Семинар 15

Задача 1. Пусть X - гладкая плоская кубика над полем $\mathbf{k} = \overline{\mathbf{k}}$ характеристики 0. Как мы знаем, X является абелевой группой, в которой в качестве точки ноль 0 может быть выбрана любая наперед заданная точка. Обозначим через X_n подгруппу n-кручения в X, то есть подгруппу $X_n := \{a \in X \mid na = 0\}$. Пусть в качестве точки 0 выбрана точка перегиба на X.
Укажите, какой конечной группе изоморфна группа X_4, и найдите ее геометрический смысл.

Задача 2. *Системой Штейнера* на конечном множестве M мощности n называется такая совокупность W подмножеств из 3 элементов множества M, называемых *прямыми*, если любые две различные точки из M содержатся в единственной прямой. Примером системы Штейнера на множестве $M = X_3$ точек перегиба в X является множество W из 12 прямых, проходящих через тройки точек перегиба на X.
Перечислите все возможные системы Штейнера для $n \leqslant 10$.

Задача 3. Покажите, что множество 9 точек перегиба X_3 на гладкой кубике X "не имеют модулей" в следующем смысле: для любой другой гладкой кубики Y множество Y_3 ее точек перегиба получается из множества X_3 проективным преобразованием плоскости.

Задача 4. Пусть a - точка перегиба на гладкой кубике X. Как нам известно, поляра $P_a(X)$ распадается: $P_a(X) = \mathbb{T}_a X \cup I_a$. Прямая I_a называется *гармонической полярой точки* a. Пусть координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ в $\mathbb{P}^2$ выбраны так, что $a = (0:0:1)$, $\mathbb{T}_a X = \{x_0 = 0\}$, $I_a = \{x_2 = 0\}$. Покажите, что тогда в аффинных координатах $x = x_1/x_0,\ y = x_2/x_0$ кубика X имеет уравнение в форме Вейерштрасса $y^2 = f_3(x)$, где $X \cap I_a = \{(\beta_1, 0), (\beta_2, 0), (\beta_3, 0)\}$, а $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - корни многочлена $f_3(x)$.

Напоминание о линейных системах.
1) Пусть $(x_0 : x_1)$ - координаты в $\mathbb{P}^1$. Линейная система квадратичных форм $W = \{F_\lambda := \lambda_1 F_1(x_0, x_1) + \lambda_2 F_2(x_0, x_1) \mid \lambda := (\lambda_1 : \lambda_2) \in \mathbb{P}^1\}$ называется *пучком квадратичных форм на* $\mathbb{P}^1$*, порожденным формами* $F_1(x_0, x_1)$ *и* $F_2(x_0, x_1)$. Соответственно, линейная система квадрик (то есть пар точек) $\mathcal{P} := \{Q_\lambda = (a_1(\lambda), a_2(\lambda)) := V(F_\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{P}^1\}$ называется *пучком квадрик на* $\mathbb{P}^1$*, порожденным квадриками* $Q_1 = V(F_1)$ *и* $Q_2 = V(F_2)$. Точка $a \in \mathbb{P}^1$ называется *неподвижной точкой пучка квадрик* $\mathcal{P}$, если она содержится во всех квадриках пучка $\mathcal{P}$.
2) Пусть $(x_0 : x_1 : x_2)$ - координаты в $\mathbb{P}^2$. Линейная система квадратичных форм $W = \{F_\lambda := \lambda_1 F_1(x_0, x_1, x_2) + \lambda_2 F_2(x_0, x_1, x_2) \mid \lambda := (\lambda_1 : \lambda_2) \in \mathbb{P}^1\}$ называется *пучком квадратичных форм на* $\mathbb{P}^2$*, порожденным формами* $F_1(x_0, x_1, x_2)$ *и* $F_2(x_0, x_1, x_2)$. Соответственно, линейная система коник $\mathcal{P} := \{C_\lambda := V(F_\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{P}^1\}$ называется *пучком коник на* $\mathbb{P}^2$*, порожденным кониками* $C_1 = V(F_1)$ *и* $C_2 = V(F_2)$, и обозначается $\mathcal{P} = \langle C_1, C_2 \rangle$. Множество $B(\mathcal{P}) := C_1 \cap C_2 = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{P}^1} C_\lambda$ называется *базисным множеством пучка коник* $\mathcal{P} = \langle C_1, C_2 \rangle$.
Нижеследующая задача является простым упражнением на применение данных определений.

Задача 5. 1) Докажите, что каждый пучок квадрик без неподвижных точек на $\mathbb{P}^1$ является инволюцией, то есть существует инволюция f на $\mathbb{P}^1$ такая, что все квадрики пучка суть пары точек вида $(a, f(a))$, где $a \in \mathbb{P}^1$.
2) Дан пучок коник $\mathcal{P}$ на $\mathbb{P}^2$ с базисным множеством, состоящим из 4 точек: $B(\mathcal{P}) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Покажите, что никакие 3 из точек a_1, a_2, a_3, a_4 не коллинеарны, и постройте все распавшиеся коники пучка $\mathcal{P}$.
3) Пусть X - гладкая плоская кубика, и a_1, a_2, a_3 - три коллинеарные точки перегиба на X. Проверьте, что поляры $P_{a_i}(X),\ i = 1, 2, 3$, принадлежат пучку коник.

Задача 6. Пусть X - гладкая плоская кубика. Пучок кубик $\mathcal{P}(X) = \langle X,\ He(X) \rangle$, порожденный кубикой и ее гессианом, называется *сизигическим пучком.*
(1) Докажите, что для сизигического пучка $\mathcal{P} = \mathcal{P}(X)$ и любой точки a из базисного множества B пучка $\mathcal{P}$ поляры $P_a(Y),\ Y \in \mathcal{P}$, образуют пучок коник. Обозначим этот пучок $\mathcal{Q}_a(\mathcal{P})$.
(2) Докажите, что каждая коника $C = P_a(Y),\ Y \in \mathcal{P}$, этого пучка $\mathcal{Q}_a(\mathcal{P})$ распадается так: $C = \mathbb{T}_a Y \cup I_a$, где I_a - гармоническая поляра точки a относительно X (определение гармонической поляры см. в задаче 4).

(3) Докажите, что для любой прямой $l \subset \mathbb{P}^2$ через точку a найдется единственная кубика Y пучка $\mathcal{P}$ такая, что $l = \mathbb{T}_a Y$.

Задача 7. В условиях предыдущей задачи докажите, что для любой гладкой кубики Y сизигического пучка $\mathcal{P}$ точка a является точкой перегиба.

Задача 8. В условиях предыдущей задачи пусть $He(X)$ - гладкая кубика и $l_1,\ l_2,\ l_3$ - три касательные к $He(X)$, проходящие через точку a и отличные от $\mathbb{T}_a He(X)$. Докажите, что три кубики $Y_i \in \mathcal{P}$, определяемые однозначно (согласно задаче 6.(3)) условием $\mathbb{T}_a Y_i = l_i,\ i = 1, 2, 3$, суть в точности те кубики, для которых $He(Y_i) = He(X),\ i = 1, 2, 3$. (*Указание*: убедитесь, что X - одна из этих трех кубик Y_1, Y_2, Y_3.)