А. К. Погребков

Введение в теорию интегральных уравнений

Высшая школа экономики
2-й семестр 2021/2022 гг.

Содержание

1. Лекция

1.1. **Стандартная терминология.** Мы будем называть действительную функцию $f(x)$ квадратично интегрируемой (синонимы: квадратично суммируемой, интегрируемой с квадратом) на отрезке $[a,b]$, если $f^2(x)$ интегрируема на $[a,b]$. То же самое для комплексно значной функции $f(x)$: она квадратично интегрируема на отрезке $[a,b]$, если $|f(x)|^2$ интегрируем на $[a,b]$.

Множество всех квадратично интегрируемых на $[a,b]$ функций мы обозначаем $L^2(a,b)$ или просто L^2. Вообще говоря, под интегрируемостью мы понимаем измеримость по Лебегу. При этом функции равые почти всюду считаются одним и тем же элементом L^2. Совокупность всех интегрируемых на $[a,b]$ функций обычно обозначают $L^1(a,b)$ или просто L^1.

Приведем несколько основых свойств функций из L^2:

(1) Сумма двух квадратичо интегрируемых функций есть квадратично интегрируемая функция.

(2) Произведение квадратично интегрируемой функции на константу есть квадратично интегрируемая функция.

(3) Произведение двух квадратично интегрируемых функций есть интегрируемая функция.

(4) Если действительные функции $f(x)$ и $g(x)$ из L^2, то имеет место неравенство Буняковского–Шварца

$$(f,g)^2 \le \|f\|^2\|g\|^2, \qquad (f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx, \qquad \|f\|^2 = (f,f) = \int\limits_a^b f(x)^2dx.$$

Здесь число (f,g) называется скалярым произведением действительных функций $f(x)$ и $g(x)$, а число $\|f\|$ – нормой действительной функции $f(x)$ в L^2.

Для случая комплекснозначных функций из L^2 указанные соотошения имеют вид

$$|(f,g)|^2 \le \|f\|^2\|g\|^2, \qquad (f,g) = \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}dx, \qquad \|f\|^2 = (f,f) = \int\limits_a^b |f(x)|^2dx.$$

Здесь и далее черта сверху означает комплексно сопряженную величину. Для действительных функций действительного аргумента $\overline{g(x)} = g(x)$.

(5) Для $f(x)$ и $g(x)$ из L^2 имеет место неравенство треугольника

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|.$$

(6) Пусть функции $f(x)$ и $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ квадратично интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Если

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|^2dx = 0,$$

то говорят, что последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \dots$ сходится в среднем квадратичном к функции $f(x)$.

Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ из L^2 сходится равномерно к $f(x)$, то $f(x) \in L^2$ и $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ в среднем.

Аналогичным образом вводится понятие интегрируемой (суммируемой) функции нескольких переменных. Например, функция $f(x,t)$ называется квадратично интегрируемой в области $S = \{a \le x \le b; a \le t \le b\}$, если $f(x,t)$ измерима и

$$\|f\|^2 = \int_a^b \int_a^b |f(x,t)|^2 dxdt < +\infty.$$

Здесь, как и ранее $\|f\|$ обозначает норму функции $f(x,t)$.

1.2. **Основные определения.** Интегральные уравнения – уравнения, содержащие искомую функцию под знаком интеграла. Пример интегрального уравнения относительно функции $\varphi(\xi)$ представляет собой уравнение:

$$a(x)\varphi(x) + f(x) = \int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \tag{1.1}$$

где $a(x)$, $f(x)$, $K(x,\xi)$ – известные функции, $\varphi(x)$ – неизвестная функция; переменная x принимает, так же как и ξ, все значения из интервала $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Мы будем рассматривать только уравнения, в которые неизвестная функция входит линейно, т.е. только уравнения вида (1.1), называемые линейными интегральными уравнениями. В случае когда $a(x)$ не обращается в нуль на интервале (a,b) можно разделить обе части уравнения (1.1) на $a(x)$, что дает

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + f(x). \tag{1.2}$$

Уравнения вида (1.2) называются линейными интегральными уравнениями 2-го рода, либо интегральными уравнениями Фредгольма (шведский математик, 1866–1927, ввёл и затем анализировал целый этот класс интегральных уравнений). Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1.2) называется однородным. Если $a(x) \equiv 0$ а $f(x) \neq 0$, то уравнение (1.1) сводится к виду

$$\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = f(x), \tag{1.3}$$

которое называется линейным интегральным уравнением 1-го рода, однако в дальнейшем мы будем главным образом заниматься линейными интегральными уравнениями 2-го рода. Функция $K(x,\xi)$ называется ядром интегрального уравнения.

