

Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Лекция 10. Линейные расслоения над кривыми

Функции на кривой можно понимать как сечения тривиального линейного расслоения над ней. Тривиальное линейное расслоение над кривой C — это прямое произведение $C \times \mathbb{C}$ этой кривой и комплексной прямой. Каждой мероморфной функции $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$ сопоставляется мероморфное сечение этого расслоения $C \rightarrow C \times \mathbb{C}$, переводящее точку $x \in C$ в точку $(x, f(x)) \in C \times \mathbb{C}$. Прообразы бесконечности являются полюсами функции f в C . Если кривая C компактна, то все голоморфные функции на ней постоянны, а у всякой непостоянной мероморфной функции есть полюса.

Лекция 10. Линейные расслоения над кривыми

Функции на кривой можно понимать как сечения тривиального линейного расслоения над ней. Тривиальное линейное расслоение над кривой C — это прямое произведение $C \times \mathbb{C}$ этой кривой и комплексной прямой. Каждой мероморфной функции $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$ сопоставляется мероморфное сечение этого расслоения $C \rightarrow C \times \mathbb{C}$, переводящее точку $x \in C$ в точку $(x, f(x)) \in C \times \mathbb{C}$. Прообразы бесконечности являются полюсами функции f в C . Если кривая C компактна, то все голоморфные функции на ней постоянны, а у всякой непостоянной мероморфной функции есть полюса.

Помимо тривиального линейного расслоения над всякой кривой есть еще два естественных линейных расслоения: касательное TC и кокасательное $T^\vee C$. Эти два расслоения имеются не только над кривыми, но и над произвольными комплексными многообразиями. Однако над комплексным многообразием размерности $n > 1$ эти расслоения не являются линейными; их ранг (т.е., размерность слоя), равен n , тогда как ранг линейного расслоения, по определению, равен 1.

Definition

Векторным расслоением ранга k , $k \in \mathbb{N}$, над комплексным многообразием M размерности m называется пара, состоящая из комплексного многообразия E размерности $m + k$ и голоморфного отображения $p : E \rightarrow M$, такого, что у любой точки $x \in M$ существует открытая окрестность $U(x) \subset M$ и биголоморфизм $\varphi : U(x) \times \mathbb{C}^k \rightarrow p^{-1}(U(x))$ прямого произведения $U(x)$ и \mathbb{C}^k на полный прообраз этой окрестности, причем

- $p \circ \varphi : (x, v) \mapsto x$ для любой точки $x \in M$;
- ограничение отображения φ на $U(x) \times \mathbb{C}^k$ является линейным изоморфизмом на $p^{-1}(U(x))$ для любой точки $x \in M$.

Прообраз $p^{-1}(x)$ точки $x \in M$ называется *слоем* векторного расслоения $p : E \rightarrow M$. *Мероморфным сечением* голоморфного векторного расслоения $p : E \rightarrow M$ называется мероморфное отображение $\sigma : M \rightarrow E$, такое, что $p \circ \sigma : M \rightarrow M$ есть тождественное отображение.

Если ранг k векторного расслоения равен 1, то расслоение называется *линейным*.

Лекция 10. Касательное и кокасательное расслоения над кривой

Слоем T_x касательного расслоения TC к кривой C над точкой $x \in C$ является касательная прямая к C в точке x . Касательная прямая состоит из касательных векторов, которые можно определять по-разному. Например, как классы эквивалентности голоморфных отображений $(D, 0) \rightarrow (C, x)$, где D — единичный диск в \mathbb{C} , или как дифференцирования, т.е. линейные отображения из пространства ростков голоморфных функций в точке $x \in C$ в \mathbb{C} , удовлетворяющие правилу Лейбница $v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$. При втором определении утверждение о том, что касательные вектора к кривой C в данной точке x образуют векторное пространство, становится очевидным. Кокасательное расслоение двойственно к касательному.

