Семинар 12

Задача 1. (1) Пусть X - гладкая кубика. Докажите, что в любой точке $a \in X \cap He(X)$ кубика X пересекается с гессианом $He(X)$ трансверсально, то есть гессиан $He(X)$ также неособ в точке a, и касательные прямые $\mathbb{T}_a X$ и $\mathbb{T}_a He(X)$ различны. (Трансверсальное пересечение в точке a обозначается так: $X \pitchfork_a He(X)$.)
(2) Докажите, что прямая $\mathbb{T}_a X$ касается гессиана $He(X)$ в некоторой точке b, отличной от точки a.
(3) Докажите, что a - точка перегиба гессиана $He(X)$.

Задача 2. Даны две кубические кривые X_1 и X_2, распавшиеся на тройки различных прямых. Пусть кривые X_1 и X_2 пересекаются в 9 различных точках. Тогда кубика X, проходящая через 8 из этих точек, проходит и через 9-ую точку.

Задача 3. На семинаре 12 было дано определение закона композиции на гладкой кубике X. Докажите, что этот закон удовлетворяет свойствам коммутативной группы.
Указание: Ключевым свойством здесь является свойство ассоциативности закона композиции. Для его доказательства полезно воспользоваться предыдущей задачей.

Задача 4. Групповой закон (закон композиции) на гладкой кубике X в силу его коммутативности будем записывать аддитивно, то есть обозначать композицию двух точек $a, b \in X$ через $a + b$. В частности, для любого натурального числа n под точкой na на кубике X будем понимать точку $a+a+...+a$ (сумма точки a с самой собой n раз). Пусть точка $0 \in X$ (нейтральный элемент группового закона) является точкой перегиба на X. Докажите, что всякая точка перегиба $a \in X$ удовлетворяет равенству $3a = 0$, и обратно, всякое решение этого уравнения является точкой перегиба.

Задача 5. Пользуясь предыдущей задачей, докажите, что если a и b - две различные точки перегиба на гладкой кубике X, то прямая $\langle ab \rangle$ пересекает X, помимо a и b, в третьей точке c, которая также является точкой перегиба на X.