Можно рассматривать интегральные уравнения, где неизвестные функции зависят не от одного аргумента, а от многих. Таким будет, например, уравнение

$$\varphi(x,y) = \int_G K(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta + f(x,y) \tag{1.4}$$

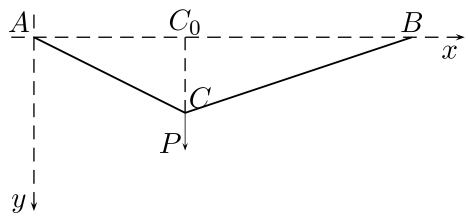

Рис. 1

относительно неизвестной функции $\varphi(x, y)$, где интегрирование распространяется по некоторой области G на плоскости (ξ, η). Точка (x, y) также принадлежит этой области. Такое уравнение можно записать в виде

$$\varphi(x) = \int\limits_G K(x; \xi)\varphi(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{1.5}$$

где $x \in G$ и $\xi \in G$. Т.е. мы обозначили вектор (x, y) через x, вектор (ξ, η) через η и, строго говоря, следовало бы использовать обозначение $d^2\xi$, но для простоты мы этого делать не будем. Конечно, допускается рассмотрение систем интегральных уравнений со многими неизвестными функциями.

Замечание 1.1. *Всюду в дальнейшем (если не оговорено особо), мы будем предполагать, что рассматриваемые функции точек x или ξ определены в конечной d-мерной области G, что они непрерывны в этой области всюду, за исключением, быть может, некоторого конечного числа точек, достаточно гладких линий и поверхностей, до $(d-1)$-го измерения включительно. На этих особых точках, линиях и поверхностях функции могут быть не определены. Границу области G мы будем считать состоящей из конечного числа кусков гладких $(d-1)$-мерных поверхностей или конечного числа гладких дуг, если $d = 2$. Интегрирование всюду в дальнейшем (с той же оговоркой) мы будем понимать в обычном смысле, если функции непрерывны в G; если эти функции имеют на некоторых точках, линиях или поверхностях разрывы, то интегралы рассматриваются как несобственные; все рассматриваемые функции будем считать абсолютно интегрируемыми.*

1.3. **Типичные задачи, сводящиеся к линейным интегральным уравнениям.** Пусть A и B – неподвижные точки, расположенные на неотрицательной части оси x. Пусть точка A находится в начальной точке оси, причем ось x будем считать горизонтальной. Рассмотрим упругую нить длины ℓ, закрепленную в точках A и B, которая без всякого сопротивления легко изменяет свою форму, но для увеличения длины которой на $\Delta\ell$ по закону Гука нужна сила $c\Delta\ell$, где c – некоторая постоянная. На нить действует очень большая (по сравнению с другими силами) горизонтальная растягивающая сила T_0. Под ее воздействием положение нити будет горизонтальным, т. е. совпадающим с осью Ox. Пусть в точке C, для которой $x = \xi$, к нити приложена вертикальная сила P, так что нить принимает форму ломанной ACB (рис. 1). Будем считать $CC_0 = \delta$ очень малым по сравнению с AC_0 и C_0B, что естественно в предположении малости P по сравнению с T_0. Пренебрегая δ^2 по сравнению с l, мы полагаем, что натяжение нити осталось равным T_0 и под действием силы P. Проектируя на вертикаль силы натяжения нити в точке C и силу P и пренебрегая опять членами, содержащими δ^2, получим:

$$T_0\frac{\delta}{\xi} + T_0\frac{\delta}{\ell-\xi} = P,$$

так что

$$\delta = \frac{P(\ell-\xi)\xi}{T_0\ell}.$$

Обозначим через $y(x)$ возникший прогиб нити в точке с абсциссой x. Мы получим отсюда, что

$$y(x) = P\cdot G(x,\xi),$$

где

$$\begin{cases} G(x,\xi) = \dfrac{x(\ell-\xi)}{T_0\ell} & \text{для участка } AC \quad (0 \le x \le \xi), \\ G(x,\xi) = \dfrac{(\ell-x)\xi}{T_0\ell} & \text{для участка } CB \quad (\xi \le x \le \ell), \end{cases} \tag{1.6}$$