Лекция 10. Касательное и кокасательное расслоения над кривой

Слоем T_x касательного расслоения TC к кривой C над точкой $x \in C$ является касательная прямая к C в точке x . Касательная прямая состоит из *касательных векторов*, которые можно определять по-разному. Например, как классы эквивалентности голоморфных отображений $(D, 0) \rightarrow (C, x)$, где D — единичный диск в \mathbb{C} , или как *дифференцирования*, т.е. линейные отображения из пространства ростков голоморфных функций в точке $x \in C$ в \mathbb{C} , удовлетворяющие правилу Лейбница $v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$. При втором определении утверждение о том, что касательные вектора к кривой C в данной точке x образуют векторное пространство, становится очевидным. *Кокасательное расслоение* двойственно к касательному. *Векторное поле* — это сечение касательного расслоения. *Дифференциальная 1-форма* — сечение кокасательного расслоения (*ковекторное поле*). В локальной координате z векторное поле записывается в виде $a(z)\partial/\partial z$; его нули и полюса — это нули и полюса локальных коэффициентов $a(z)$. Если векторное поле голоморфно, то голоморфна и функция $a(z)$; если поле мероморфно, то функция $a(z)$ мероморфна. Соответственно, 1-форма записывается в виде $b(z)dz$.

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы на проективной прямой

На любой кривой C голоморфные векторные поля и голоморфные 1-формы образуют векторное пространство над \mathbb{C} . В свою очередь, мероморфные векторные поля и мероморфные 1-формы образуют векторное пространство как над \mathbb{C} , так и над полем мероморфных функций на C . Отношение любых двух ненулевых векторных полей является мероморфной функцией, поэтому последнее векторное пространство одномерно. То же самое справедливо и для 1-форм (и сечений любых линейных расслоений).

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы на проективной прямой

На любой кривой C голоморфные векторные поля и голоморфные 1-формы образуют векторное пространство над \mathbb{C} . В свою очередь, мероморфные векторные поля и мероморфные 1-формы образуют векторное пространство как над \mathbb{C} , так и над полем мероморфных функций на C . Отношение любых двух ненулевых векторных полей является мероморфной функцией, поэтому последнее векторное пространство одномерно. То же самое справедливо и для 1-форм (и сечений любых линейных расслоений). Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z . Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, в частности, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы на проективной прямой

Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z . Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы на проективной прямой

Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z . Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Corollary

Всякое голоморфное векторное поле на проективной прямой имеет вид $P_2(z)\partial/\partial z$, где $P_2(z)$ — многочлен степени не выше 2.

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы на проективной прямой

Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z . Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Corollary

Всякое голоморфное векторное поле на проективной прямой имеет вид $P_2(z)\partial/\partial z$, где $P_2(z)$ — многочлен степени не выше 2.

1-форма dz имеет в бесконечности полюс второго порядка: $dz = d\frac{1}{w} = -\frac{dw}{w^2}$.

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы на проективной прямой

Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z . Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Corollary

Всякое голоморфное векторное поле на проективной прямой имеет вид $P_2(z)\partial/\partial z$, где $P_2(z)$ — многочлен степени не выше 2.

1-форма dz имеет в бесконечности полюс второго порядка: $dz = d\frac{1}{w} = -\frac{dw}{w^2}$.

Corollary

На проективной прямой нет ненулевых голоморфных 1-форм.

Лекция 10. Дифференциал функции

Одним из основных источников мероморфных 1-форм на комплексных кривых являются дифференциалы функций. Всякой мероморфной функции $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$ на кривой C соответствует 1-форма df , ее дифференциал, на C . По определению, 1-форма df действует на касательный вектор $v \in T_x C$ по правилу $df : v \mapsto v(f)$. В локальной координате z дифференциал мероморфной функции f записывается в виде $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

Одним из основных источников мероморфных 1-форм на комплексных кривых являются дифференциалы функций. Всякой мероморфной функции $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$ на кривой C соответствует 1-форма df , ее дифференциал, на C . По определению, 1-форма df действует на касательный вектор $v \in T_x C$ по правилу $df : v \mapsto v(f)$. В локальной координате z дифференциал мероморфной функции f записывается в виде $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

Упражнение. 1-форма dz на проективной прямой является дифференциалом мероморфной функции z . Дифференциалом какой мероморфной функции является 1-форма $\frac{dz}{z}$?

