

06.04.2022

## Пуассоновы структуры на коммутативной алгебре

Дальнейшие наши лекции будут посвящены структуре и теории представлений специального класса некоммутативных алгебр — так называемых квантовых групп и, если позволит время, более общих объектов — квантовых матричных алгебр. Все наши примеры таких алгебр возникают из квантования коммутативной алгебры функций на матричной алгебре, снабженной различными пуассоновыми структурами.

Идейно процедура квантования заключается в переходе от коммутативной алгебры к некоммутативной с соблюдением ряда условий. Важнейшим из этих условий является так называемый “классический предел”, который позволяет восстановить исходную коммутативную алгебру из квантовой при стермлении параметра квантования к нулю. “Управляет” процедурой квантования так называемая пуассонова структура или скобка Пуассона на коммутативной алгебре.

Типичным примером является квантование механической системы и переход от классической механики к квантовой. Здесь исходной коммутативной алгеброй является алгебра вещественнозначных функций на фазовом пространстве — наблюдаемых механической системы. Фазовое пространство, в свою очередь, часто представляет собой кокасательное расслоение на конфигурационном пространстве модели.

Одним из простейших примеров является система  $N$  материальных точек в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Конфигурационное пространство  $\mathbb{R}^{3N}$  снабжается координатами  $q^i$ , фазовое пространство  $M$  отождествляется с  $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$ , координаты в слое — компоненты импульса  $p_i$ . Наблюдаемые системы — (гладкие) вещественнозначные функции от  $6N$  переменных  $f(q, p)$ . Множество наблюдаемых образуют коммутативную алгебру  $\mathcal{F}(M)$  относительно сложения и поточечного умножения функций.

Динамика системы определяется особой наблюдаемой — гамильтонианом  $H(q, p)$ , представляющим энергию системы. Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Теперь динамическая эволюция любой наблюдаемой  $f(q, p)$  задается дифференциальным уравнением:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) := \{f, H\}.$$

Здесь последнее равенство является определением билинейной антисимметрической операции на алгебре наблюдаемых, так называемой скобки Пуассона  $\{, \} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ .

Общее определение скобки Пуассона или пуассоновой структуры на коммутативной алгебре следующее.

**Определение.** Пусть  $\mathcal{F}$  — ассоциативная коммутативная алгебра над полем  $\mathbb{K}$ . Пуассонова структура на алгебре  $\mathcal{F}$  это отображение  $\{, \} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  (скобка Пуассона),

удовлетворяющее следующим свойствам (ниже  $f, g, h \in \mathcal{F}$  — произвольные элементы алгебры  $\mathcal{F}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  — элементы поля  $\mathbb{K}$ ):

- (i)  $\{f, g\} = -\{g, f\}$  — антисимметричность.
- (ii)  $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}$  — линейность по первому аргументу, а следовательно, в силу (i), и линейность по второму аргументу.
- (iii)  $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} \equiv 0$  — тождество Якоби.
- (iv)  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$  — правило Лейбница.

Заметим, что первые три аксиомы (i)–(iii) превращают  $\mathcal{F}$  в алгебру Ли.

Рассмотрим важный случай, когда коммутативная алгебра  $\mathcal{F}$  представляет собой алгебру гладких функций на гладком многообразии  $M$ ,  $\dim M = n$ . В этом случае общий вид пуассоновой структуры может быть описан с помощью так называемого пуассонова тензора. Пусть в некоторой области  $U \subset M$  введены локальные координаты  $z^i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Тогда, пользуясь правилом Лейбница (iv) можно показать, что в локальных координатах любая пуассонова структура имеет вид:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z^i} \omega^{ij}(z) \frac{\partial g}{\partial z^j}.$$

Гладкие функции  $\omega^{ij}(z) = \{z^i, z^j\}$  являются компонентами пуассонова тензора. Прямым вычислением легко проверяется справедливость следующего утверждения.

**Утверждение.** Антисимметричность скобки Пуассона и тождество Якоби приводит к следующим условиям на компоненты пуассонова тензора:

- (a)  $\omega^{ij}(z) = -\omega^{ji}(z)$ ;
- (б)  $\omega^{ia}(z)\partial_a\omega^{jk}(z) + \omega^{ka}(z)\partial_a\omega^{ij}(z) + \omega^{ja}(z)\partial_a\omega^{ki}(z) = 0$ .

В уравнении пункта (б) применено сокращенное обозначение для частной производной  $\partial_a = \partial/\partial z^a$  и по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование по всем его возможным значениям:

$$\omega^{ia}\partial_a\omega^{jk} := \sum_{a=1}^n \omega^{ia} \frac{\partial\omega^{jk}}{\partial z^a}.$$

Таким образом, если  $\omega = \|\omega^{ij}\|$  — постоянная антисимметрическая матрица, то свойство (б) удовлетворяется автоматически и поэтому любая постоянная антисимметрическая матрица задает некоторую пуассонову структуру. Рассмотренный выше пример механики частиц в евклидовом пространстве как раз из этой серии: приведенная скобка Пуассона задается постоянным тензором вида

$$\omega = \begin{pmatrix} O_{m \times m} & I_{m \times m} \\ -I_{m \times m} & O_{m \times m} \end{pmatrix}, \quad m = 3N,$$

где  $O$  и  $I$  являются нулевой и единичной матрицами соответственно. Переменные  $(q, p)$  называются каноническими.

**Определение.** Пуассонова структура называется невырожденной, если  $\det \|\omega^{ij}(z)\| \neq 0$ .

Поскольку для любой антисимметрической матрицы  $\omega$  размером  $n \times n$  справедливо соотношение

$$\det \omega = \det \omega^T = \det(-\omega) = (-1)^n \det \omega,$$

то  $\det \omega = 0$  при нечетном  $n$  — пуассонова структура на многообразии нечетной размерности обязательно вырождена.

**Определение.** Пуассонов центр заданной пуассоновой структуры на алгебре  $\mathcal{F}$  — множество элементов  $\mathcal{F}$ , имеющих нулевую скобку Пуассона с любым элементом алгебры  $\mathcal{F}$ .

В силу билинейности скобки Пуассона и тождества Лейбница пуассонов центр образует подалгебру в ассоциативной алгебре  $\mathcal{F}$ . Для невырожденной пуассоновой структуры пуассонов центр состоит только из констант.

Мы рассмотрим пример скобки Пуассона-Ли, определенной на функциях на линейном пространстве, двойственном к некоторой алгебре Ли. Пуассонов тензор такой скобки является линейной функцией координат и определяется структурными константами алгебры Ли, которые обеспечивают его антисимметричность и тождество Якоби.

