Избранные главы дискретной математики.

Задачи с занятия 12 апреля.

1) Докажите, что линейная булева функция, отличная от константы, принимает значения 0 и 1 одинаковое число раз. К 26.04.

2) Докажите, что булева функция монотонна тогда и только тогда, когда в ее сокращенной ДНФ нет отрицаний. К 26.04.

3) **Треугольник Паскаля по модулю 2.** Докажите следующий критерий нечетности биномиального коэффициента $\binom{n}{k}$. Рассмотрим двоичную запись чисел n и k, т.е. представим их в виде $n = a_1 2^{m-1} + a_2 2^{m-2} + \ldots + a_{m-1} 2 + a_m$ и $k = b_1 2^{m-1} + b_2 2^{m-2} + \ldots + b_{m-1} 2 + b_m$ $(a_i, b_i \in \{0,1\})$ и рассмотрим булевы векторы $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Тогда $\binom{n}{k}$ нечетен тогда и только тогда, когда $a \geq b$ (в смысле частичного порядка на множестве булевых векторов, т.е. по определению $a \geq b$ если $a_i \geq b_i$ $\forall i$). *Заметим, что из этого критерия можно вывести обоснование алгоритма вычисления коэффициентов многочлена Жегалкина из задачи 2 с 4 занятия.* К 26.04.

4) Придумайте обобщение результата из предыдущей задачи на сравнения по любому простому модулю.

5) **Для тех, кто хорошо освоил курс топологии.** На семинаре был рассказан один из возможных примеров бесконечной булевой алгебры, не изоморфной алгебре 2^{Ω} ни для какого множества Ω. Для этого достаточно придумать любую счетную булеву алгебру, и таковой является множество булевых последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$ $(x_i \in \{0,1\}$, $i \in \mathbb{N})$, постоянных начиная с некоторого места (т.е. $x_i = x_{i+1}$ при $i > M$ для некоторого M). Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания — покомпонентные. Также я привел без доказательства следующую классическую теорему Стоуна: любая булева алгебра изоморфна алгебре таких подмножеств некоторого вполне несвязного хаусдорфова топологического пространства X, которые являются одновременно и открытыми и замкнутыми. (Топологическое пространство X называется вполне несвязным, если $\forall\ x_1, x_2 \in X \quad \exists\ U_1, U_2$ открытые подмножества в X, такие что $x_i \in U_i$, $U_1 \cup U_2 = X$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.) Задача состоит в том, чтобы определить, какое топологическое пространство X соответствует приведенному выше примеру.