Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

Лекция 14. Точки Вейерштрасса

Для любой пары точек проективной прямой существует ее автоморфизм, переводящий первую точку во вторую. То же самое справедливо и для любой эллиптической кривой. Однако для кривых рода $g \geq 2$ аналогичное утверждение уже неверно, и точки на них отличаются друг от друга. Формула Римана–Роха позволяет “измерить” это отличие.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

Для любой пары точек проективной прямой существует ее автоморфизм, переводящий первую точку во вторую. То же самое справедливо и для любой эллиптической кривой. Однако для кривых рода $g \geq 2$ аналогичное утверждение уже неверно, и точки на них отличаются друг от друга. Формула Римана–Роха позволяет "измерить" это отличие.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

Применим ее к ситуации, когда дивизор D эффективен и сосредоточен в одной точке $x \in C$, $D = k \cdot x$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Lemma

Если $k \geq 2g - 1$, то $l(k \cdot x) = k - g + 1$.

Действительно, при таких k размерность $i(k \cdot x) = 0$ для любой точки $x \in C$, поскольку не существует голоморфных 1-форм с нулем порядка $2g - 1$ или выше.

Лекция 14. Точки Вейерштрасса

Для любой пары точек проективной прямой существует ее автоморфизм, переводящий первую точку во вторую. То же самое справедливо и для любой эллиптической кривой. Однако для кривых рода $g \geq 2$ аналогичное утверждение уже неверно, и точки на них отличаются друг от друга. Формула Римана–Роха позволяет "измерить" это отличие.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

Применим ее к ситуации, когда дивизор D эффективен и сосредоточен в одной точке $x \in C$, $D = k \cdot x$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Lemma

Если $k \geq 2g - 1$, то $l(k \cdot x) = k - g + 1$.

Действительно, при таких k размерность $i(k \cdot x) = 0$ для любой точки $x \in C$, поскольку не существует голоморфных 1-форм с нулем порядка $2g - 1$ или выше.
Таким образом, последовательность $l(k \cdot x)$ при $k \geq 2g - 1$ ведет себя одинаково для всех точек $x \in C$; а вот при $1 \leq k \leq 2g - 2$ ее поведение зависит от выбора точки.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

$l(k \cdot x) = k - g + 1$ при $k \geq 2g - 1$.

Лекция 14. Точки Вейерштрасса

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

$l(k \cdot x) = k - g + 1$ при $k \geq 2g - 1$.

Lemma

Последовательность $l(k \cdot x)$ монотонно неубывающая, причем $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x)$, если на C не существует мероморфной функции с единственным полюсом в точке x, порядок которого в точности равен $k+1$, и $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x) + 1$ в противном случае.

В частности, для всех $k \geq 2g - 1$ выполняется равенство $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x) + 1$.

Theorem

Если C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$, то $l(D) = d - g + 1 + i(D)$.

$l(k \cdot x) = k - g + 1$ при $k \geq 2g - 1$.

Lemma

Последовательность $l(k \cdot x)$ монотонно неубывающая, причем $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x)$, если на C не существует мероморфной функции с единственным полюсом в точке x, порядок которого в точности равен $k+1$, и $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x) + 1$ в противном случае.

В частности, для всех $k \geq 2g - 1$ выполняется равенство $l((k+1) \cdot x) = l(k \cdot x) + 1$.

Corollary

На отрезке $1 \leq k \leq 2g - 1$ последовательность $l(k \cdot x)$ имеет $g - 1$ подскоков на 1.

Lemma

Пусть k_1, k_2 — две точки подскока последовательности $l(k \cdot x)$. Тогда $k_1 + k_2$ также является точкой подскока. Другими словами, множество точек подскока является подполугруппой в группе $\mathbb{N}$ натуральных чисел по сложению.

Действительно, если на C есть мероморфная функция f_1 с полюсом порядка k_1 в x, не имеющая других полюсов, и мероморфная функция f_2 с полюсом порядка k_2 в x, не имеющая других полюсов, то их произведение $f_1 f_2$ является мероморфной функцией с полюсом порядка $k_1 + k_2$ в x, не имеющей других полюсов.

Lemma

Пусть k_1, k_2 — две точки подскока последовательности $l(k \cdot x)$. Тогда $k_1 + k_2$ также является точкой подскока. Другими словами, множество точек подскока является подполугруппой в группе $\mathbb{N}$ натуральных чисел по сложению.