Общая конструкция скобки Пуассона-Ли следующая. Пусть  $\mathfrak{g}$  (конечномерная) алгебра Ли над полем  $\mathbb{K}$ ,  $\mathfrak{g}^*$  соответствующее двойственное линейное пространство (пространство линейных функционалов на  $\mathfrak{g}$ ) и  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{K}$  невырожденное спаривание двойственных пространств. На алгебре гладких функций  $\mathcal{F} = \text{Fun}(\mathfrak{g}^*)$  скобка Пуассона-Ли задается соотношением<sup>1</sup>:

$$\{f, g\}(\eta) = \langle [df_\eta, dg_\eta], \eta \rangle, \quad \eta \in \mathfrak{g}^*, f, g \in \mathcal{F}. \quad (1)$$

Здесь символ  $d_\eta f$  означает дифференциал функции  $f$ , взятый в точке  $\eta$ . Эта формула требует пояснений. Скобка Пуассона двух функций на пространстве  $\mathfrak{g}^*$  должна быть снова функцией на этом пространстве. В левой части формулы (1) функция  $\{f, g\}$  берется в некоторой произвольной точке  $\eta$  пространства  $\mathfrak{g}^*$ , а в правой части приведено явное вычисление значения функции  $\{f, g\}$  в выбранной точке. Вычисление основано на отождествлении дифференциалов функций  $df_\eta$  и  $dg_\eta$  в точке  $\eta$ , с элементами пространства  $\mathfrak{g}$ . Дело в том, что дифференциал функции на некотором многообразии  $M$ , взятый в заданной точке  $p \in M$  этого многообразия, является линейной функцией на пространстве  $T_p M$ , касательном к многообразию в точке  $p$ . В нашем случае многообразие  $M$  — это линейное пространство  $\mathfrak{g}^*$  и касательное пространство  $T_\eta \mathfrak{g}^*$  в любой точке  $\eta \in \mathfrak{g}^*$  отождествляется с самим  $\mathfrak{g}^*$ . Поэтому дифференциалы  $df_\eta$  и  $dg_\eta$  можно считать элементами пространства  $(\mathfrak{g}^*)^*$ , канонически изоморфного пространству  $\mathfrak{g}$ . Таким образом,  $d_\eta f$  и  $d_\eta g$  отождествляются с некоторыми элементами алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , затем вычисляется их скобка Ли  $[d_\eta f, d_\eta g]$  и, наконец, полученный элемент алгебры Ли посредством спаривания с элементом  $\eta$  двойственного пространства отправляется в числовое поле. Соответствующее число и будет значением функции  $\{f, g\}$  в точке  $\eta$ .

Введем теперь координаты на пространствах  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{g}^*$  и запишем скобку Пуассона-Ли в явном виде через координаты. Заодно получим выражение для пуассонова тензора. Пусть  $\dim \mathfrak{g} = n$  и  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$  — некоторый фиксированный базис в пространстве  $\mathfrak{g}$ . Тогда

<sup>1</sup>Эта скобка называется также пуассоновой структурой Кириллова-Костанта-Сурье.

структура алгебры Ли полностью определяется скобками базисных векторов и соответствующими структурными константами  $C_{ij}^k$ :

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k,$$

где по повторяющемуся индексу  $k$  подразумевается суммирование. Структурные константы  $C_{ij}^k$  антисимметричны по индексам  $i$  и  $j$  и, в силу тождества Якоби, удовлетворяют тождеству

$$C_{ij}^a C_{ak}^r + C_{ki}^a C_{aj}^r + C_{jk}^a C_{ai}^r = 0,$$

для любого фиксированного набора значений индексов  $i, j, k$  и  $r$ .

Введем в пространстве  $\mathfrak{g}^*$  линейных функционалов на  $\mathfrak{g}$  базис  $\{\epsilon^i\}_{1 \leq i \leq n}$ , двойственный к выбранному базису  $\{e_i\}$  в  $\mathfrak{g}$ :

$$\langle e_i, \epsilon^j \rangle = \delta_i^j.$$

Теперь любой линейный функционал  $\eta \in \mathfrak{g}^*$  представляется линейной комбинацией базисных функционалов:  $\eta = z_i \epsilon^i$ . Числа  $z_i = \langle e_i, \eta \rangle$  будут координатами  $\eta$  в пространстве  $\mathfrak{g}^*$  и любая функция  $f \in \text{Fun}(\mathfrak{g}^*)$  будет гладкой функцией  $n$  переменных  $z_i$ :  $f(\eta) = f(z_1, \dots, z_n)$ . Отождествление  $df_\eta$  с элементом алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  в выбранных базисах задается правилом:

$$df_\eta = \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} dz_i \mapsto \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} e_i \in \mathfrak{g}.$$

Таким образом, скобка Пуассона-Ли (1) и ее пуассонов тензор в выбранных координатах принимают вид:

$$\{z_i, z_j\} = C_{ij}^k z_k, \quad \{f, g\}(z) = \partial^i f(z) C_{ij}^k z_k \partial^j g(z), \quad \forall f, g \in \text{Fun}(\mathfrak{g}^*).$$

### Структура Пуассона-Ли, связанная с алгеброй Ли $gl_N$ .

Применим все эти конструкции к матричной алгебре Ли  $\mathfrak{g} = gl_N(\mathbb{C})$ . Как линейное пространство  $gl_N(\mathbb{C})$  совпадает пространством  $\text{Mat}_N(\mathbb{C})$  комплексных квадратных матриц размером  $N \times N$ . Зафиксируем в этом пространстве базис из стандартных матричных единиц  $E_i^j$ , тогда скобка Ли алгебры  $gl_N(\mathbb{C})$  для базисных элементов запишется в виде:

$$[E_{i_1}^{j_1}, E_{i_2}^{j_2}] = \delta_{i_2}^{j_1} E_{i_1}^{j_2} - \delta_{i_1}^{j_2} E_{i_2}^{j_1}.$$

Двойственное пространство линейных функционалов  $\text{Mat}_N^*(\mathbb{C})$  можно отождествить с линейным пространством  $N \times N$  матриц, введя в  $\text{Mat}_N^*(\mathbb{C})$  базис  $\mathcal{E}_i^j$ , двойственный к базису матричных единиц:

$$\langle \mathcal{E}_i^j, A \rangle = a_i^j, \quad \forall A = \|a_i^j\| \in \text{Mat}_N(\mathbb{C}).$$

Обозначив координаты элементов линейного пространства  $\text{Mat}_N^*(\mathbb{C})$  относительно этого базиса символами  $t_i^j$ , получаем пуассонов тензор скобки Пуассона-Ли на алгебре функций  $\mathcal{F}_N = \text{Fun}(\text{Mat}_N^*(\mathbb{C}))$ :

$$\{t_{i_1}^{j_1}, t_{i_2}^{j_2}\}_{PL} = \delta_{i_2}^{j_1} t_{i_1}^{j_2} - \delta_{i_1}^{j_2} t_{i_2}^{j_1},$$

или, вводя матрицу координат  $T = \|t_i^j\|$ :

$$\{T_2, T_1\}_{PL} = P_{12} T_1 - T_1 P_{12}, \quad (2)$$

где  $P_{ij}^{ab} = \delta_i^b \delta_j^a$  — матрица транспозиции.