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы

Всякое ненулевое мероморфное векторное поле на проективной прямой имеет вид $\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{\partial}{\partial z}$, где $P(z), Q(z)$ — многочлены, не имеющие общих корней. Всякая ненулевая мероморфная 1-форма на проективной прямой имеет вид $\frac{P(z)}{Q(z)} dz$, где $P(z), Q(z)$ — многочлены, не имеющие общих корней.

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы на эллиптических кривых

Векторное поле $\partial/\partial z$ на комплексной прямой \mathbb{C} инвариантно относительно сдвигов на любой вектор в \mathbb{C} . В частности, оно инвариантно относительно сдвигов на элементы любой решетки $L \subset \mathbb{C}$, и определяет поэтому векторное поле на факторкривой \mathbb{C}/L . Это векторное поле голоморфно (у него нет полюсов) и не имеет нулей. Если V — другое голоморфное векторное поле на \mathbb{C}/L , то, разделив его на $\partial/\partial z$, получаем голоморфную функцию на \mathbb{C}/L , т.е. константу. Поэтому пространство голоморфных векторных полей на \mathbb{C}/L одномерно.

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы на эллиптических кривых

Векторное поле $\partial/\partial z$ на комплексной прямой \mathbb{C} инвариантно относительно сдвигов на любой вектор в \mathbb{C} . В частности, оно инвариантно относительно сдвигов на элементы любой решетки $L \subset \mathbb{C}$, и определяет поэтому векторное поле на факторкривой \mathbb{C}/L . Это векторное поле голоморфно (у него нет полюсов) и не имеет нулей. Если V — другое голоморфное векторное поле на \mathbb{C}/L , то, разделив его на $\partial/\partial z$, получаем голоморфную функцию на \mathbb{C}/L , т.е. константу. Поэтому пространство голоморфных векторных полей на \mathbb{C}/L одномерно.

Векторное поле $\partial/\partial z$ на эллиптической кривой $C = \mathbb{C}/L$ задает тривиализацию касательного расслоения TC к C . Таким образом, в случае эллиптической кривой касательное расслоение тривиально, $TC \cong C \times \mathbb{C}$.

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы на эллиптических кривых

Векторное поле $\partial/\partial z$ на комплексной прямой \mathbb{C} инвариантно относительно сдвигов на любой вектор в \mathbb{C} . В частности, оно инвариантно относительно сдвигов на элементы любой решетки $L \subset \mathbb{C}$, и определяет поэтому векторное поле на факторкривой \mathbb{C}/L . Это векторное поле голоморфно (у него нет полюсов) и не имеет нулей. Если V — другое голоморфное векторное поле на \mathbb{C}/L , то, разделив его на $\partial/\partial z$, получаем голоморфную функцию на \mathbb{C}/L , т.е. константу. Поэтому пространство голоморфных векторных полей на \mathbb{C}/L одномерно.

Векторное поле $\partial/\partial z$ на эллиптической кривой $C = \mathbb{C}/L$ задает тривиализацию касательного расслоения TC к C . Таким образом, в случае эллиптической кривой касательное расслоение тривиально, $TC \cong C \times \mathbb{C}$.

Аналогичные утверждения справедливы и для 1-форм. Кокасательное расслоение $T^\vee C$ к эллиптической кривой тривиально и порождается голоморфной 1-формой dz , не имеющей нулей.

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы

Сумма порядков нулей и полюсов мероморфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей. Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы

Сумма порядков нулей и полюсов мероморфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей.

Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.

Задавать векторные поля и 1-формы на кривых рода $g > 1$ сложнее, чем на кривых рода 0 и 1, — из-за отсутствия глобальной координаты и трудностей определения мероморфных функций на произвольной кривой. В то же время, 1-форму можно задать на кривой, отображенной в проективное пространство, подняв на нее мероморфную 1-форму на объемлющем пространстве. Например, если кривая C погружена в плоскость, то всякая 1-форма на плоскости задает 1-форму на C . Дифференциал функции также является поднятием 1-формы dz на $\mathbb{C}P^1$ при отображении $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$.