Действительно, если на C есть мероморфная функция f_1 с полюсом порядка k_1 в x, не имеющая других полюсов, и мероморфная функция f_2 с полюсом порядка k_2 в x, не имеющая других полюсов, то их произведение $f_1 f_2$ является мероморфной функцией с полюсом порядка $k_1 + k_2$ в x, не имеющей других полюсов.

Remark. Полного независимого описания всех встречающихся подполугрупп в $\mathbb{N}$ такого вида не существует.

Lemma

Пусть k_1, k_2 — две точки подскока последовательности $l(k \cdot x)$. Тогда $k_1 + k_2$ также является точкой подскока. Другими словами, множество точек подскока является подполугруппой в группе $\mathbb{N}$ натуральных чисел по сложению.

Действительно, если на C есть мероморфная функция f_1 с полюсом порядка k_1 в x, не имеющая других полюсов, и мероморфная функция f_2 с полюсом порядка k_2 в x, не имеющая других полюсов, то их произведение $f_1 f_2$ является мероморфной функцией с полюсом порядка $k_1 + k_2$ в x, не имеющей других полюсов.

Remark. Полного независимого описания всех встречающихся подполугрупп в $\mathbb{N}$ такого вида не существует.

Значения параметра k, для которых $l(k \cdot x) = l((k-1) \cdot x)$ называются *лакунами* в точке x. Число лакун в каждой точке равно g и все они находятся на начальном отрезке $\{1, 2, \dots, 2g-1\}$ значений параметра k. При $g \geq 1$ значение $k = 1$ является лакуной в любой точке x: $l(1 \cdot x) = l(0 \cdot x) = 1$. Множество лакун образует дополнение к полугруппе подскоков.

Example

При $g=0$ последовательность $l(k\cdot x)$ имеет вид $2,3,4,\dots$ для любой точки $x\in\mathbb{C}P^1$.
При $g=1$ последовательность $l(k\cdot x)$ имеет вид $1,2,3,4,\dots$ для любой точки $x\in C$.

Example

При $g = 0$ последовательность $l(k \cdot x)$ имеет вид $2, 3, 4, \dots$ для любой точки $x \in \mathbb{C}P^1$.
При $g = 1$ последовательность $l(k \cdot x)$ имеет вид $1, 2, 3, 4, \dots$ для любой точки $x \in C$.

Example

Всякая кривая рода $g = 2$ гиперэллиптическая, и последовательность $l(k \cdot x)$ зависит от выбора точки x. Если x является неподвижной точкой гиперэллиптической инволюции, то $l(2 \cdot x) = 2$, т.е. значение $k = 2$ является точкой подскока. Поскольку на отрезке $\{1, 2, 3\}$ значений k должно быть две лакуны, то это значения $k = 1$ и $k = 3$. Таким образом, последовательность значений $l(k \cdot x)$ имеет вид $1, 2, 2, 3, 4, 5, \dots$.
Если же x не является неподвижной точкой гиперэллиптической инволюции, то $l(2 \cdot x) = 1$, а значит лакуны это $k = 1$ и $k = 2$; последовательность $l(k \cdot x)$ имеет вид $1, 1, 2, 3, 4, \dots$.

Definition

Точка $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется *точкой Вейерштрасса*, если $l(k \cdot x) = 2$ для некоторого значения $k \leq g$ (эквивалентно, если $l(g \cdot x) \geq 2$). Точка Вейерштрасса называется *нормальной*, если последовательность ее лакун имеет вид $1, 2, 3, \dots, g-1, g+1$.

Definition

Точка $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется *точкой Вейерштрасса*, если $l(k \cdot x) = 2$ для некоторого значения $k \leq g$ (эквивалентно, если $l(g \cdot x) \geq 2$). Точка Вейерштрасса называется *нормальной*, если последовательность ее лакун имеет вид $1, 2, 3, \dots, g-1, g+1$.

Пусть $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_g \leq 2g-1$ — последовательность лакун точки x гладкой кривой C рода g.

Definition

Весом точки $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется величина $\sum_{i=1}^{g}(a_i - i)$.

Лекция 14. Точки Вейерштрасса

Definition

Точка $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется *точкой Вейерштрасса*, если $l(k \cdot x) = 2$ для некоторого значения $k \leq g$ (эквивалентно, если $l(g \cdot x) \geq 2$). Точка Вейерштрасса называется *нормальной*, если последовательность ее лакун имеет вид $1, 2, 3, \dots, g-1, g+1$.