В этой формуле мы воспользовались компактными матричными обозначениями и соглашением о матричном умножении: если в некотором мономе содержатся матричные множители с одинаковыми номерами матричных пространств, то в соответствующих пространствах подразумевается матричное умножение. Если номера пространств разные, то в каждом из них есть пара свободных матричных индексов (строка и столбец). Например, пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  — некоторые  $N \times N$  матрицы:  $A = \|a_i^j\|_1^N$  и т.д. Из них можно строить матрицы большего размера, тензорно умножая на единичную матрицу, друг на друга и так далее. Например, матрицу  $A$  можно отобразить в матрицы  $N^3 \times N^3$  многими способами, мы будем пользоваться следующими обозначениями

$$A_1 = A \otimes I \otimes I, \quad A_2 = I \otimes A \otimes I, \quad A_3 = I \otimes I \otimes A.$$

Те же правила действуют для вложения  $A$  в тензорные степени любой размерности. При этом  $A_1 B_2 C_3$  — матрица размером  $N^3 \times N^3$  с матричными элементами вида

$$(A_1 B_2 C_3)_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2 j_3} = a_{i_1}^{j_1} b_{i_2}^{j_2} c_{i_3}^{j_3}.$$

А вот объект  $A_1 B_2 C_1$  — матрица размером  $N^2 \times N^2$  с такими матричными элементами

$$(A_1 B_2 C_1)_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = \sum_{k_1=1}^N a_{i_1}^{k_1} b_{i_2}^{j_2} c_{k_1}^{j_1}.$$

*Если* матричные элементы  $a_i^j$  и т.д. лежат в коммутативном кольце (алгебре), то, очевидно,  $A_1 B_2 C_1 = A_1 C_1 B_2$ . Но в общем случае, переставлять эти множители нельзя.

Кроме того, мы будем пользоваться полезным свойством матрицы транспозиции  $P$ :

$$P_{12} X_1 = X_2 P_{12}, \quad P_{12} X_2 = X_1 P_{12}, \quad P_{12} X_3 = X_3 P_{12},$$

с очевидным обобщением на любые индексы матричных пространств  $P_{ab} X_a = X_b P_{ab}$  и так далее. В частности,  $X_{21} = P_{12} X_{12} P_{12}$ . Здесь принято во внимание свойство  $P_{12}^2 = I_{12}$ .

И еще полезно помнить значения частичных следов от матрицы перестановки:

$$\text{Tr}_{(1)} P_{12} = I_2, \quad \text{Tr}_{(2)} P_{12} = I_1, \quad (\text{Tr}_{(1)} P_{12})_i^j := \sum_{a=1}^N P_{a i}^{a j}.$$

В приведенных матричных обозначениях относительно просто проводить достаточно сложные вычисления, которые в индексах выглядят весьма громоздко. Например, проверим прямым вычислением свойство антисимметрии скобки (2):

$$\{T_1, T_2\}_{PL} = P_{12} \{T_2, T_1\}_{PL} P_{12} = P_{12} (P_{12} T_1 - T_1 P_{12}) P_{12} = T_1 P_{12} - P_{12} T_1 = -\{T_2, T_1\}_{PL}.$$

Немного сложнее явная проверка тождества Якоби  $\{T_1, \{T_2, T_3\}_{PL}\}_{PL} + \text{cycle}(1, 2, 3) = 0$ . Читателю настоятельно рекомендуется проделать эту проверку в качестве упражнения.

Скобка (2) вырождена и у нее имеется нетривиальный пуассонов центр в алгебре функций  $\mathcal{F}_N$ .

**Утверждение.** Однородные полиномы от переменных  $t_i^j$  вида  $p^{(k)}(t) = \text{Tr}(T^k)$ , где  $T^k$  —  $k$ -я матричная степень матрицы  $T = \|t_i^j\|$ , принадлежат пуассонову центру скобки (2).

Мы не будем доказывать это утверждение во всей полноте, оставив его проверку в качестве полезного упражнения для читателя. Проиллюстрируем только схему доказательств на простейшем случае  $p^{(1)}(t) = \text{Tr}(T)$ . Достаточно проверить, что скобка Пуассона (2) полинома  $p^{(1)}(t)$  с любой координатной функцией  $t_i^j$  равна нулю<sup>2</sup>. Итак, мы должны доказать, что

$$\{p^{(1)}(t), t_i^j\}_{PL} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{p^{(1)}, T_1\}_{PL} = 0.$$

Вычислим частичный след по 2-му пространству от обеих частей равенства (2) и воспользуемся свойствами частичных следов от матрицы  $P_{12}$ :

$$\{\text{Tr}(T), T_1\}_{PL} = \text{Tr}_{(2)}(P_{12}T_1 - T_1P_{12}) = T_1 - T_1 = 0$$

Аналогично можно доказать пуассон-центральность следов матрицы  $T$  любой степени, если воспользоваться правилом Лейбница для  $\{T_2, T_1^k\}_{PL}$ .

Закончим рассмотрение структуры Пуассона-Ли на алгебре  $\mathcal{F}_N$  замечанием о  $GL(N)$ -инвариантности структуры Пуассона-Ли. На алгебре  $\mathcal{F}_N$  можно разными способами задать действие матричной группы  $GL(N)$ . Мы рассмотрим действие, индуцированное коприсоединенным действием  $GL(N)$  на пространстве  $\text{Mat}_N^*(\mathbb{C})$ . А именно, для любой матрицы  $S \in GL(N)$  зададим преобразование подобия на матрице координат

$$T \mapsto \tilde{T} = STS^{-1}.$$

Очевидно, это преобразование порождает действие элемента группы  $S$  на любую гладкую функцию от  $t_i^j$ . Отметим важное свойство такого действия.

**Утверждение.** Скобка Пуассона-Ли (2) инвариантна относительно коприсоединенного действия группы  $GL(N)$ , то есть, скобка (2) для координат  $\tilde{t}_i^j$  имеет такое же выражение (в терминах  $\tilde{t}$ ), что и скобка исходных координат  $t_i^j$ .

