19.04.2022 Механика 2022

Семинар № 14

Гамильтонов формализм

Краткое напоминание.

Пусть $L(q, \dot{q}, t)$ – Лагранжиан механической системы.

$p_i := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ – обобщённые импульсы.

Считаем, что $\det \left\| \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| \neq 0$ – матрица Гессиана не вырождена. Тогда из определения p_i можно выразить $\dot{q}_i = f(q, p)$ и

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, f(q, p)) \equiv p_i$$

подставили вместо $\dot{q}_i$

Переход к Гамильтонову формализму даётся преобразованием Лежандра:

$$H(q,p,t) = \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t)\right)\Big|_{\dot{q}=f(q,p)}$$

Эта функция - Гамильтониан системы.

<u>Уравнения движения</u>

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

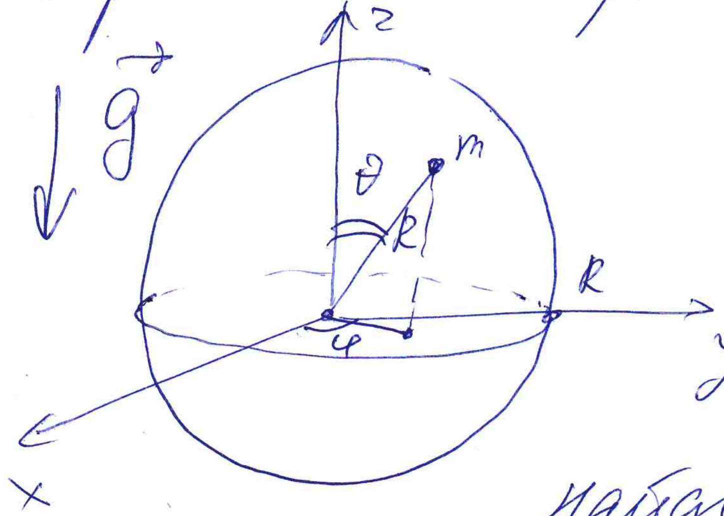
Зам. Для не сингулярных механических систем (матр. Гессиана не вырождена) Гамильтонов и Лагранжев формализмы эквивалентны. В частности, можно вернуться в Лагранжев формализм с помощью обратного преобразования Лежандра:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Rightarrow p_i = \varphi_i(q,\dot{q}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(q,\dot{q},t) = \left(\sum p_i \dot{q}_i - H(q,p,t)\right)\Big|_{p=\varphi(q,\dot{q})}$$

Пример 1.

Частица массы m движется по поверхности сферы радиуса R в поле тяжести $\vec{g} = (0, 0, -g)$, направленном против оси $O\vec{z}$.



Используя сферические координаты θ и φ на поверхности сферы,

найдите:

а) Выражение для Лагранжиана системы;

б) Выражения для обобщённых импульсов

в) Гамильтониан системы и Гамильтоновы уравнения движения.

Решение:

а) $$L = \frac{mR^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right) - mgR\cos\theta.$$

б) Обобщённые импульсы:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta \Rightarrow \boxed{\dot\theta = \frac{p_\theta}{mR^2}} \quad (*)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mR^2\sin^2\theta\,\dot\varphi \Rightarrow \boxed{\dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}}$$

в) Гамильтониан:

$$H(\theta,\varphi,p_\theta,p_\varphi) = \left(\dot\theta p_\theta + \dot\varphi p_\varphi - L\right)\Big|_{\substack{\dot\theta = p_\theta/mR^2 \\ \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}}} =$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mR^2\sin^2\theta} + mgR\cos\theta$$

Уравнения движения:

$$\dot\theta = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \qquad \dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}$$

Эти уравнения есть просто $(*)$

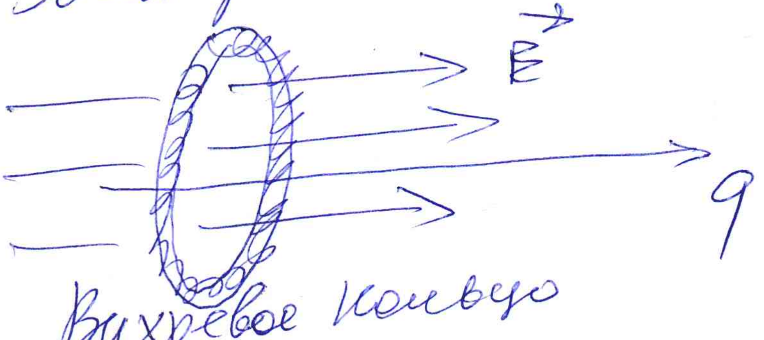
$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = mgR\sin\theta - \frac{p_\varphi^2\cos\theta}{mR^2\sin^3\theta}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \text{Const}$$

Этот обобщённый импульс совпадает с z-компонентой углового момента $\vec{J} = [\vec{r} \times \vec{p}]$

<u>Пример 2</u>

Феноменологический (модельный) Лагранжиан, приближённо описывающий движение заряженных вихрей в жидком гелии в однородном электрическом поле:



$$L = -\frac{A^2}{4\dot{q}} + F\cdot q,$$

$A>0$ и $F>0$ — константы.

а) Построить Гамильтониан

б) Написать Гамильтоновы уравнения движения в) Решить эти уравнения =б= и сравнить с Лагранжевыми уравнениями движения.