откуда, в частности, следует

$$G(x,\xi) = G(\xi,x).$$

Предположим далее, что на нить действует непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $p(\xi)$ так, что на участок ее между точками ξ и $\xi+\Delta\xi$ действующая сила приблизительно равна $p(\xi)\Delta\xi$. В силу принципа суперпозиции смещения, обусловленные элементарными силами $p(\xi)\Delta\xi$, суммируются. Таким образом под действием такой силы нить принимает форму

$$y(x) = \int_0^\ell G(x,\xi)p(\xi)d\xi.$$

Рассмотрим следующие примеры.

1. Пусть задана форма $y = y(x)$ нити. Найдем плотность распределения силы $p(\xi)$, под влиянием которой нить примет эту форму. Это означает, что мы должны решить интегральное уравнение 1-го рода

$$y(x) = \int_0^\ell G(x,\xi)p(\xi)d\xi \tag{1.7}$$

относительно искомой функции $p(\xi)$.

2. Допустим, что на нить действует меняющаяся со временем t сила с плотностью в точке ξ равной

$$p(\xi)\sin\omega t \quad (\omega > 0).$$

Предположим, что под действием этой силы абсцисса каждой точки не меняется, а нить совершает периодические колебания, описываемые уравнением

$$y = y(x)\sin\omega t.$$

Пусть $\rho(\xi)$ означает линейную плотность массы нити в точке ξ. Тогда в момент t на участок нити между точками ξ и $\xi+\Delta\xi$, помимо силы $(p(\xi)\sin\omega t)\Delta\xi$, действует еще сила инерции

$$-\rho(\xi)\Delta\xi\frac{d^2y}{dt^2} = (\rho(\xi)y(\xi)\omega^2\sin\omega t)\Delta\xi.$$

Теперь равенство (1.7) примет вид:

$$y(x)\sin\omega t = \int_0^\ell G(x,\xi)[p(\xi)\sin\omega t + \omega^2\rho(\xi)\sin\omega t]d\xi,$$

так что сокращая обе части на $\sin\omega t$ и обозначая

$$\int_0^\ell G(x,\xi)p(\xi)d\xi = f(x), \qquad G(x,\xi)\rho(\xi) = K(x,\xi), \qquad \omega^2 = \lambda,$$

мы находим:

$$y(x) = \lambda\int_0^\ell K(x,\xi)y(\xi)d\xi + f(x). \tag{1.8}$$

Функция $p(\xi)$ задана по условию, а тогда задана и функция $f(x)$, причем в силу определения (1.6)

$$f(0) = f(\ell) = 0.$$

Итак, мы пришли к интегральному уравнению Фредгольма для определения функции $y(x)$.

Рассмотрим случай, когда $\rho(\xi)$ постоянна и пусть $f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае данное интегральное уравнение нетрудно решить. Для этого подставим в $K(x,\xi)$ вместо $G(x,\xi)$ его выражение (1.6). Получим

$$y(x) = \omega^2\rho\int\limits_0^x \frac{(\ell - x)\xi}{T_0\ell}y(\xi)\,d\xi + \omega^2\rho\int\limits_x^\ell \frac{x(\ell-\xi)}{T_0\ell}y(\xi)\,d\xi + f(x),$$

или

$$y(x) = \frac{\omega^2 c}{\ell}(\ell - x)\int\limits_0^x \xi y(\xi)\,d\xi + \frac{\omega^2 cx}{\ell}\int\limits_x^\ell (\ell-\xi)y(\xi)\,d\xi + f(x),$$