**Доказательство.** Доказательство удобно провести в матричных обозначениях. Воспользуемся тем, что матрица  $S$  является постоянной и ее матричные элементы можно вынести из скобки Пуассона-Ли. Тогда получаем следующее:

$$\begin{aligned} \{\tilde{T}_2, \tilde{T}_1\}_{PL} &= S_1 S_2 \{T_2, T_1\}_{PL} S_1^{-1} S_2^{-1} = S_1 S_2 (P_{12}T_1 - T_1P_{12}) S_1^{-1} S_2^{-1} = \\ &= P_{12} S_2 S_1 T_1 S_1^{-1} S_2^{-1} - S_1 S_2 T_1 S_2^{-1} S_1^{-1} P_{12} = \underline{P_{12} \tilde{T}_1 - \tilde{T}_1 P_{12}}. \end{aligned}$$

При доказательстве мы пользовались коммутативностью  $S_1$  и  $S_2$  друг с другом и коммутативностью  $S_2$  и  $T_1$ . ■

Отметим, что полиномы  $p^{(k)}(t)$  представляют собой инвариантные функции относительно коприсоединенного действия  $GL(N)$ , поскольку преобразование подобия не меняет след матрицы:  $\text{Tr}(T^k) = \text{Tr}(\tilde{T}^k)$ . Оказывается, свойство инвариантности относительно коприсоединенного действия является характеристическим свойством пуассонова центра скобки Пуассона-Ли: пуассонов центр образован всеми  $GL(N)$ -инвариантными элементами и только ими. Первые  $N$  полиномов  $p^{(k)}(t)$ ,  $0 \leq k \leq N$ , являются независимыми генераторами пуассонова центра. Полиномы  $p^{(k)}(t)$  более высокого порядка  $k > N$  функционально зависимы от первых  $N$  полиномов в силу матричного тождества Гамильтона-Кэли на матрицу  $T$ .

<sup>2</sup>В дальнейшем мы ограничимся алгеброй полиномиальных функций на  $gl_N^*$ , для таких функций сделанное утверждение очевидно.

Рассмотрим теперь другие пуассоновы структуры на алгебре  $\mathcal{F}_N$ , которые связаны с так называемыми классическими  $r$ -матрицами.

### Скобка Складина.

Введем на алгебре  $\mathcal{F}_N$  билинейную операцию следующего вида:

$$\{t_{i_1}^{j_1}, t_{i_2}^{j_2}\}_{Sk} = t_{i_1}^{a_1} t_{i_2}^{a_2} r_{a_1 a_2}^{j_1 j_2} - r_{i_1 i_2}^{a_1 a_2} t_{a_1}^{j_1} t_{a_2}^{j_2} \Leftrightarrow \{T_1, T_2\}_{Sk} = T_1 T_2 r_{12} - r_{12} T_1 T_2, \quad (3)$$

где  $r$  представляет собой числовую  $N^2 \times N^2$  матрицу. Распространим эту операцию на произвольные полиномы от переменных  $t_i^j$  посредством правила Лейбница. При каких условиях на числовую матрицу  $r$  приведенная операция будет скобкой Пуассона? Билинейность и правило Лейбница мы обеспечили по определению, остались свойства антисимметричности и тождество Якоби.

Потребуем антисимметричности нашей операции:  $\{T_1, T_2\}_{Sk} + \{T_2, T_1\}_{Sk} = 0$ . Подставляя выражение (3) и учитывая коммутативность координат  $T_1 T_2 = T_2 T_1$ , получаем следующее:

$$0 = T_1 T_2 r_{12} - r_{12} T_1 T_2 + T_2 T_1 r_{21} - r_{21} T_2 T_1 = [T_1 T_2, r_{12} + r_{21}] = 0. \quad (4)$$

Итак, наша скобочная операция антисимметрична, если  $r_{12} + r_{21}$  коммутирует с матрицей  $T_1 T_2$ .

Условия на  $r$ , которые следуют из тождества Якоби на скобку (3), также получаются прямым вычислением, которое мы оставляем для упражнения читателю. Ответ следующий:

$$\{T_1, \{T_2, T_3\}_{Sk}\}_{Sk} + \text{cycle}(1, 2, 3) = [T_1 T_2 T_3, [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}]].$$

Таким образом, для удовлетворения тождества Якоби *достаточно*, чтобы матрица  $r$  удовлетворяла *классическому уравнению Янга-Бакстера*:

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0. \quad (5)$$

Если условия (4) и (5) выполнены, то скобка (3) называется скобкой Складина, а решение  $r$  классического уравнения Янга-Бакстера называется классической  $r$ -матрицей. Есть ли примеры таких матриц? Их можно извлекать из специальных разложений решений соотношения кос или связанного с ним квантового уравнения Янга-Бакстера.

Мы приведем пример классической  $r$ -матрицы, отвечающей  $R$ -матрице Дринфельда-Джимбо. Умножим эту  $R$ -матрицу на матрицу перестановки  $P$  и перейдем к  $\mathcal{R} = PR$ , которая имеет следующий вид в базисе матричных единиц  $E_i^j$ :

$$\mathcal{R} = q \sum_{i=1}^N E_i^i \otimes E_i^i + \sum_{i \neq j}^N E_j^j \otimes E_i^i + (q - q^{-1}) \sum_{i > j}^N E_i^j \otimes E_j^i.$$

Эта матрица удовлетворяет *квантовому уравнению Янга-Бакстера*:

$$\mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{12}. \quad (6)$$

Введем параметр  $h = \log q$  и рассмотрим разложение матрицы  $\mathcal{R}$  при  $h \rightarrow 0$ . В первом порядке по  $h$  (когда  $q^{\pm 1} = 1 \pm h + o(h)$ ) для матрицы  $\mathcal{R}$  получаем

$$\mathcal{R} = I + h r + o(h), \quad r = \sum_{i=1}^N E_i^i \otimes E_i^i + 2 \sum_{i > j}^N E_i^j \otimes E_j^i.$$

Величина  $r$  является классической  $r$ -матрицей. То, что она удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера, легко проверить из разложения произведений  $R$ -матриц в квантовом уравнении Янга-Бакстера (6): линейная по  $\hbar$  часть удовлетворяется тождественно, а квадратичная как раз приводит к классическому уравнению Янга-Бакстера (5).

Пользуясь явным видом классической  $r$ -матрицы, получаем соотношение:

$$r_{12} + r_{21} = 2 \sum_{i,j=1}^N E_i^j \otimes E_j^i = 2P_{12},$$

так что  $[T_1 T_2, r_{12} + r_{21}] = 0$  и условие антисимметричности скобки Складина тоже удовлетворяется.