<u>Решение:</u>

а) Обобщенный импульс:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{A^2}{4\dot{q}^2} \Rightarrow \dot{q} = \frac{A}{2\sqrt{p}}$$

(рассматриваем движение $\dot{q} > 0$, второй вариант $\dot{q} = -\frac{A}{2\sqrt{p}}$).

$$H(q,p) = \left(p\dot{q} - L(q,\dot{q})\right)\Big|_{\dot{q} = \frac{A}{2\sqrt{p}}} =$$

$$= A\sqrt{p} - qF, \quad p > 0.$$

б-в) Уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{A}{2\sqrt{p}} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = F = Const \Rightarrow \boxed{p = p_0 + F \cdot t} \\ p(0) = p_0 > 0 \quad q(0) = q_0 \end{cases}$$

нач. импульс

$$\dot{q} = \frac{A}{2\sqrt{p_0 + Ft}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q(t) = \frac{A}{F}\left(\sqrt{p_0+Ft} - \sqrt{p_0}\right) + q_0 \\ p(t) = p_0 + Ft \end{cases}$$

С течением времени импульс вихревого кольца линейно растет, а скорость $\dot{q}$ – уменьшается. Это означает, что растет масса вихревого кольца: оно втягивает в себя вещество из окружающей среды.

Лагранжевы уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \Rightarrow \frac{A^2}{2}\frac{\ddot{q}}{\dot{q}^3} = -F$$

Умножая на $\dot{q}$, понизим порядок:

$$\frac{A^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{q}^2}{2}\right) = -F\dot{q}^4$$

Дальше можно решить, сделав замену $\dot{q}^2 = u(t)$.

Пример 3

Гамильтониан, описывающий распространение света в неоднородной преломляющей среде:

$$H(\vec{r},\vec{p}) = c\,\frac{|\vec{p}|}{n(\vec{r})} \qquad \vec{r},\vec{p} \in \mathbb{R}^3,$$

где c — постоянная (скорость света в вакууме), $n(\vec{r})$ — показатель преломления (физ. характеристика) среды в точке $\vec{r}$, $\vec{p}$ — импульс светового луча.

Найдите Лагранжиан этой системы.

Решение: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Скорость $\dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dfrac{c\,p_i}{|\vec{p}|\,n(\vec{r})}$

Надо выразить p_i через $\dot{x}_i$ и x_i:

$$\dot{\vec{r}}^{\,2} = \sum \dot{x}_i^2 = \frac{\vec{p}^{\,2} c^2}{|\vec{p}|^2 n^2(\vec{r})} = \frac{c^2}{n^2(\vec{r})} \quad =9=$$

(Согласуется с определением $n(\vec{r})$. $n(\vec{r}) \geq 1$ всегда $n = 1$ – вакуум).

$\Rightarrow$ $|\dot{\vec{r}}| = \dfrac{c}{n(\vec{r})}$ и наше выражение для $\dot{x}_i$ принимает вид

$$\frac{\dot{x}_i}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{p_i}{|\vec{p}|}, \quad |\dot{\vec{r}}| = \frac{c}{n(r)}$$

$H(\vec{r}, \vec{p})$ не зависит от t $\Rightarrow$ $H = E =$ Const на траектории луча света

$$\Rightarrow |\vec{p}| = \frac{E\, n(\vec{r})}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{\dot{x}_i\, n(\vec{r})}{c} \cdot \frac{E\, n(\vec{r})}{c} = \frac{E n^2}{c^2} \dot{x}_i \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

Лагранжиан:

$$L = (p_i \dot{x}_i - H)\Big|_{p_i = \varphi(x_i, \dot{x}_i)} =$$

$$= \left(E \frac{n^2}{c^2} \sum \dot{x}_i^2 - \frac{c}{n} \cdot E \frac{n}{c}\right) = E - E = 0!$$

Дело в том, что компоненты
скорости (как и Лагранжев язык) плохо приспособлены для описания движения фотонов.

Пример 4

Лагранжиан частицы, движущейся вдоль прямой $O\vec{x}$ имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right)$$

а) Найдите Гамильтониан и выпишите Гамильтоновы уравн. движения.

б) Напишите компоненты Гамильтонова векторного поля X_H и найдите его особые точки (в особой точке векторное поле X_H обращается в 0).

в) Нарисуйте фазовый портрет системы в плоскости (q,p) в окрестности найденных особых точек.

Решение:

а) $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}\left(\frac{x^4}{2} - x^2\right)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = kx(x^2-1)$$

б) Правые части уравнений движения и есть компоненты поля $-X_H$ (напомним, что $X_H = \{H, \cdot\}$)

$$\dot{x} = -X_H \triangle x \quad \dot{p} = -X_H \triangle p$$

$$\Rightarrow X_H = -\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} + kx(1-x^2)\frac{\partial}{\partial p}$$

Особые точки $p=0$, $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = -1$

В этих точках $\dot{p} = 0$ $\dot{x} = 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = 0 & p_1(t) = 0 \\ x_2(t) = 1 & p_2(t) = 0 \\ x_3(t) = -1 & p_3(t) = 0 \end{cases}$$ — 3 стационарных решение.

При движении $H = const$, т.к. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ фазовые кривые

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}\left(\frac{x^4}{2} - x^2\right) = E$$

Потенциал $V(x) = \frac{k}{2}\left(\frac{x^4}{2} - x^2\right)$;