Семинар № 15

(I) Разбор 5 минутки прошлого занятия

(II) Скобки Пуассона углового момента.

$\vec{M} = [\vec{x} \times \vec{p}]$ $\quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – радиус-вектор частицы

$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ – импульс

$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$ $\quad \{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$ –

– канонические скобки Пуассона.

Компоненты векторного произведения в $\mathbb{R}^3$ удобно записывать с помощью полностью антисимметрического тензора третьего ранга:

$\forall\ \vec{a}$ и $\vec{b}$ из $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{[\vec{a} \times \vec{b}]_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k}$$

Сумма по j и k от 1 до 3

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если совпадают 2 индекса} \\ (-1)^{|\sigma|}, & \text{где } |\sigma| \text{ – чётность} \end{cases}$$

перестановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$.

Таким образом ε_{ijk} имеет 6 ненулевых компонент (из 27 возможных)!

$\varepsilon_{123} = 1$, $\varepsilon_{213} = -1$, ...

С помощью ε-тензора удобно доказывать формулы векторного анализа.

Например: $[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{c}] =$
$= \vec{b}\cdot[\vec{c}\times\vec{a}]$

Доказательство тривиально:

$[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c} = \sum_{i=1}^{3}[\vec{a}\times\vec{b}]_i c_i =$

$= \sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_j b_k c_i = \sum_{j=1}^{3} a_j[\vec{b}\times\vec{c}]_j =$

$= \vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{c}]$ и т.п.

Найдём скобки Пуассона компонент углового момента с компонентами ~~координат~~ и импульса: радиус-вектора

$\underline{\underline{\{M_i, x_j\}}} = \{\varepsilon_{iab}x_a p_b, x_j\} =$

сумма по a и b

$= \varepsilon_{iab}x_a\{p_b, x_j\} = -\varepsilon_{iaj}x_a = \underline{\underline{\varepsilon_{ija}x_a}}$

Аналогично:

$$\{M_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k$$

На лекции посчитали скобки компонент момента $\vec{M}$:

$\{M_1, M_2\} = M_3$, другие скобки — по циклу $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

$\boxed{\text{У}}$ $\underline{\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k}$

Это общее свойство скобки Пуассона компонент M_i с любой <u>вектор-функцией</u>.

$\boxed{\text{Пример 1}}$. Найти скобки M_i со <u>скалярными</u> функциями:

$$\{M_i, \vec{x}^2\}, \quad \{M_i, \vec{p}^2\} \quad \text{и} \quad \{M_i, \vec{x}\vec{p}\}.$$

<u>Решение:</u> $\vec{x}^2 = x_j x_j$ — сумма по j

$$\{M_i, x_j x_j\} = 2x_j \{M_i, x_j\} =$$

$$= 2\,\varepsilon_{ijk} x_k x_j \equiv 0.$$

<u>Сумма</u> по k и j

$$\{M_i, \vec p \vec x\} = \{M_i, p_j\} x_j + p_j \{M_i, x_j\} =$$

$$= \varepsilon_{ijk} p_k x_j + \varepsilon_{ijk} x_k p_j =$$

$$= [\vec x \times \vec p]_i + [\vec p \times \vec x]_i \equiv 0.$$

Пример 2.

$$\{M_i, \vec M^2\} = 2 M_j \underbrace{\{M_i, M_j\}} =$$

$$= 2\, \varepsilon_{ijk} M_k M_j \equiv 0.$$

$\vec M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ — элемент Пуассонова центра скобки компонент углового момента.

<u>Замечание</u>

Если $\vec a$ — постоянный "вектор", то $(\vec x \cdot \vec a) \equiv x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$ — <u>не</u> скаляр, а просто линейная форма от $\vec x$. И скобка с $\vec M$ уже <u>не 0</u>.

Пример 3 Вычислить $\{(\vec M \cdot \vec a), (\vec x \cdot \vec b)\}$.