Пусть $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_g \leq 2g - 1$ — последовательность лакун точки x гладкой кривой C рода g.

Definition

Весом точки $x \in C$ гладкой алгебраической кривой C рода g называется величина $\sum_{i=1}^{g}(a_i - i)$.

В частности, если x — не точка Вейерштрасса, то ее вес равен 0. Вес нормальной точки Вейерштрасса равен 1.

Lemma

Если $x \in C$ — точка Вейерштрасса, то ее вес положителен.

Theorem

Сумма весов всех точек гладкой алгебраической кривой C рода g равна $(g-1)g(g+1)$.

Theorem

Сумма весов всех точек гладкой алгебраической кривой C рода g равна $(g-1)g(g+1)$.

Corollary

Число точек Вейерштрасса на всякой гладкой алгебраической кривой конечно и не превосходит $(g-1)g(g+1)$, где g — род кривой.

Theorem

Сумма весов всех точек гладкой алгебраической кривой C рода g равна $(g-1)g(g+1)$.

Доказательство.

Theorem

Сумма весов всех точек гладкой алгебраической кривой C рода g равна $(g-1)g(g+1)$.

Доказательство.

Пусть $\omega_1,\dots,\omega_g$ — базис в пространстве голоморфных 1-форм на кривой C. Запишем эти 1-формы в локальной координате z в окрестности данной точки $x \in C$: $\omega_i = \varphi_i(z)dz$. Составим из коэффициентов ϕ_i этих 1-форм и их производных $g \times g$-*матрицу Вронского*

$$W(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_1'(z) & \dots & \varphi_1^{(g-1)}(z) \\ \varphi_2(z) & \varphi_2'(z) & \dots & \varphi_2^{(g-1)}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_g(z) & \varphi_g'(z) & \dots & \varphi_g^{(g-1)}(z) \end{pmatrix}.$$

Theorem

Сумма весов всех точек гладкой алгебраической кривой C рода g равна $(g-1)g(g+1)$.

Доказательство.
Пусть $\omega_1,\dots,\omega_g$ — базис в пространстве голоморфных 1-форм на кривой C. Запишем эти 1-формы в локальной координате z в окрестности данной точки $x \in C$: $\omega_i = \varphi_i(z)dz$. Составим из коэффициентов ϕ_i этих 1-форм и их производных $g \times g$-*матрицу Вронского*

$$W(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_1'(z) & \dots & \varphi_1^{(g-1)}(z) \\ \varphi_2(z) & \varphi_2'(z) & \dots & \varphi_2^{(g-1)}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_g(z) & \varphi_g'(z) & \dots & \varphi_g^{(g-1)}(z) \end{pmatrix}.$$

Lemma

Вес точки кривой совпадает с порядком нуля определителя $|W(z)|$ матрицы Вронского (вронскиана) в этой точке.

Lemma

Вес точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

В частности, если точка кривой не является точкой Вейерштрасса, то вронскиан в ней отличен от нуля. Ясно также, что порядок нуля вронскиана в данной точке не зависит от выбора базиса в пространстве голоморфных 1-форм.

Lemma

Вес точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

В частности, если точка кривой не является точкой Вейерштрасса, то вронскиан в ней отличен от нуля. Ясно также, что порядок нуля вронскиана в данной точке не зависит от выбора базиса в пространстве голоморфных 1-форм.

Вывод теоремы из леммы: выбор базиса в пространстве голоморфных 1-форм определяет отображение кривой C в пространство, двойственное пространству голоморфных сечений тензорного произведения линейных расслоений

$$T^\vee C \otimes (T^\vee)^{\otimes 2} C \otimes (T^\vee)^{\otimes 3} C \otimes \dots \otimes (T^\vee)^{\otimes g} C.$$

Степень этого линейного расслоения равна

$$(2g-2) + 2 \cdot (2g-2) + 3 \cdot (2g-2) + \dots + g \cdot (2g-2) = (g-1)g(g+1).$$

Эта степень совпадает с суммой порядков нулей любого его голоморфного сечения, в том числе, вронскиана в любом базисе.

