:

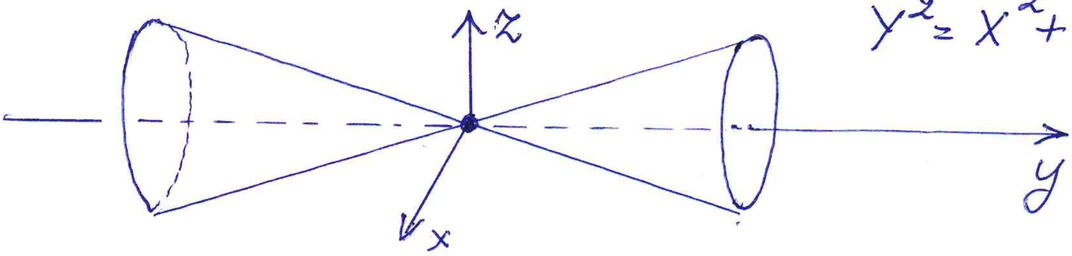


$$y^2 = x^2 + z^2 + R^2$$

в) $\underline{C = 0}$. Этот случай содержит 2 половинки кругового конуса с осью симметрии $O\vec{y}$ как двумерные симплектические многообразия

$$y^2 = x^2 + z^2,\ y > 0, \qquad y^2 = x^2 + z^2,\ y < 0$$

и точку вырождения структуры Пуассона-Ли $x = y = z = 0$.



$$y^2 = x^2 + z^2$$

В заключение найдем ограничение скобки Пуассона-Ли, отвечающей алгебре $sl(2, \mathbb{R})$, на поверхности уровня (7) и убедимся в невырожденности полученной структуры. Для определенности рассмотрим случай а) — семейство однополостных гиперболоидов.

В области пространства $\mathbb{R}^3$ вне конуса $z^2 + x^2 - y^2 = 0$ введем гиперболические координаты $r > 0$, $u \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, 2\pi)$ следующими соотношениями:

$$z = r \operatorname{ch} u \cos\phi, \quad x = r \operatorname{ch} u \sin\phi, \quad y = r \operatorname{sh} u. \tag{8}$$

Тогда однополостные гиперболоиды семейства (7) фиксируются условием $r = R > 0$ для некоторого вещественного R.

[4]Исключение составляет "поверхность" $x = y = z = 0$ — точка начала координат. Это точка вырождения структуры Пуассона-Ли: скобка любых функций в начале координат равна нулю, поскольку Пуассонов тензор (4) обращается в нуль в этой точке.

Гладкие функции на гиперболоиде могут рассматриваться как функции координат u и ϕ. Пуассонова структура на этих функциях полностью задается одной скобкой $\{u, \phi\}$ (зависящей от R как от параметра) на поверхности гиперболоида. Для ее нахождения найдем зависимость координат u и ϕ от x, y и z. Точенее, выразим не сами эти координаты, а некоторые удобные функции от них. В силу формул (8) имеем следующие соотношения:

$$\operatorname{sh} u = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{z^2 + x^2 - y^2}, \qquad \operatorname{tg} \phi = \frac{x}{z}.$$

Заметим, что r является пуассон-центральной функцией для скобки (6) и при вычислениях скобок r может рассматриваться как константа. Теперь имеем с одной стороны:

$$\{\operatorname{sh} u, \operatorname{tg} \phi\} = \{u, \phi\} \frac{\operatorname{ch} u}{\cos^2 \phi}, \tag{9}$$

а с другой стороны

$$\{\operatorname{sh} u, \operatorname{tg} \phi\} = \left\{\frac{y}{r}, \frac{x}{z}\right\} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{z} \{y, x\} - \frac{x}{z^2} \{y, z\}\right) = \frac{1}{r} \left(2 + 2 \frac{x^2}{z^2}\right).$$

Подставив сюда x и z в терминах r, u и ϕ из (8), получаем второе выражение для скобки

$$\{\operatorname{sh} u, \operatorname{tg} \phi\} = \frac{2}{r \cos^2 \phi}.$$

Сравнивая с выражением (9), получаем окончательный ответ

$$\{u, \phi\} = \frac{2}{r \operatorname{ch} u}.$$

После ограничения на поверхность $r = R$ получаем невырожденную скобку с Пуассоновым тензором

$$\omega(u, \phi) = \begin{pmatrix} \{u, u\} & \{u, \phi\} \\ \{\phi, u\} & \{\phi, \phi\} \end{pmatrix} = \frac{2}{R \operatorname{ch} u} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$