Заметим, что приведенное выше свойство “симметрической части” классической  $r$ -матрицы  $r_{12} + r_{21} = 2P_{12}$  выполнено для всех классических  $r$ -матриц, полученных в первом порядке по  $\hbar$  из Геккевских  $R$ -матриц. Действительно, если  $R$  — Геккевская  $R$ -матрица, то соответствующая  $\mathcal{R}$ -матрица удовлетворяет уравнению

$$(P_{12} \mathcal{R}_{12})^2 = I + (q - q^{-1}) P_{12} \mathcal{R}_{12}.$$

Подставляя разложение  $\mathcal{R} = I + \hbar r + o(\hbar)$ , получаем в первом порядке по  $\hbar$ :

$$r_{12} + P_{12} r_{12} P_{12} = 2P_{12} \quad \Leftrightarrow \quad r_{12} + r_{21} = 2P_{12}.$$

Если определить симметрическую и антисимметрическую части  $r$ -матрицы формулами

$$r_{12}^{\pm} = \frac{r_{12} \pm r_{21}}{2} \quad \Rightarrow \quad r_{12}^{+} = r_{21}^{+}, \quad r_{12}^{-} = -r_{21}^{-},$$

то, учитывая, что для Геккевского случая  $r_{12}^{+} = P_{12}$ , мы видим, что скобка Складина зависит только от антисимметрической части  $r^{-}$ , так как

$$T_1 T_2 P_{12} - P_{12} T_1 T_2 = 0$$

в силу коммутативности координат  $T_1 T_2 = T_2 T_1$ .

Скобка Складина тоже является вырожденной, но ее пуассонов центр существенно меньше, чем у скобки Пуассона-Ли. Можно показать, что пуассонов центр скобки Складина генерируется единственным полиномом — детерминантом матрицы  $T$ .

### Скобка Семенова Тянь-Шанского.

Последняя пуассонова структура на алгебре  $\mathcal{F}_N$  функций на  $\text{Mat}_N^*(\mathbb{C})$ , которую мы должны обсудить, задается так называемой скобкой Семенова Тянь-Шанского. Ее пуассонов тензор имеет следующий вид

$$\{T_1, T_2\}_{STS} = r_{21} T_1 T_2 - T_1 T_2 r_{12} + T_2 r_{12} T_1 - T_1 r_{21} T_2, \quad (7)$$

где  $r_{12}$  — классическая  $r$ -матрица. Мы будем считать, что  $r$  происходит из Геккевской  $R$ -матрицы. Как мы уже выяснили, для таких  $r$ -матриц выполнено свойство  $r^{+} = P$  и это, как и в случае скобки Складина, гарантирует антисимметричность скобки (7)

$$\{T_1, T_2\}_{STS} = -\{T_2, T_1\}_{STS}$$



Однако, в отличие от скобки Складина, для скобки Семенова Тянь-Шанского существенны как антисимметрическая часть  $r^-$  классической  $r$ -матрицы, так и ее симметрическая часть  $r^+$ .

Скобка Семенова Тянь-Шанского вырождена и ее пуассонов центр содержит в себе пуассонов центр скобки Пуассона-Ли (2).

**Утверждение.** Полиномы  $p^{(k)} = \text{Tr}(T^k)$  принадлежат пуассоновому центру скобки Семенова Тянь-Шанского:

$$\{p^{(k)}(t), t_i^j\}_{STS} = 0.$$

**Замечание.** Можно показать, что весь пуассонов центр скобки Пуассона-Ли генерируется полиномами  $p^{(k)}(t)$  (они иногда называются инвариантами Гельфанда). Строгое доказательство аналогичного утверждения для скобки Семенова Тянь-Шанского автору неизвестно (хотя для классической  $r$ -матрицы Дринфельда-Джимбо это весьма вероятно из деформационных аргументов).

**Геометрическое замечание.** В линейном пространстве  $\text{Mat}_N^*(\mathbb{C})$  определено коприсоединенное действие матричной группы Ли  $GL(N)$ :  $\text{Mat}_N^*(\mathbb{C}) \ni M \mapsto SMS^{-1}$ ,  $S \in GL(N)$ . Орбиты такого действия состоят из матриц с одинаковыми элементарными делителями (то есть, обладающими одинаковым спектром и жордановой структурой). Если мы ограничимся полупростыми матрицами, то их орбиты однозначно фиксируются заданием значений  $N$  следов  $\text{Tr}(M^k)$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Алгебра функций  $\mathcal{F}_N$  ограничивается на эти орбиты: алгебра функций на орбите, содержащей матрицу  $M$ , будет фактор-алгеброй алгебры  $\mathcal{F}_N$  по идеалу, порожденному соотношениями  $\text{Tr}(T^k) = \text{Tr}(M^k)$ . Однако пуассонова структура на эти орбиты ограничивается только для скобки Пуассона-Ли и скобки Семенова Тянь-Шанского, для которых полиномы  $\text{Tr}(T^k)$  принадлежат пуассонову центру. Поэтому только эти пуассоновы структуры пригодны для квантования функций на орбитах коприсоединенного действия группы  $GL(N)$ . Скобка Складина на орбиты не ограничивается. Ее можно ограничить только на группу (например, на группу  $SL(N)$  — матрицы с единичным детерминантом). Квантование этой скобки приводит к алгебре квантованных функций на группе, так называемой  $RTT$  алгебре, исторически одному из первых примеров квантовых групп.

Есть еще одно важное свойство, связывающее скобки Семенова Тянь-Шанского и Пуассона-Ли: они образуют согласованный пучок скобок Пуассона. По определению, это означает, что любая их линейная комбинация

$$\{, \}_{\alpha, \beta} = \alpha \{, \}_{PL} + \beta \{, \}_{STS}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

образует скобку Пуассона. Основная трудность в доказательстве этого факта заключается, очевидно, в проверке тождества Якоби для скобки  $\{, \}_{\alpha, \beta}$ . Это свойство приводит к связи некоммутативных алгебр, полученных квантованием алгебры  $\mathcal{F}_N$  с пуассоновыми структурами (2) и (7).

## Деформационное квантование алгебры с пуассоновой структурой

Рассмотрим теперь процедуру квантования коммутативной алгебры со скобкой Пуассона. Практически это означает переход от коммутативной алгебры  $\mathcal{F}$  к некоммутативной  $\mathcal{F}_h$ , зависящей от “параметра квантования”  $h$  с выполнением ряда условий. При этом можно считать, что алгебра  $\mathcal{F}_h$  получается введением на  $\mathcal{F}$  новой операции умножения  $\star$ .

Сразу отметим, что эта процедура неоднозначна, существует много эквивалентных квантований одной коммутативной алгебры, отличающихся конкретным устройством некоммутативного умножения  $\star$ . Термин “эквивалентное квантование” означает, что соответствующие квантовые алгебры связаны изоморфизмом специального вида. Дадим теперь формальное определение.

**Определение.** Пусть  $\mathcal{F}$  — коммутативная ассоциативная алгебра над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ , снабженная скобкой Пуассона  $\{, \} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ . Некоммутативная алгебра  $\mathcal{F}_h$  над кольцом формальных степенных рядов  $\mathbb{C}[[h]]$  от параметра  $h$  (параметр квантования) называется квантованием алгебры  $\mathcal{F}$  если существует изоморфизм  $\alpha_h \mathbb{C}[[h]]$ -модулей  $\mathcal{F}_h$  и  $\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[[h]]$ :

$$\alpha_h : \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[[h]] \rightarrow \mathcal{F}_h,$$

который удовлетворяет следующим условиям:

- (а) Фактор-алгебра  $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}_h / (h\mathcal{F}_h)$  изоморфна  $\mathcal{F}$  как  $\mathbb{C}$ -алгебра.

