

1. Пусть q и p — канонически сопряженные переменные одномерной системы: $\{q, p\} = 1$. Совершим каноническое преобразование, заданное производящей функцией второго рода $F_2(q, P) = q^2 e^P$.

- а) Найдите явный вид функциональной зависимости новых переменных Q и P от исходных переменных q и p : $Q = Q(q, p)$, $P = P(q, p)$.
- б) Найдите производящую функцию первого рода $F_1(q, Q)$, задающую то же самое каноническое преобразование.

2. Пусть q и p — канонически сопряженные переменные одномерной системы: $\{q, p\} = 1$. Рассмотрим преобразование к новым переменным Q и P , заданное формулами:

$$Q = -p, \quad P = q + Ap^2,$$

где A — некоторая константа.

- а) Докажите, что это преобразование — каноническое.
 - б) Найдите производящую функцию первого рода $F_1(q, Q)$, отвечающую этому преобразованию.
 - в) Найдите производящую функцию второго рода $F_2(q, P)$, отвечающую этому преобразованию.
3. Частица массы m движется вдоль оси $O\vec{x}$ под действием постоянной силы $(\vec{F})_x = F$.
- а) Напишите лагранжиан и перейдите к гамильтониану этой механической системы.
 - б) Совершите каноническое преобразование, описанное в задаче 2, и получите новый гамильтониан $\tilde{H}(Q, P)$. Докажите, что выбором константы A его можно привести к виду $\tilde{H}(P)$.
 - в) Решите при этом значении константы A уравнения Гамльтона для переменных Q и P , а затем получите решения для исходных переменных q и p , выполнив обратное преобразование.

4. Одномерный гармонический осциллятор задается гамильтонианом:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

- а) Считая начальные данные q_0 и p_0 канонически сопряженными переменными со скобкой Пуассона

$$\{q_0, p_0\} = 1,$$

докажите, что решения уравнений движения $q(t)$ и $p(t)$ в любой момент времени тоже образуют пару канонически сопряженных величин:

$$\{q(t), p(t)\}_{q_0, p_0} = 1.$$

- б) Найдите производящую функцию первого рода $F_1(q_0, q(t), t)$, отвечающую каноническому преобразованию временной эволюции

$$(q_0, p_0) \rightarrow (q(t), p(t)).$$

- в) Найдите производящую функцию второго рода $F_2(q_0, p(t), t)$, отвечающую каноническому преобразованию временной эволюции.