где введена константа

$$c = \frac{\rho}{T_0}.$$

Дифференцируя два раза по x обе части этого уравнения, получим:

$$y''(x) = -\omega^2 cy(x) + f''(x). \tag{1.9}$$

Нетрудно доказать и обратное: всякое решение дифференциального уравнения (1.9), обращающееся в нуль при $x = 0$ и $x = \ell$, является также решением интегрального уравнения (1.8). Для этого заметим, что интегрируя по частям легко получить

$$\int\limits_0^\ell T_0 G(x,\xi)\varphi''(\xi)\,d\xi = -\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ – любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль при $x = 0$ и $x = \ell$. Так что применяя эту операцию к (1.9) мы получим при этом равенство (1.8). Далее, как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, общим решением уравнения (1.9) является

$$y = C_1\sin\mu x + C_2\cos\mu x + \frac{1}{\mu}\int\limits_0^x f''(\xi)\sin\mu(x-\xi)\,d\xi,$$

где $\mu = \omega\sqrt{c}$, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из равенств (1.6) и (1.9) следует, что $y(0) = y(\ell) = 0$, что определяет константы C_1 и C_2. Тогда при $\sin\mu\ell \neq 0$,

$$y(x) = -\frac{1}{\mu}\frac{\sin\mu x}{\sin\mu\ell}\int\limits_0^\ell f''(\xi)\sin\mu(\ell-\xi)\,d\xi + \frac{1}{\mu}\int\limits_0^x f''(\xi)\sin\mu(x-\xi)\,d\xi. \qquad (1.10)$$

Итак, мы доказали, что при условии $\sin\mu\ell \neq 0$ интегральное уравнение (1.8) имеет единственное решение, где функция $f(x)$ произвольная, дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяющая условию $f(0) = f(\ell) = 0$.

На самом деле можно показать, что требование существования и тем более непрерывности второй производной является излишним для существования решения интегрального уравнения (1.8). Для доказательства достаточно, если $\sin\mu\ell \neq 0$, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной. Условие же $\sin\mu\ell \neq 0$ совершенно необходимо для того, чтобы это интегральное уравнение имело решение при всякой непрерывной или при всякой сколько угодно раз дифференцируемой функции $f(x)$.

1.4. **Дискретный спектр.** Рассмотрим теперь случай $\sin\mu\ell = 0$. Тогда получаем

$$\mu = \frac{k\pi}{\ell}, \tag{1.11}$$

$$\omega = \frac{k\pi}{\ell\sqrt{c}}, \tag{1.12}$$

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{\ell^2 c}, \tag{1.13}$$

где k – произвольное целое число, т.е. $k \in \mathbb{Z}$. **Собственным значением** параметра λ в интегральном уравнении (1.8) называется значение λ, задаваемое формулой (1.13) при $k = 1, 2, 3, \ldots$, а соответствующие значения параметра ω называются **собственными частотами** колебаний струны.

Для разрешимости уравнения (1.8) в случае, когда $\sin\mu\ell = 0$ и функция $f(x)$ обладает второй непрерывной производной, необходимо, как следует из (1.10), чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_0^\ell f''(\xi)\sin\mu(\ell-\xi)\,d\xi = 0. \tag{1.14}$$

Интегрируя по частям и используя, что при $\xi = 0$ и $\xi = \ell$ обращаются в нуль $\sin\mu(\ell-\xi)$ и $f(\xi)$, мы приводим это условие к виду

$$\int\limits_0^\ell f(\xi)\sin\mu\xi\,d\xi = 0. \tag{1.15}$$

Легко понять, что равенство (1.15) также и достаточно для существования решения уравнения (1.8) при μ таком, что $\sin\mu\ell = 0$.