**Замечание.** Поясним смысл пункта (а) на примере действия изоморфизма  $\alpha_h$  на произвольный элемент<sup>3</sup>  $a \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[[h]]$ :

$$\alpha_h(a) = \hat{a}_0 + h\hat{a}_1 + h^2\hat{a}_2 + \dots \in \mathcal{F}_h, \quad \forall a \in \mathcal{F}.$$

Согласно пункту (а), если в коммутативной алгебре  $\mathcal{F}$  выполнено свойство  $a \cdot b = c$  то в квантовой алгебре  $\mathcal{F}_h$  должно выполняться равенство  $\hat{c}_0 \equiv \hat{a}_0 \circ \hat{b}_0 \pmod{h}$ , где знак  $\circ$  означает умножение в некоммутативной алгебре  $\mathcal{F}_h$ .

- (б) Пользуясь изоморфизмом  $\alpha_h$ , зададим на коммутативной алгебре  $\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[[h]]$  новое (некоммутативное) умножение произвольных элементов  $f, g \in \mathcal{F}$  по формуле:

$$f \star_h g = \alpha_h^{-1}(\alpha_h(f) \circ \alpha_h(g)) = f \cdot g + h c_1(f, g) + h^2 c_2(f, g) + \dots, \quad (8)$$

где  $f \cdot g$  — коммутативное произведение в  $\mathcal{F}$ ,  $c_k(f, g)$  — элементы алгебры  $\mathcal{F}$ . Такое определение продолжает изоморфизм  $\alpha_h$  до изоморфизма некоммутативных алгебр  $\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[[h]] \simeq \mathcal{F}_h$ :

$$\alpha_h(f \star_h g) = \alpha_h(f) \circ \alpha_h(g).$$

При этом должен иметь место “классический предел”:

$$\frac{f \star_h g - g \star_h f}{h} \equiv (c_1(f, g) - c_1(g, f)) \pmod{h} \equiv \{f, g\} \pmod{h}$$

Рассмотрим теперь квантования коммутативной алгебры функций  $\mathcal{F}_N$  с тремя различными пуассоновыми структурами, описанными выше.

### Квантование структуры Пуассона-Ли на $\mathcal{F}_N = \text{Fun}(\text{Mat}_N^*(\mathbb{C}))$

В данном примере для построения квантовой алгебры будет достаточно кольца полиномов от  $h$ :  $\mathbb{C}[h] \subset \mathbb{C}[[h]]$ . Квантовой алгеброй будет универсальная обертывающая  $U(\mathfrak{gl}_h(N))$ . Рассмотрим  $N^2$ -мерное линейное пространство  $V$  над  $\mathbb{C}$  и зафиксируем в нем базис, элементы которого обозначим  $e_i^j$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ . Построим тензорное произведение  $\mathbb{T}(V) \otimes \mathbb{C}[h]$  где  $\mathbb{T}(V)$  — свободная тензорная алгебра пространства  $V$ . Это пространство

<sup>3</sup>В силу  $\mathbb{C}[[h]]$ -линейности изоморфизма  $\alpha_h$  это пояснение легко распространяется на любой элемент алгебры  $\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[[h]]$ .

обладает естественной структурой ассоциативной алгебры с единицей над кольцом  $\mathbb{C}[h]$ . Рассмотрим фактор-алгебру  $U(\mathfrak{gl}_h(N))$  алгебры  $\mathbb{T}(V) \otimes \mathbb{C}[h]$  по двустороннему идеалу, порожденному квадратично-линейными элементами следующего вида:

$$U(\mathfrak{gl}_h(N)) = \mathbb{T}(V) \otimes \mathbb{C}[h] / \langle e_i^j e_k^s - e_k^s e_i^j - h(\delta_k^j e_i^s - \delta_i^s e_k^j) \rangle.$$

Как  $\mathbb{C}[h]$ -модуль пространство  $U(\mathfrak{gl}_h(N))$  раскладывается в прямую сумму однородных по  $e_i^j$  подмодулей

$$U(\mathfrak{gl}_h(N)) = \bigoplus_{k \geq 0} U^{(k)}(e) \otimes \mathbb{C}[h].$$

Здесь комплексные линейные пространства  $U^{(k)}(e)$  представляют собой линейные оболочки всевозможных мономов  $k$ -й степени от базисных элементов  $e_i^j$ . Нам потребуется выделить базисные наборы мономов в этих пространствах. Для этого введем линейное лексикографическое упорядочение на множестве  $e_i^j$ :

$$e_{i_1}^{j_1} < e_{i_2}^{j_2} \Leftrightarrow \begin{cases} i_1 < i_2 \\ \text{или} \\ i_1 = i_2, j_1 < j_2. \end{cases}$$

Естественно, это один из многих вариантов упорядочения, конкретный выбор для дальнейшего не важен. Согласно теореме Пуанкаре-Биркхофа-Витта, линейный базис в пространстве  $U^{(k)}(e)$  образуют *упорядоченные* мономы  $k$ -го порядка, то есть мономы вида

$$e_{i_1}^{j_1} \circ e_{i_2}^{j_2} \circ \dots \circ e_{i_k}^{j_k}, \quad \text{где} \quad e_{i_1}^{j_1} \leq e_{i_2}^{j_2} \leq \dots \leq e_{i_k}^{j_k}.$$

Ниже мы будем опускать знак  $\circ$  умножения элементов некоммутативной (квантовой) алгебры.

Отметим, также, другой возможный выбор базиса (назовем его Вейлевским базисом) — это всевозможные *полностью симметрические* мономы  $k$ -го порядка, порожденные приведенными выше упорядоченными мономами

$$e_1 e_2 \dots e_k \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} e_{\sigma(1)} e_{\sigma(2)} \dots e_{\sigma(k)},$$

где суммирование ведется по всем перестановкам  $\sigma$  симметрической группы  $k$ -го порядка  $\mathcal{S}_k$ , а символ  $e_s$  есть сокращение для  $e_{i_s}^{j_s}$ .