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы

Сумма порядков нулей и полюсов мероморфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей.

Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.

Задавать векторные поля и 1-формы на кривых рода $g > 1$ сложнее, чем на кривых рода 0 и 1, — из-за отсутствия глобальной координаты и трудностей определения мероморфных функций на произвольной кривой. В то же время, 1-форму можно задать на кривой, отображенной в проективное пространство, подняв на нее мероморфную 1-форму на объемлющем пространстве. Например, если кривая C погружена в плоскость, то всякая 1-форма на плоскости задает 1-форму на C . Дифференциал функции также является поднятием 1-формы dz на $\mathbb{C}P^1$ при отображении $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$.

Упражнение. Почему мероморфное векторное поле на плоскости не задает векторного поля на погруженной в плоскость кривой?

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы

Сумма порядков нулей и полюсов мероморфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей.

Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.

Задавать векторные поля и 1-формы на кривых рода $g > 1$ сложнее, чем на кривых рода 0 и 1, — из-за отсутствия глобальной координаты и трудностей определения мероморфных функций на произвольной кривой. В то же время, 1-форму можно задать на кривой, отображенной в проективное пространство, подняв на нее мероморфную 1-форму на объемлющем пространстве. Например, если кривая C погружена в плоскость, то всякая 1-форма на плоскости задает 1-форму на C . Дифференциал функции также является поднятием 1-формы dz на $\mathbb{C}P^1$ при отображении $f : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$.

Упражнение. Почему мероморфное векторное поле на плоскости не задает векторного поля на погруженной в плоскость кривой?

Более общим образом, голоморфное отображение $F : C \rightarrow M$ кривой C в комплексное многообразие M позволяет поднять на C любую 1-форму ω на M , положив $F^*\omega(v) = \omega(dF(v))$. Поэтому 1-формы — более подходящий объект для изучения и более подходящий инструмент исследования кривых, чем векторные поля.

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы на кривых старших родов

Ограничивая 1-форму dx на произвольную плоскую алгебраическую кривую, мы получаем 1-форму на этой кривой. Если кривая C задана уравнением $(x-1)^2 + y^2 = 1$, то ее можно параметризовать рациональной кривой, положив

$$x = \frac{2}{1+t^2}; \quad y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Тогда $dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}$, и нулями этой 1-формы являются те точки кривой, в которых $t = 0$ и $t = \infty$, т.е. точки $(2, 0)$ и $(0, 0)$. Кроме того, у нее два полюса, оба порядка 2, в точках, отвечающих значениям параметра $t = \pm i$, т.е. в точках $(1 : \pm i : 0)$ на бесконечности нашей кривой.

Лекция 10. Векторные поля и 1-формы на кривых старших родов

Ограничивая 1-форму dx на произвольную плоскую алгебраическую кривую, мы получаем 1-форму на этой кривой. Если кривая C задана уравнением $(x-1)^2 + y^2 = 1$, то ее можно параметризовать рациональной кривой, положив

$$x = \frac{2}{1+t^2}; \quad y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Тогда $dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}$, и нулями этой 1-формы являются те точки кривой, в которых $t = 0$ и $t = \infty$, т.е. точки $(2, 0)$ и $(0, 0)$. Кроме того, у нее два полюса, оба порядка 2, в точках, отвечающих значениям параметра $t = \pm i$, т.е. в точках $(1 : \pm i : 0)$ на бесконечности нашей кривой.

Другой — и более универсальный, пригодный не только для рациональных кривых, — способ находить нули 1-формы, состоит в том, чтобы сравнить дифференциал на плоскости с дифференциалом df функции f , задающей кривую. В нулях ограничения дифференциала на кривую он пропорционален df ; действительно, значение df на любом касательном векторе к кривой $f = 0$ равно 0. Полюсами ограничения дифференциала на кривую могут оказаться точки пересечения кривой его полюсов с самой кривой; в частности, это могут быть точки кривой на бесконечности, которые нужно проверять.