Важно подчеркнуть, что условие (1.15) удовлетворяется, в частности, если

$$f(x) \equiv 0.$$

В этом случае интегральное и дифференциальное уравнения (1.8) и (1.9) превращаются в однородные. Хорошо известно, что все решения однородного дифференциального уравнения (1.9), обращающиеся в 0 при $x = 0$ и $x = \ell$, даются формулой

$$y(x) = C\sin\mu_k x. \tag{1.16}$$

Соответственно то же свойство имеют и все решения интегрального уравнения (1.8). В (1.16) C – произвольная постоянная, а μ_k равно одному из чисел из набора (1.11). Итак, формула (1.16) дает амплитуды в точке x **собственных колебаний** струны:

$$y = C\sin\mu_k x\sin\omega_k t,$$

т.е. колебаний, происходящих без воздействия внешней силы. Как следует из нашего построения, такие колебания могут происходить только с одной из частот, даваемых формулой (1.12) при $k = 1, 2, \ldots$, а отнюдь не с произвольной частотой. Как следует из формулы (1.10), если условие (1.14) не выполняется, то амплитуда $y(x)$ периодических колебаний струны в точке x бесконечно растет, когда ω – частота колебаний внешней силы – приближается к одной из собственных частот колебаний струны. В пределе при совпадении этих частот наступает резонанс. Тогда, при произвольных амплитудах внешней силы, не существует периодических колебаний струны. Соответственно этому, вообще говоря, не существует решения неоднородного интегрального уравнения (1.8) при λ, равном одному из собственных значений этого уравнения.

2. Лекция

2.1. **От линейных алгебраических уравнений к линейным интегральным: теоремы Фредгольма.** Рассмотрим линейное интегральное уравнение 2-го рода, т.е. уравнение Фредгольма:

$$y(x) = \int\limits_a^b K(x,\xi) y(\xi)\, d\xi + f(x). \tag{2.1}$$

Как и ранее, мы считаем функции $K(x,\xi)$ и $f(x)$ при $a \le x \le b$, $a \le \xi \le b$, известными. Введем дискретную аппроксимацию интеграла в (2.1), для чего разобьем интервал (a,b) на n одинаковых интервалов, длина каждого из которых равна:

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x = \Delta\xi.$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&K(a+p\Delta x, a+q\Delta\xi) = K_{pq} \qquad (p,q=1,2,\dots,n),\\
&y(a+p\Delta x) = y_p \qquad (p=1,2,\dots,n),\\
&f(a+p\Delta x) = f_p \qquad (p=1,2,\dots,n).
\end{aligned}$$

В частности это означает, что мы полагаем $x = a + p\Delta x$, так что интеграл $\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi$ заменяется суммой

$$\sum_{q=1}^{n} K_{pq} y_q \Delta\xi, \qquad p = 1,2,\dots,n.$$

Тогда вместо интегрального уравнения (2.1) получится система линейных алгебраических уравнений

$$y_p = \sum_{q=1}^{n} K_{pq} y_q \Delta\xi + f_p, \quad p = 1,2,\dots,n. \tag{2.2}$$

В соответствии с тем, что говорилось после (2.1) матрица K_{pq}, вектор f_p и число $\Delta\xi$ – известные величины, а y_p – неизвестные. Вспомним известные теоремы о линейных алгебраических уравнениях на интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. В данный момент мы не будем пользоваться столь хорошо известными величинами, как определители. Этот подход будет представлен позже. Сейчас мы сформулируем эти теоремы, не пользуясь определителями.

Однако, мы начнем именно с определителей, поскольку при решении системы (2.2) существенную роль играет составленный из коэффициентов этой системы определитель

$$\begin{vmatrix}
1-K_{11}\Delta\xi & -K_{12}\Delta\xi & \dots & -K_{1n}\Delta\xi\\
-K_{21}\Delta\xi & 1-K_{22}\Delta\xi & \dots & -K_{2n}\Delta\xi\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
-K_{n1}\Delta\xi & -K_{n2}\Delta\xi & \dots & 1-K_{nn}\Delta\xi
\end{vmatrix}. \tag{2.3}$$

Хорошо известно, что если этот определитель не равен 0, то система (2.2) при любых значениях $f_1, f_2, \ldots, f_n$ имеет одно и только одно решение. Более того, в этом случае транспонированная система, т.е. система

$$z_p = \sum_{q=1}^{n} K_{qp} z_q \Delta\xi + f_p^*, \quad p = 1, 2, \ldots, n$$

также имеет, и притом единственное, решение при произвольных f_p^*. Если же определитель равен нулю, то система (2.2) при произвольных f_p, вообще говоря, не имеет решения. Но тогда соответствующая однородная система, т.е. система, полученная из (2.2) приравниванием нулю всех f_p, всегда имеет нетривиальное решение, т.е. решение, состоящее не из одних только нулей.