Проиллюстрируем это утверждение для случая  $N = 2$ . Вводя для краткости обозначения  $\hat{a} < \hat{b} < \hat{c} < \hat{d}$  для упорядоченного базиса  $e_1^1 < e_1^2 < e_2^1 < e_2^2$ , получаем, что базис в  $U^{(k)}$  образуют элементы

$$\hat{a}^{k_1} \hat{b}^{k_2} \hat{c}^{k_3} \hat{d}^{k_4}, \quad k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = k, \quad k_i \geq 0.$$

А вот пример перехода к Вейлевским базисным элементам в  $U^{(3)}$ :

$$\hat{a}\hat{b}\hat{c} \mapsto \frac{1}{6} (\hat{a}\hat{b}\hat{c} + \hat{a}\hat{c}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{c}\hat{a} + \hat{c}\hat{a}\hat{b} + \hat{c}\hat{b}\hat{a}) \quad \hat{a}^2\hat{b} \mapsto \frac{1}{3} (\hat{a}^2\hat{b} + \hat{a}\hat{b}\hat{a} + \hat{b}\hat{a}^2).$$

Вернемся теперь к проблеме квантования алгебры гладких функций  $\mathcal{F}_N = \text{Fun}(\text{Mat}_N^*(\mathbb{C}))$  со скобкой Пуассона-Ли (2). Точнее, мы опишем квантование подалгебры полиномиальных функций в  $\mathcal{P}_N \subset \mathcal{F}_N$ , что, впрочем, вполне достаточно для приложений.

### Утверждение.

Квантованием алгебры  $\mathcal{P}_N$  со скобкой Пуассона-Ли служит алгебра  $U(gl_h(N))$ .

Для доказательства мы явно построим изоморфизм квантования  $\alpha_h$  и опишем некоммутативное произведение  $\star_h$  функций от координат  $t_i^j$ . Как уже отмечалось выше,  $\mathbb{C}[h]$ -линейность изоморфизма  $\alpha_h$  позволяет задать его только на базисных элементах алгебры  $\mathcal{P}_N$ . Как комплексное линейное пространство эта алгебра раскладывается в прямую сумму однородных компонент, аналогичных компонентам  $U^{(k)}$  в алгебре  $U(gl_h(N))$ :

$$\mathcal{P}_N = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{P}^{(k)},$$

причем утверждение о базисе в однородных компонентах  $\mathcal{P}^{(k)}$ , аналогичное теореме Пуанкаре-Биркхофа-Витта, в случае коммутативной алгебры очевидно.

Итак, рассмотрим отображение  $\alpha_h : \mathcal{P}_N \otimes \mathbb{C}[h] \rightarrow U(gl_h(N))$ , которое на базисных элементах алгебры  $\mathcal{P}_N$  имеет вид:

$$\alpha_h(t_{i_1}^{j_1} \dots t_{i_k}^{j_k}) = e_{i_1}^{j_1} \dots e_{i_k}^{j_k}.$$

На всю алгебру  $\mathcal{P}_N \otimes \mathbb{C}[h]$  действие отображения  $\alpha_h$  распространим по линейности. Легко видеть, что построенный изоморфизм  $\mathbb{C}[h]$ -модулей и будет искомым изоморфизмом квантования.

Приведем несколько явных формул для нового умножения  $\star_h$  в случае  $N = 2$ . Скобка Пуассона-Ли (2) для координат  $a, b, c$  и  $d$  в алгебре  $\tilde{\mathcal{P}}_2$  имеет вид

$$\begin{aligned} \{a, b\}_{PL} &= b, & \{a, c\}_{PL} &= -c, & \{a, d\}_{PL} &= 0, \\ \{b, c\}_{PL} &= a - d, & \{b, d\}_{PL} &= b, & \{c, d\}_{PL} &= -c, \end{aligned}$$

скобка Ли алгебры Ли  $gl_h(2)$  отличается от этих выражений только множителем  $h$  в правой части. То есть, перестановочные соотношения между генераторами  $U(gl_h(2))$  записываются в виде

$$\hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a} = h\hat{b}, \quad \hat{a}\hat{c} - \hat{c}\hat{a} = -h\hat{c}, \quad \text{и так далее.}$$

На базисных элементах изоморфизм  $\alpha_h$  действует так:

$$\alpha_h(a^{k_1} \dots d^{k_4}) = \hat{a}^{k_1} \dots \hat{d}^{k_4} \quad \alpha_h^{-1}(\hat{a}^{k_1} \dots \hat{d}^{k_4}) = a^{k_1} \dots d^{k_4}.$$

Чтобы получить обратное отображение на *любом* элементе  $f \in U(gl_h(2))$ , нужно сначала представить  $f$  в виде комбинации базисных элементов, а потом применить обратное отображение на базисных элементах, выписанное выше.

Построим теперь некоммутативное умножение  $\star_h$  в алгебре  $\mathcal{P}_N \otimes \mathbb{C}[h]$  согласно формуле (8). Тогда, например, получаем:

$$a \star_h b = \alpha_h^{-1}(\alpha_h(a)\alpha_h(b)) = \alpha_h^{-1}(\hat{a}\hat{b}) = a \cdot b.$$

А вот для переставленных сомножителей ответ будет другой:

$$b \star_h a = \alpha_h^{-1}(\hat{b}\hat{a}) = \alpha_h^{-1}(\hat{a}\hat{b} - h\hat{b}) = a \cdot b - hb.$$

На промежуточном этапе нам пришлось разложить произведение  $\hat{b}\hat{a}$  в алгебре  $U(gl_h(N))$  в линейную комбинацию базисных векторов. При этом выполнено свойство (б) определения квантования (классический предел):

$$\frac{1}{h}(a \star_h b - b \star_h a) = b = \{a, b\}_{PL}.$$

Другой пример: построим некоммутативное произведение квадратичных мономов из алгебры функций:

$$\begin{aligned} (a \cdot c) \star_h (b \cdot c) &= \alpha_h^{-1}(\hat{a}\hat{c}\hat{b}\hat{c}) = \alpha_h^{-1}(\hat{a}(\hat{b}\hat{c} - h(\hat{a} - \hat{d}))\hat{c}) = \alpha_h^{-1}(\hat{a}\hat{b}\hat{c}^2 - h\hat{a}^2\hat{c} + h\hat{a}\hat{d}\hat{c}) \\ &= \alpha_h^{-1}(\hat{a}\hat{b}\hat{c}^2 - h\hat{a}^2\hat{c} + h\hat{a}\hat{c}\hat{d} + h^2\hat{a}\hat{c}). \end{aligned}$$

В последнем равенстве изоморфизм  $\alpha_h^{-1}$  применяется к линейной комбинации базисных мономов в  $U(gl_h(2))$  и мы получаем ответ:

$$(a \cdot c) \star_h (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c^2 - h a^2 \cdot c + h a \cdot c \cdot d + h^2 a \cdot c$$

Аналогичным образом имеем для переставленных сомножителей

$$(b \cdot c) \star_h (a \cdot c) = \alpha_h^{-1}(\hat{b}\hat{c}\hat{a}\hat{c}) = \alpha_h^{-1}(\hat{a}\hat{b}\hat{c}^2) = a \cdot b \cdot c^2$$

классический предел также выполняется:

$$\frac{(a \cdot c) \star_h (b \cdot c) - (b \cdot c) \star_h (a \cdot c)}{h} \equiv (a \cdot c \cdot d - a^2 \cdot c) \pmod{h} \equiv \{a \cdot c, b \cdot c\}_{PL} \pmod{h}.$$

Отметим одну особенность построенного квантования: изоморфизм  $\alpha_h$  не отображает, вообще говоря, элементы пуассонова центра  $\mathcal{P}_N$  в центр алгебры  $U(gl_h(N))$ . Например, пуассон-центральный элемент  $p^{(2)} = \text{Tr}(T^2) = a^2 + d^2 + 2b \cdot c$  отображается в элемент

$$\alpha_h(a^2 + d^2 + 2b \cdot c) = \hat{a}^2 + \hat{d}^2 + 2\hat{b}\hat{c},$$

который не принадлежит центру  $U(gl_h(2))$ .