<u>Решение:</u>

сумма по i и j

$$\{(\vec M \cdot \vec a), (\vec x \cdot \vec b)\} = a_i b_j \{M_i, x_j\} =$$

$$= \underline{a_i b_j \varepsilon_{ijk}}\, x_k = [\vec a \times \vec b] \cdot \vec x \not\equiv 0$$

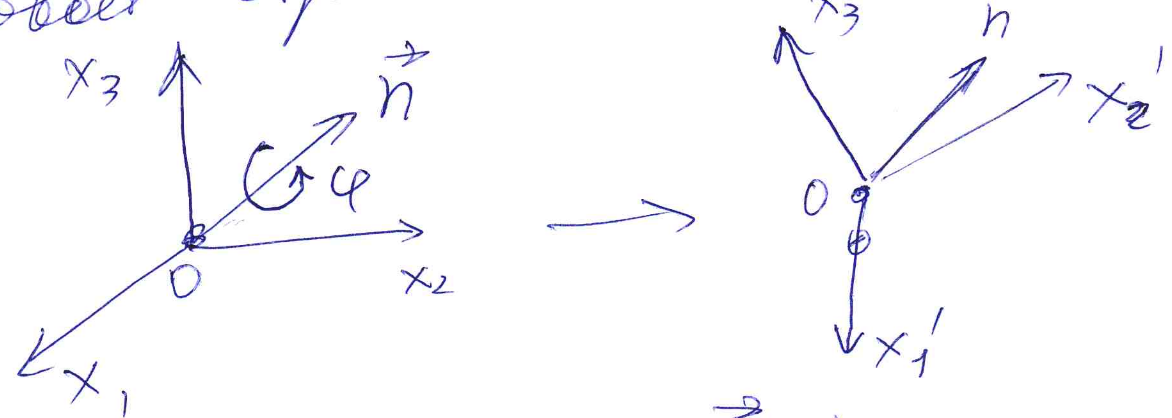
=5=

Рассмотрим связь компонент углового момента M_i и вращений пространства $\mathbb{R}^3$ (группа $SO(3)$).

При вращениях вокруг начала координат декартовы координаты вектора $\vec{x}$ преобразуются ортогональной матрицей с единичным детерминантом:

$$x_i \to \tilde{x}_i = O_{ij}\, x_j\ , \quad \det \|O_{ij}\| = 1$$

Пусть O задаёт вращение вокруг единичного вектора $\vec{n}$ (определяет ось вращения) на угол φ против часовой стрелки:



Тогда $O = \exp\left(\varphi\,(\vec{n}\cdot\vec{\Omega})\right)$

$$\vec{n}\cdot\vec{\Omega} = n_1\Omega_1 + n_2\Omega_2 + n_3\Omega_3$$

3×3 матрицы Ω_a — генераторы группы $SO(3)$ в трёхмерном представлении в $\mathbb{R}^3$:

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Матричные элементы генераторов задаются единой формулой:

$$(\Omega_i)_{ab} = \varepsilon_{iab}$$

(легко проверить по $(*)$).

Рассмотрим ∞ малый поворот ($\varphi \simeq 0$) и разложим $\tilde{x}(\vec{n}, \varphi)$ до <u>первого</u> порядка по φ:

$$\tilde{x}_i(\vec{n}, \varphi) = O_{ij}(\vec{n}, \varphi)\, x_j =$$

$$= x_i + \underbrace{\varphi\,(\vec{n}\vec{\Omega})_{ij}\, x_j}_{\varphi\,\underline{\delta x_i}\text{ — так обозначим.}} + o(\varphi)$$

Учитывая вид матричных элементов Ω, получаем такое равенство:

$$\delta x_i = n_a (\Omega_a)_{ij} x_j = n_a \underline{\varepsilon_{aij} x_j} =$$