Итак, имеет место следующая альтернатива: *или данная неоднородная система линейных алгебраических уравнений (2.2) имеет, и притом только единственное, решение при всяких $f_1, \ldots, f_n$, стоящих в правых частях, или соответствующая однородная система имеет по крайней мере одно нетривиальное решение. Если для данной системы имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для транспонированной системы.*

Во втором случае однородная система, следующая из (2.2),

$$y_p - \sum_{q=1}^{n} K_{pq} y_q \Delta\xi = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

имеет то же число линейно независимых решений, что и транспонированная к ней система

$$z_p - \sum_{q=1}^{n} K_{qp} z_q \Delta\xi = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.5}$$

В случае линейной алгебры это число равно $n - r$, где r – ранг матрицы определителя (2.3). Нужно заметить, что утверждение о существовании ровно $n - r$ линейно независимых решений у однородных систем (2.4) и (2.5) верно и в первом случае альтернативы, когда $n = r$. Выражение “нуль линейно независимых решений” означает, что имеется лишь решение, состоящее из одних нулей.

Рассмотрим необходимые и достаточные условия существования при втором случае альтернативы решения для неоднородной системы (2.2). Необходимое условие здесь находится просто. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – какое-нибудь решение системы (2.5). Умножим тогда p-ое уравнение из (2.2) на z и сложим все уравнения почленно. Мы получаем:

$$\sum_p y_p z_p - \sum_{p,q} K_{pq} y_q z_p \Delta\xi = \sum_p f_p z_p.$$

Переобозначим p и q в двойной сумме в левой части этого равенства:

$$\sum_p y_p z_p - \sum_{p,q} K_{qp} y_p z_q \Delta\xi = \sum_p y_p \left(z_p - \sum_q K_{qp} z_q \Delta\xi \right),$$

что дает ноль ввиду уравнений (2.5). Следовательно, должно быть

$$\sum_p f_p z_p = 0. \tag{2.6}$$

Доказательство того, что равенство (2.6) является также и достаточным условием для существования решения системы (2.2), если оно выполняется для всех решений системы (2.5), несколько сложнее. Очевидно, это условие будет соблюдено, если оно выполняется для каких-нибудь $n-r$ линейно независимых между собой решений системы (2.5).

Утверждение из курса высшей алгебры про достаточное условие существования решения у системы (2.2) в случае, когда ее определитель равен нулю: ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} 1-K_{11}\Delta\xi & -K_{12}\Delta\xi & \dots & -K_{1n}\Delta\xi & f_1 \\ -K_{21}\Delta\xi & 1-K_{22}\Delta\xi & \dots & -K_{2n}\Delta\xi & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -K_{n1}\Delta\xi & -K_{n2}\Delta\xi & \dots & 1-K_{nn}\Delta\xi & f_n \end{matrix} \right\|. \tag{2.7}$$

должен совпадать с рангом матрицы (2.3). Поскольку мы обозначили ранг матрицы через r, то достаточно, чтобы равнялись нулю все определители $r+1$-го порядка, составленные из элементов матрицы (2.7) и последнего столбца этой матрицы. Обозначим через D_{r+1} произвольный такой определитель и раскроем его по элементам f_k, т.е. по последнему столбцу. Составим теперь набор чисел

$$z_1, z_2, \dots, z_n,$$

следующим образом: если i таково, что f_i входит в определитель D_{r+1} то z_i равно алгебраическому дополнению f_i в этом определителе, в противном случае $z_i = 0$. Такой набор удовлетворяет системе (2.5). Это следует из подстановки чисел $z_1, z_2, \dots, z_n$ в j-ое уравнение системы (2.5). Если j таково, что в определитель D_{r+1} входят элементы j-го столбца матрицы (2.7), то результат подстановки будет равен нулю, так как он будет равен определителю, в котором совпадают два столбца. Если j таково, что элементы j-го столбца не входят в определитель D_{r+1}, то результат подстановки будет равен нулю, так как он будет равен определителю $r+1$-го порядка, составленному из элементов матрицы ранга r. Но таким образом мы получаем, что D_{r+1} совпадает с левой частью равенства (2.6), т.е. он действительно равен нулю.