Лекция 10. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ней не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Лекция 10. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ней не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Доказательство. Выберем на проективной плоскости координаты $(x : y : z)$ таким образом, чтобы прямая $z = 0$ пересекала кривую C в d точках (т.е., трансверсально). Пусть кривая C задается в аффинных координатах уравнением $f(x, y) = 0$.

Lemma

Дифференциальная 1-форма

$$\omega_C = \frac{dx \wedge dy}{df}$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на C .

Лекция 10. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Пусть кривая C задается в аффинных координатах уравнением $F(x, y, 1) = f(x, y) = 0$.

Lemma

Дифференциальная 1-форма

$$\omega_C = \frac{dx \wedge dy}{df}$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на C .

Лекция 10. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Пусть кривая C задается в аффинных координатах уравнением $F(x, y, 1) = f(x, y) = 0$.

Лемма

Дифференциальная 1-форма

$$\omega_C = \frac{dx \wedge dy}{df}$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на C .

Доказательство. В аффинной карте $z = 1$ 1-форма ω_C не имеет особенностей, поскольку df не обращается в нуль на C . Достаточно проверить, что она не имеет полюсов на бесконечности. Перейдем от карты $z = 1$ к карте $x = 1$: $x = \frac{1}{v}, y = \frac{u}{v}$. Тогда

$$\omega_C = \frac{dx}{\partial f / \partial y} = -\frac{dv/v^2}{\partial f / \partial y \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right)} = -\frac{v^{d-3} dv}{v^{d-1} \partial f / \partial y \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right)}.$$

В знаменателе последнего выражения стоит производная по u функции $F(1, u, v)$.

Лекция 10. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ней не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Лекция 10. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ней не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Lemma

Для всякого многочлена $p(x, y)$ степени, не превосходящей $d-3$, дифференциальная 1-форма

$$p(x, y)\omega_C$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на C , равной 0 в том и только в том случае, когда $p \equiv 0$.

Доказательство. Достаточно проверить, что в точках кривой C на бесконечности порядок нуля 1-формы ω_C равен $d-3$.

Лекция 10. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских нодальных кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская нодальная кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ее нормализации не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2 - \delta$, где δ — число точек простого самопересечения кривой C .

Лекция 10. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских нодальных кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская нодальная кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ее нормализации не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2 - \delta$, где δ — число точек простого самопересечения кривой C .

Lemma

Для всякого многочлена $p(x, y)$ степени, не превосходящей $d-3$, обращающегося в нуль в двойных точках кривой C , дифференциальная 1-форма

$$p(x, y) \frac{dx \wedge dy}{df}$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на нормализации кривой C , равной 0 в том и только в том случае, когда $p \equiv 0$.

- Докажите, что ограничение 1-формы dF на плоскую кривую, где F — мероморфная функция на плоскости, является дифференциалом ограничения функции F на эту кривую.
- Рассмотрим результат ограничения 1-формы (a) $x dx$; (b) $y dx$ на плоскую кривую $x^n + y^n = 1$. Найдите нули этой 1-формы и укажите их порядки. Найдите полюса этой 1-формы и укажите их порядки.

- Пусть f — проекция квадрики $x^2 + y^2 = 1$ на ось x . Верно ли, что любая мероморфная 1-форма на квадрике является поднятием некоторой 1-формы на прямой при отображении f ?
- Пусть плоская кривая задана уравнением $y^4 = x^3 - 3x$. Найдите ее род. Найдите полюсы ограничения 1-формы dx/y на эту кривую и укажите их порядки. Постройте базис голоморфных 1-форм на этой кривой.
- Докажите, что всякая 1 форма вида

$$\frac{p(x)dx}{y}$$

где p — многочлен степени не выше $g - 1$, является голоморфной 1-формой на гиперэллиптической кривой $y^2 = Q_{2g+1}(x)$, где Q_{2g+1} — многочлен степени $2g + 1$ с попарно различными корнями.