Группа кос, квантовые группы и приложения

Листок 5. Квантовые матричные алгебры

Рекомендуемый срок сдачи 22.05.2022

---

1. Матрицы q-антисимметризаторов $A^{(k)}_{12\dots k}$ и q-симметризаторов $S^{(k)}_{12\dots k}$ (образы в R-матричном представлении примитивных идемпотентов алгебры Гекке, отвечающих соответственно одностолбцовым и однострочным диаграммам Юнга) задаются следующими рекуррентными формулами:

$$A^{(1)} = I, \qquad A^{(k+1)}_{12\dots k+1} = \frac{1}{(k+1)_q}\, A^{(k)}_{12\dots k}\Big(q^k - k_q R_k\Big) A^{(k)}_{12\dots k}, \quad k \ge 1,$$

$$S^{(1)} = I, \qquad S^{(k+1)}_{12\dots k+1} = \frac{1}{(k+1)_q}\, S^{(k)}_{12\dots k}\Big(q^{-k} + k_q R_k\Big) S^{(k)}_{12\dots k}, \quad k \ge 1.$$

Напомним, что $R_i = R_{i\,i+1}$, где R является R-матрицей $GL(N)$ типа. Найдите явные выражения (в терминах q-антисимметризаторов и q-симметризаторов) для частичных R-следов $\mathrm{Tr}_{R(r+1\dots k)}A^{(k)}$ и $\mathrm{Tr}_{R(r+1\dots k)}S^{(k)}$, где $0 \le r \le k-1$.

Полезный совет. Расчеты упрощаются, если использовать формулы “q-арифметики”:

$$q^{-a} b_q + q^b a_q = (b+a)_q, \qquad q^a b_q - q^b a_q = (b-a)_q, \qquad x_q := \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}.$$

2. Рассмотрите RTT-алгебру $\mathcal{T}(R)$ для $N = 2$ с R-матрицей Дринфельда-Джимбо:

$$R T_1 T_2 = T_1 T_2 R, \qquad R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

а) Получите явные выражения перестановочных соотношений между генераторами a, b, c и d.

б) Докажите, что квантовый детерминант $\det_R T = ad - qbc$ является центральным элементом RTT алгебры.

в) Пользуясь явными перестановочными соотношениями генераторов, докажите, что линейное подпространство $\mathcal{T}^{(m)}$, образованное *однородными* полиномами от генераторов RTT алгебры фиксированной степени m совпадает с линейной оболочкой *упорядоченных* мономов
$$a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} d^{k_4}, \quad k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = m, \quad k_i \ge 0.$$

г) Можо доказать, что определенные выше упорядоченные мономы линейно независимы. Пользуясь этим обстоятельством, найдите размерности соответствующих линейных подпространств $\mathcal{T}^{(m)}$ и сравните с коммутативным случаем. Этот расчет дает прямое доказательство плоскости квантования алгебры функций на пространстве $\mathrm{Mat}^*_2(\mathbb{C})$ со скобкой Склянина.

3. Пусть $L = \|L_i^i\|$ — матрица генераторов алгебры уравнения отражений, удовлетворяющая квадратичному матричному равенству:

$$R_{12}L_1R_{12}L_1 - L_1R_{12}L_1R_{12} = 0. \qquad (*)$$

Введем обозначения для "копий" матрицы L:

$$L_{\overline{1}} = L_1 = L_{\underline{1}}, \quad L_{\overline{k}} = R_{k-1}L_{\overline{k-1}}R_{k-1}^{-1}, \quad L_{\underline{k}} = R_{k-1}^{-1}L_{\underline{k-1}}R_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

а) Докажите, что перестановочные соотношения $(*)$ на генераторы алгебры уравнения отражений могут быть записаны в следующих эквивалентных формах:

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad R_k^{\pm1}L_{\overline{k}}\,L_{\overline{k+1}} = L_{\overline{k}}\,L_{\overline{k+1}}\,R_k^{\pm1} \quad \Leftrightarrow \quad R_k^{\pm1}L_{\underline{k+1}}\,L_{\underline{k}} = L_{\underline{k+1}}\,L_{\underline{k}}\,R_k^{\pm1}, \quad \forall\, k \geq 1.$$

б) Докажите тождество для произведения копий матрицы генераторов алгебры уравнения отражений:

$$L_1L_{\overline{2}}\ldots L_{\overline{k}} \equiv L_{\underline{k}}\ldots L_{\underline{2}}\,L_1, \quad \forall\, k \geq 1.$$

Указание. Воспользуйтесь индукцией по k.

4. Рассмотрим алгебру $\mathcal{L}(R)$ модифицированного уравнения отражений (квадратично-линейную), задаваемую R-матрицей $GL(N)$ типа:

$$R_{12}L_1R_{12}L_1 - L_1R_{12}L_1R_{12} = R_{12}L_1 - L_1R_{12}, \qquad L = \|L_i^j\|,.$$

Пусть V — N-мерное комплексное линейное пространство и набор N векторов $\{e_i\}_{1\leq i\leq N}$ является базисом V.

а) Докажите, что гомоморфизм ассоциативных алгебр $\rho : \mathcal{L}(R) \to \mathrm{End}(V)$, сопоставляющий генераторам L_i^j линейные операторы на V с действием

$$\rho(L_i^j) \triangleright e_k = e_iC_k^j,$$

задает *неприводимое* представление алгебры $\mathcal{L}(R)$ в пространстве V. Здесь $C_1 = \mathrm{Tr}_{(2)}\Psi_{21}$, где Ψ — кособратная матрица к R.

Указание. Для доказательства неприводимости воспользуйтесь невырожденностью матрицы C.

б) Докажите, что центральные элементы $p_k(L) = \mathrm{Tr}_R L^k$ в представлении ρ задаются скалярными операторами:

$$\rho(p_k) = \chi_k\,\mathrm{id}_V$$

и вычислите коэффициенты χ_k.