Итак, *во втором случае альтернативы решение неоднородной системы существует тогда и только тогда, когда для любого решения* $(z_1, \dots, z_n)$ *транспонированной однородной системы выполняется условие (2.6).*

Заметим, что если во втором случае альтернативы система (2.2) имеет решение, то это решение не единственное. Действительно, прибавляя к этому решению какое-нибудь решение соответствующей однородной системы, мы опять получим решение системы (2.2).

Когда $\Delta\xi$ стремится к 0, естественно ожидать, что $\sum_q K_{pq} y_q \Delta\xi$ переходит в $\int_a^b K(x,\xi) y(\xi)\, d\xi$, и решение системы уравнений (2.2) переходит в решение интегрального уравнения (2.1). Это действительно имеет место при некоторых предположениях относительно ядра $K(x,\xi)$. Но доказательство этого громоздко, и мы не будем его приводить, хотя для приближенного решения интегрального уравнения (2.1) иногда его заменяют системой (2.2). Мы докажем только, что теоремы, сформулированные выше для системы (2.2), переходят в следующие теоремы:

Теорема 2.1 (1. (Альтернатива))**.** *Или данное неоднородное линейное интегральное уравнение 2-го рода имеет, и притом единственное, решение при всякой функции* $f(x)$ *(из некоторого достаточно широкого класса), или соответствующее однородное уравнение имеет по крайней мере одно нетривиальное, т.е. не равное нулю тождественно, решение.*

Теорема 2.2 (2). *Если для данного уравнения (2.1) имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для транспонированного уравнения*

$$z(x) = \int K(\xi, x) z(\xi)\, d\xi + f^*(x).$$

Данное однородное интегральное уравнение и транспонированное к нему имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Очевидно, если функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ удовлетворяют однородному уравнению (2.1), то любая их линейная комбинация $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ с постоянными коэффициентами C_i (также удовлетворяет этому уравнению.

Теорема 2.3 (3). *Во втором случае альтернативы необходимым и достаточным условием существования решения неоднородного уравнения (2.1) является условие:*

$$\int f(x) z(x) dx = 0,$$

где $z(x)$ – любое решение транспонированного к уравнению (2.1) однородного уравнения.

Если это условие выполнено, то уравнение (2.1) имеет бесконечное множество решений, потому что, как легко проверить, тогда этому уравнению будет удовлетворять также любая функция вида

$$y(x) + \varphi(x),$$

где $y(x)$ – какое-нибудь решение уравнения (2.1), а $\varphi(x)$ – любое решение соответствующего однородного уравнения. С другой стороны, ясно, что если уравнению (2.1) удовлетворяют функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то их разность удовлетворяет соответствующему однородному уравнению. Сформулированные только что теоремы 1, 2, 3 называются теоремами Фредгольма, который их впервые доказал для уравнения (2.1) при довольно широких предположениях относительно $K(x, \xi)$ и $f(x)$. Ближайшие лекции посвящены доказательству этих теорем для некоторых классов уравнений. Число независимых переменных здесь несущественно и мы сохраняем для них те же обозначения x, ξ и т.п. Эти доказательства, как вообще большинство доказательств существования решений уравнений, дают также методы для приближенного решения интегральных уравнений (2.1).

В приложениях особенно важную роль играет первая из теорем Фредгольма – об альтернативе. Вместо того чтобы доказывать, что данное интегральное уравнение (2.1) имеет решение, часто бывает гораздо проще доказать, что соответствующее однородное уравнение или транспонированное к нему имеет только тривиальные решения. А отсюда, по первой теореме Фредгольма, будет следовать, что данное уравнение (2.1) действительно имеет решение.

2.2. **Интегральные уравнения с вырожденными ядрами.** Существует специальный класс интегральных уравнений, которые легко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям. Это уравнения с вырожденными ядрами и для этих уравнений теоремы Фредгольма непосредственно получаются из теорем, сформулированных в предыдущей лекции для линейных алгебраических уравнений. План наших действий следующий: сначала мы докажем теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденными ядрами, а далее мы используем эти доказательства для доказательства теорем Фредгольма для интегральных уравнений с произвольными непрерывными ядрами.