Lemma

Вес точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

Lemma

Вес точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

Доказательство. Утверждение локально. Пусть $x \in C$. Построим индуктивно базис в пространстве голоморфных 1-форм:

- в качестве ω_1 возьмем 1-форму, отличную от нуля в т. x (такая 1-форма существует, поскольку у кокасательного расслоения к C нет базисных точек);
- разложим пространство голоморфных 1-форм в прямую сумму прямой $\mathbb{C}\omega_1$ и дополнительного подпространства, состоящего из 1-форм, имеющих нуль в т. x; пусть b_2 — наименьший порядок нуля в x у 1-форм из этого подпространства;
- выберем в построенном подпространстве 1-форму с нулем порядка b_2 в x и возьмем ее в качестве ω_2;
- разложим построенное подпространство голоморфных 1-форм в прямую сумму прямой $\mathbb{C}\omega_2$ и дополнительного подпространства, состоящего из 1-форм, имеющих в т. x нуль порядка $> b_2$; пусть b_3 — наименьший порядок нуля в x у 1-форм из этого подпространства; и т.д.

Lemma

Порядок точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

Получили упорядоченный базис 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_g$, порядки нулей элементов которого в точке x равны $0 = b_1 < b_2 < \dots < b_g$. Матрица Вронского такого набора 1-форм имеет вид

$$W(z) = \begin{pmatrix} 1 + \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{b_2} + \dots & b_2 z^{b_2 - 1} + \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{b_g} + \dots & b_g z^{b_g - 1} + \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Порядок нуля вронскиана равен $0 + (b_2 - 1) + (b_3 - 2) + \dots + (b_g - g + 1)$.

Lemma

Порядок точки кривой совпадает с порядком нуля вронскиана в этой точке.

Получили упорядоченный базис 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_g$, порядки нулей элементов которого в точке x равны $0 = b_1 < b_2 < \dots < b_g$. Матрица Вронского такого набора 1-форм имеет вид

$$W(z) = \begin{pmatrix} 1 + \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{b_2} + \dots & b_2 z^{b_2 - 1} + \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{b_g} + \dots & b_g z^{b_g - 1} + \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Порядок нуля вронскиана равен $0 + (b_2 - 1) + (b_3 - 2) + \dots + (b_g - g + 1)$.
С другой стороны, условие $\mathrm{Res}_x f\omega = 0$ накладывает на коэффициенты главной части функции f в точке x линейные условия, количество независимых среди которых в точности равно требуемому числу.

Гладкая плоская кривая C степени $d = 4$ (квартика) является кривой рода $g = (d-1)(d-2)/2 = 3$. Каждая точка x гладкой плоской квартики определяет мероморфную функцию степени 3 на ней — проекцию из этой точки. Одну из прямых, проходящих через x, мы можем считать бесконечностью. Если y — точка простого перегиба кривой C, то проходящая через нее касательная пересекает C еще в одной точке, которую мы обозначим через x.

Лекция 14. Точки перегиба плоских квартик

Гладкая плоская кривая C степени $d = 4$ (квартика) является кривой рода $g = (d-1)(d-2)/2 = 3$. Каждая точка x гладкой плоской квартики определяет мероморфную функцию степени 3 на ней — проекцию из этой точки. Одну из прямых, проходящих через x, мы можем считать бесконечностью. Если y — точка простого перегиба кривой C, то проходящая через нее касательная пересекает C еще в одной точке, которую мы обозначим через x.

Проекция, определяемая точкой $x \in C$, имеет в точке y полюс третьего порядка и не имеет других полюсов (прямая xy не пересекает C в других точках). Тем самым, $l(3 \cdot y) \geq 2$, т.е. y является точкой Вейерштрасса кривой C. На общей гладкой квартике имеется 24 точки простого перегиба. Поскольку $(g-1)g(g+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, мы заключаем, что все точки простого перегиба имеют вес 1, а лакуны в этих точках равны $1, 2, 4$.

Лекция 14. Точки перегиба плоских квартик

Гладкая плоская кривая C степени $d = 4$ (квартика) является кривой рода $g = (d-1)(d-2)/2 = 3$. Каждая точка x гладкой плоской квартики определяет мероморфную функцию степени 3 на ней — проекцию из этой точки. Одну из прямых, проходящих через x, мы можем считать бесконечностью. Если y — точка простого перегиба кривой C, то проходящая через нее касательная пересекает C еще в одной точке, которую мы обозначим через x.
Проекция, определяемая точкой $x \in C$, имеет в точке y полюс третьего порядка и не имеет других полюсов (прямая xy не пересекает C в других точках). Тем самым, $l(3 \cdot y) \geq 2$, т.е. y является точкой Вейерштрасса кривой C. На общей гладкой квартике имеется 24 точки простого перегиба. Поскольку $(g-1)g(g+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, мы заключаем, что все точки простого перегиба имеют вес 1, а лакуны в этих точках равны $1, 2, 4$.
Каждая гладкая плоская квартика является канонической кривой рода 3, при каноническом вложении негиперэллиптической кривой рода 3 точки Вейерштрасса переходят в точки перегиба. Точки Вейерштрасса канонических кривых старших родов представляют собой обобщения точек перегиба плоских квартик.