Сумма по всем повторяющимся индексам

$$= n_a \{ M_a, x_i \} = \{ (\vec{n} \cdot \vec{M}), x_i \}$$

Совершенно аналогично для $\vec{p}$:

$$\delta p_i = \{ (\vec{n} \cdot \vec{M}), p_i \}$$

Как следствие: $\forall \ f(\vec{x}, \vec{p})$:

$$f(\tilde{x}, \tilde{p}) = f(x, p) + \varphi \delta f + o(\varphi)$$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i} \{ (\vec{n} \cdot \vec{M}), x_i \} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \{ (\vec{n} \cdot \vec{M}), p_i \} =$$

$$= \{ (\vec{n} \cdot \vec{M}), f \}.$$

Итак, компоненты M_i порождают

Гамильтоновы векторные поля

$X_i \equiv X_{M_i} = \{M_i, \cdot\}$,

генерирующие изменение функций при бесконечно-малых поворотах вокруг координатных осей.

Частный случай: если f не меняется при поворотах системы координат, то есть, является скалярной функцией: $f(\tilde{x}, \tilde{p}) = f(x, p)$, то её скобки Пуассона с M_i равны 0: $\{f, M_i\} \equiv 0$

Мы это видели на примерах с $\vec{x}^2$, $\vec{p}^2$ и $(\vec{p}\vec{x})$ (а => и с любой скалярной ф-цией от $\vec{x}$ и $\vec{p}$).

$\boxed{\text{Пример 4.}}$ (Если будет время).

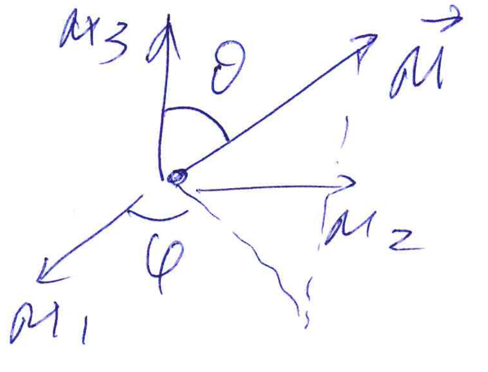
В примере 2 мы видели, что $\vec{M}^2$ — элемент Пуассонова центра скобки: $\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k$ — скобка, связанная с алгеброй $so(3)$.

$\boxed{V}$ Сферы $\vec{M}^2 = R^2$ —

— листы симплектического слоения пространства $\mathbb{R}^3$ с координатами M_i и скобкой алгебры $so(3)$.

Ограничение скобки на эти листы считается аналогично тому, как это делалось на прошлых семинарах для гиперболоида.

Введем сферические координаты:



$|\vec{M}| = \mu$

$M_1 = \mu \sin\theta \cos\varphi$

$M_2 = \mu \sin\theta \sin\varphi$

$M_3 = \mu \cos\theta$

$\mu = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \sqrt{\vec{M}^2}$ — Пуассон-центральная ф-ция.

На сфере $\vec{M}^2 = R^2 \Leftrightarrow \mu = R > 0$

2 координаты: θ и φ.

Рассмотрим функции:

$$\cos\vartheta = \frac{m_3}{\mu} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\{\cos\vartheta, \operatorname{tg}\varphi\} = (\cos\vartheta)'\{\vartheta,\varphi\}(\operatorname{tg}\varphi)' =$$

$$= -\sin\vartheta\{\vartheta,\varphi\}\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$\{\cos\vartheta, \operatorname{tg}\varphi\} = \left\{\frac{m_3}{\mu}, \frac{m_2}{m_1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(-1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}\right) = -\frac{1}{\mu\cos^2\varphi}$$

$$\Downarrow$$

$$\{\vartheta,\varphi\} = \left.\frac{1}{\mu\sin\vartheta}\right|_{\mu=R} = \frac{1}{R\sin\vartheta}$$

$\boxed{\text{Зам}}$ Эта скобка сингулярна при $\vartheta \to 0$ и $\vartheta \to \pi$, но это связано с общей сингулярностью сферической замены на оси Oz.

Вблизи полюсов $(0,0,1)$ и $(0,0,-1)$ нужно пользоваться другой сферической картой, например с полюсами на оси Ox.