Этот недостаток отсутствует в другом (эквивалентном) квантовании, основанном на изоморфизме  $\beta_h$ , который базисные мономы алгебры  $\mathcal{P}_N$  отображает в соответствующие элементы Вейлевского базиса в  $U(gl_h(2))$ . При этом некоммутативное умножение становится другим. Например, для уже разобранных выше произведений элементов  $a$  и  $b$  получаем такие выражения:

$$a \star_h b = \beta_h^{-1}(\beta_h(a)\beta_h(b)) = \beta_h^{-1}(\hat{a}\hat{b}) = \beta_h^{-1}\left(\frac{1}{2}(\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}) + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a})\right) = a \cdot b + \frac{h}{2}b.$$

Аналогично имеем:

$$b \star_h a = a \cdot b - \frac{h}{2}b.$$

Некоммутативное произведение изменилось, но, естественно, классический предел остался прежним. Можно показать, что в этом варианте квантования элементы пуассонова центра  $\mathcal{P}_N$  уже отображаются в центральные элементы алгебры  $U(gl_h(2))$ . Например:

$$\beta_h(a^2 + d^2 + 2b \cdot c) = \hat{a}^2 + \hat{d}^2 + \hat{b}\hat{c} + \hat{c}\hat{b} \in Z(U(gl_h(2))).$$

## Квантование скобок Складина и Семенова Тянь-Шанского

В результате квантования квадратичных скобок Складина и Семенова Тянь-Шанского получаются примеры так называемых квантовых матричных алгебр, структура которых задается  $R$ -матрицами.

Квантование алгебры функций  $\mathcal{F}_N$  со скобкой Складина приводит квантовой матричной  $RTT$ -алгебре. Это неформальное название связано с матричной записью перестановочных соотношений в алгебре. Для  $R$ -матрицы Дринфельда-Джимбо  $RTT$ -алгебра интерпретируется как квантование алгебры функций на матричной группе  $SL(N)$  (после ограничения на фактор-алгебру, порожденную соотношением  $\det T = 1$ ).

**Определение.** Алгебра  $\mathcal{T}(R)$  квантованных функций на группе  $GL(N)$  (или  $RTT$ -алгебра) представляет собой ассоциативную алгебру с единицей, порожденную элементами  $t_i^j$ , удовлетворяющими квадратичным перестановочным соотношениям вида:

$$R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}, \quad T = \|t_i^j\|_1^N,$$

где  $R$  представляет собой  $R$ -матрицу Дринфельда-Джимбо.

Проверим, что из перестановочных соотношений в классическом пределе получается скобка Складина на алгебре функций  $\mathcal{F}_N$ . Для этого умножим матричное равенство для генераторов алгебры  $\mathcal{T}(R)$  на матрицу перестановки и перепишем его в терминах  $\mathcal{R}$ -матрицы:

$$\mathcal{R}_{12}T_1T_2 = T_2T_1\mathcal{R}_{12}.$$

Здесь умножение матричных элементов производится в некоммутативной алгебре, в определении квантования оно обозначалось символом  $\star$ . Подставив разложение  $\mathcal{R}_{12} = I + h r_{12} + o(h)$ , которое следует из разложения параметра  $q^h = 1 + h + \dots \in \mathbb{C}[[h]]$ , получаем следующее

$$T_1 \star T_2 + h r_{12} T_1 \star T_2 - T_2 \star T_1 - h T_2 \star T_1 r_{12} + o(h) = 0,$$

откуда, в свою очередь, следует классический предел

$$\begin{aligned} \frac{T_1 \star T_2 - T_2 \star T_1}{h} &= \frac{1}{h} (T_2 \star T_1 r_{12} - r_{12} T_1 \star T_2 + o(h)) \\ &\equiv (T_1 \cdot T_2 r_{12} - r_{12} T_1 \cdot T_2) \pmod{h} = \{T_1, T_2\}_{Sk} \pmod{h}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли  $T_1 \star T_2 = T_1 \cdot T_2 + h(\dots)$  и приняли во внимание коммутативность умножения функций из  $\mathcal{F}_N$ .

Квантование алгебры  $\mathcal{F}_N$  со скобкой Семенова Тянь-Шанского приводит к другой важной квантовой матричной алгебре — алгебре уравнения отражений.

**Определение.** Алгебра уравнения отражений  $GL(N)$  типа это ассоциативная алгебра  $\mathcal{L}(R)$  с единицей, порожденная элементами  $l_i^j$ , которые удовлетворяют квадратичным перестановочным соотношениям следующего вида:

$$R_{12}L_1R_{12}L_1 = L_1R_{12}L_1R_{12}.$$

Здесь  $R$  представляет собой  $R$ -матрицу Дринфельда-Джимбо.

Отметим, что и в  $RTT$ -алгебре, и в алгебре уравнения отражений можно брать любую  $R$ -матрицу, удовлетворяющую соотношению кос. Получившиеся квадратичные алгебры имеют другую интерпретацию и, вообще говоря, могут быть не связаны с квантованием алгебры функций  $\mathcal{F}_N$ .

Если определяющие соотношения на генераторы алгебры  $\mathcal{L}(R)$  дважды умножить слева на матрицу перестановки  $P_{12}$ , то эти соотношения примут вид, пригодный для вычисления классического предела:

$$\mathcal{R}_{21}L_2\mathcal{R}_{12}L_1 = L_1\mathcal{R}_{21}L_2\mathcal{R}_{12}.$$

Убедитесь сами, что в классическом пределе из этих соотношений получается скобка Семенова Тянь-Шанского.

Помимо алгебраической структуры, введенные нами квантовые матричные алгебры  $\mathcal{T}(R)$ ,  $\mathcal{L}(R)$  и  $U(gl_h(N))$  обладают важными структурами (коумножением, коединицей и отображением антипода), что превращает их в так называемые алгебры Хопфа. Этот факт, в частности, сильно упрощает построение теории представлений, поскольку позволяет строить тензорные произведения модулей над алгебрами, определять сопряженные представления в дуальных пространствах и так далее. Свойствам структур и их конкретному виду на различных алгебрах посвящена следующая тема наших лекций.