

Задача 1. Пусть X - гладкая плоская кубика над полем $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$ характеристики 0. Как мы знаем, X является абелевой группой, в которой в качестве точки ноль 0 может быть выбрана любая наперед заданная точка. Обозначим через X_n подгруппу n -кручения в X , то есть подгруппу $X_n := \{a \in X \mid na = 0\}$. Пусть в качестве точки 0 выбрана точка перегиба на X .

- 1) Докажите, что $X_3 \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Мы уже знаем, геометрический смысл X_3 , а именно, X_3 есть множество точек перегиба на X .
- 2) Укажите, какой конечной группе изоморфна группа X_2 , и найдите ее геометрический смысл.
- 3) Укажите, какой конечной группе изоморфна группа X_4 , и найдите ее геометрический смысл.

Задача 2. Системой Штейнера на конечном множестве M мощности n называется такая совокупность W подмножеств из 3 элементов множества M , называемых *прямыми*, если любые две различные точки из M содержатся в единственной прямой. Примером системы Штейнера на множестве $M = X_3$ точек перегиба в X является множество W из 12 прямых, проходящих через тройки точек перегиба на X .

Перечислите все возможные системы Штейнера для $n \leq 10$.

Задача 3. (1) Пусть X - гладкая кубика. Докажите, что в любой точке $a \in X \cap He(X)$ кубика X пересекается с гессианом $He(X)$ трансверсально, то есть гессиан $He(X)$ также неособ в точке a , и касательные прямые $\mathbb{T}_a X$ и $\mathbb{T}_a He(X)$ различны. (Трансверсальное пересечение в точке a обозначается так: $X \pitchfork_a He(X)$.)

- (2) Докажите, что прямая $\mathbb{T}_a X$ касается гессиана $He(X)$ в некоторой точке b , отличной от точки a .
- (3) Докажите, что a - точка перегиба гессиана $He(X)$.

Задача 4. Даны две кубические кривые X_1 и X_2 , распавшиеся на тройки различных прямых. Пусть кривые X_1 и X_2 пересекаются в 9 различных точках. Тогда кубика X , проходящая через 8 из этих точек, проходит и через 9-ую точку.

Задача 5. Покажите, что множество 9 точек перегиба X_3 на гладкой кубике X "не имеют модулей" в следующем смысле: для любой другой гладкой кубики Y множество Y_3 ее точек перегиба получается из множества X_3 проективным преобразованием плоскости.