Введение в теорию интегральных уравнений. Листок 4.

Срок сдачи – 13 мая.

1. Построить полные ортонормированные системы собственных функций однородных уравнений Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром и решить соответствующие неоднородные уравнения:

a) $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \dfrac{x}{2}$, $\quad K(x,t) = \begin{cases} x(2-t), & 0 \le x \le t, \\ t(2-x), & t \le x \le 1 \end{cases}$

b) $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = xe^x$, $\quad K(x,t) = \begin{cases} \operatorname{sh} x \operatorname{sh}(t-1), & 0 \le x \le t, \\ \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x-1), & t \le x \le 1 \end{cases}$

c) $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = x-1$, $\quad K(x,t) = \begin{cases} x-t, & 0 \le x \le t, \\ t-x, & t \le x \le 1 \end{cases}$

d) $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{\pi/2} K(x,t)\varphi(t)dt = \cos 2x$, $\quad K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \le x \le t, \\ \sin t \cos x, & t \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

2. С помощью преобразования Лапласа решить следующие интегральные уравнения:

a) $\varphi(x) = e^x - \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt$,

b) $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt$,

c) $\varphi(x) = \cos x - \int\limits_0^x (x-t)\cos(x-t)\varphi(t)dt$,

d) $\varphi(x) = x + \int\limits_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt$,

e) $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)dt$,

f) $\varphi(x) = 1-2x-4x^2 + \int\limits_0^x [3+6(x-t)-4(x-t)^2]\varphi(t)dt$,

g) $\varphi(x) = \operatorname{sh} x - \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)dt$,

h) $\varphi(x) = 1 + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt$.