Теория функций комплексного переменного – 2022
Листок 11

1. Пусть регулярная ветвь $g(z)$ функции $\sqrt{z^2-4}$ определена в области D, представляющей собой комплексную плоскость с разрезом по полуокружности $|z|=2$, $\mathrm{Im}z \geq 0$, причем главная часть ряда Лорана функции $g(z)$ в окрестности ∞ равна z. Вычислите интеграл

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{g(z)-3z}.$$

2. Вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(2+g(z))\sin z},$$

где $g(z)$ – однозначная ветвь функции $\sqrt{z-1}$ в круге $|z|<\frac{1}{2}$, такая, что $g(0)=i$.

3. Пусть $f(z)$ – регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{2z-8}$ в комплексной плоскости с разрезом по лучу $[4, 4-i\infty]$ такая, что $f(8)=-1-i\sqrt{3}$. Вычислите интеграл

$$I = \oint_{|z-2|=3/2} \frac{dz}{f(z)-z+2}.$$

4. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$.

5. Вычислите интеграл с помощью вычетов: $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx \quad (0<\alpha<1).$

6. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \frac{dx}{x+1} \quad (-1<\alpha<1)$; б) $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}}\,dx$;

в) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{(2+x)^2(4-x^2)}}$.

7. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$; б) $\int\limits_0^\infty \frac{\log x\,dx}{x^2+a^2}$ $(a > 0)$; в) $\int\limits_0^\infty \frac{\log x\,dx}{(x+1)(x+2)^2}$;
г) $\int\limits_0^\infty \frac{\log x\,dx}{x^2-1}$.

8. Вычислите интегралы с помощью вычетов:
а) $\int\limits_0^\infty \left(\frac{\log x}{x-1}\right)^2 dx$; б) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,\log x dx}{x^2+1}$; в) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\log|x^2-1|}{x^2+1}\,dx$;
г) $\int\limits_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2}\,\frac{dx}{1+x^2}$.