Лекция 14. Конечность группы автоморфизмов

Theorem

Группа автоморфизмов гладкой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ *конечна.*

Лекция 14. Конечность группы автоморфизмов

Theorem

Группа автоморфизмов гладкой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ *конечна.*

Lemma

Если автоморфизм гладкой алгебраической кривой C *рода* g *имеет более* $2g + 2$ *неподвижных точек, то он тождественный.*

Theorem

Группа автоморфизмов гладкой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ конечна.

Lemma

Если автоморфизм гладкой алгебраической кривой C рода g имеет более $2g+2$ неподвижных точек, то он тождественный.

Доказательство. Пусть $\eta : C \to C$ — автоморфизм, имеющий s неподвижных точек. Возьмем эффективный дивизор D, состоящих из $g+1$ точек кратности 1, ни одна из которых не является неподвижной точкой автоморфизма η. По теореме Римана–Роха, $l(D) = (g+1) - g + 1 + i(D) = 2 + i(D)$. Поэтому существует функция $f : C \to \mathbb{C}P^1$, имеющая полюса не выше первого порядка, причем только в точках дивизора D. Функция $f - f \circ \eta$ имеет не более чем $2g+2$ полюсов первого порядка и не менее s нулей (всякая неподвижная точка автоморфизма η является ее нулем). Поэтому $s \leq 2g+2$.

Theorem

Группа автоморфизмов гладкой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ конечна.

Lemma

Если автоморфизм гладкой алгебраической кривой C рода g имеет более $2g+2$ неподвижных точек, то он тождественный.

Доказательство. Пусть $\eta : C \to C$ — автоморфизм, имеющий s неподвижных точек. Возьмем эффективный дивизор D, состоящих из $g+1$ точек кратности 1, ни одна из которых не является неподвижной точкой автоморфизма η. По теореме Римана–Роха, $l(D) = (g+1) - g + 1 + i(D) = 2 + i(D)$. Поэтому существует функция $f : C \to \mathbb{C}P^1$, имеющая полюса не выше первого порядка, причем только в точках дивизора D. Функция $f - f \circ \eta$ имеет не более чем $2g+2$ полюсов первого порядка и не менее s нулей (всякая неподвижная точка автоморфизма η является ее нулем). Поэтому $s \leq 2g+2$.

Lemma

Минимальное количество точек Вейерштрасса на кривой рода g равно $2g+2$, и оно достигается только для гиперэллиптических кривых.

Семинар 14.

- Докажите, что на кривой C рода $g \geq 2$ значение $k = 2$ не является лакуной в точке $x \in C$ в том и только в том случае, когда C гиперэллиптическая и x — неподвижная точка гиперэллиптической инволюции.
- Докажите, что всякая точка Вейерштрасса гиперэллиптической кривой является неподвижной точкой гиперэллиптической инволюции.
- Докажите *теорему Клиффорда*: для любой точки x негиперэллиптической кривой C рода $g \geq 3$ справедливо неравенство $l(k \cdot x) < \frac{k}{2} + 1$ для всех $k = 1, 2, \dots, 2g - 1$.

Семинар 14.

- Докажите, что на негиперэллиптической кривой рода $g \geq 3$ есть по крайней мере $2g + 6$ точек Вейерштрасса.
- Вычислите лакуны в точке перегиба второго порядка гладкой плоской квартики.
- Найдите точки перегиба квартики Клейна

$$x^3 y + y^3 z + z^3 x = 0$$

и опишите действие группы автоморфизмов этой кривой на множестве точек перегиба.

Семинар 14.

- Найдите все точки Вейерштрасса плоской кривой Ферма $x^4 + y^4 = 1$ и укажите их тип. Воспользовавшись этим результатом, найдите группу автоморфизмов кривой Ферма.
- Докажите *лемму Шенберга*: если у автоморфизма гладкой алгебраической кривой рода $g \geq 2$ больше 4 неподвижных точек, то все они являются точками Вейерштрасса.