Итак, ядро называется вырожденным, если оно имеет вид

$$K(x,\xi)=\sum_{i=1}^{m}a_i(x)b_i(\xi), \tag{2.8}$$

где m какое-то натуральное число. Будем полагать, что функции a_i, b_i, $y(\xi)$ и $f(x)$ равномерно непрерывны на некоторой конечной области G и что все как $a_i(x)$, так и $b_i(\xi)$ линейно независимы между собой. Последнее предположение не ограничивает общности. Для доказательства этого факта допустим, что существуют такие постоянные $C_1,\ldots,C_m$, что

$$C_1a_1(x)+\ldots+C_ma_m(x)\equiv 0,$$

где хотя бы одно из чисел $C_1,\ldots,C_m$ отлично от нуля. Пусть это $C_m\neq 0$. Поделив это равенство на C_m, решим его относительно $a_m(x)$:

$$a_m(x)=C_1^*a_1(x)+\ldots+C_{m-1}^*a_{m-1}(x),$$

где C_i^* – новые значения констант. Подставляя $a_m(x)$ в правую часть (2.8), получим:

$$\begin{aligned}K(x,\xi)&\equiv\sum_{i=1}^{m-1}a_i(x)b_i(\xi)+\sum_{i=1}^{m-1}C_i^*a_i(x)b_m(\xi)\equiv\\&\equiv\sum_{i=1}^{m-1}a_i(x)[b_i(\xi)+C_i^*b_m(\xi)]\equiv\sum_{i=1}^{m-1}a_i(x)b_i^*(\xi).\end{aligned}$$

Таким образом, тот факт, что ядро $K(x,\xi)$ может быть представлено в виде (2.8) сохранился, но количество членов стало меньше, чем m числа произведений функций от x на функции от ξ. Понятно, что этот процесс можно продолжить, если окажется, что новые функции $a_i(x)$ или $b_i^*(\xi)$, $i=1,\ldots,m-1$, опять линейно зависимы. Мы могли бы еще уменьшить это число и т. д.

Важным свойством интегральных уравнений с вырожденными ядрами является то, что они легко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям, и для них легко доказываются теоремы Фредгольма. Действительно, допустим, что интегральное уравнение

$$y(x)=\int\limits_G K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi+f(x),$$

где $K(x,\xi)$ дается формулой (2.8), имеет решение. Тогда должно быть

$$y(x)=\int\sum_{i=1}^{m}a_i(x)b_i(\xi)y(\xi)\,d\xi+f(x),$$

где здесь мы опускаем букву G под знаком интеграла. Если это не вызовет непонимания, то и в дальнейшем знак $\int$ будет всюду означать интеграл, взятый по области G.

Перепишем последнее равенство в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \int b_i(\xi) y(\xi)\, d\xi + f(x) \tag{2.9}$$

и введем константы

$$\int b_i(\xi) y(\xi)\, d\xi = C_i. \tag{2.10}$$

Тогда из уравнения (2.9) получается, что

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i a_i(x) + f(x). \tag{2.11}$$

Видно, что $y(x)$ есть сумма $m+1$ функции x, и чтобы определить постоянные C_i, подставим значение y, даваемое последней формулой, в уравнение (2.10). Получим:

$$\int b_i(\xi) \left[\sum_{j=1}^{m} C_j a_j(\xi) + f(\xi) \right] d\xi = C_i.$$

Введем новые обозначения, что позволит привести развиваемый здесь подход к построениям на предыдущей лекции. А именно, положим

$$\int b_i(\xi) a_j(\xi)\, d\xi = K_{ij}, \qquad \int b_i(\xi) f(\xi)\, d\xi = f_i, \tag{2.12}$$

из последнего уравнения получим:

$$C_i = \sum_{j=1}^{m} K_{ij} C_j + f_i. \tag{2.13}$$

Итак, всякому решению интегрального уравнения (2.2) соответствует решение $(C_1, \ldots, C_m)$ системы (2.13), причем в силу линейной независимости функций $a_i(x)$ только одно (это следует из предположения о существовании двух разных решений в (2.11)). Обратно, если эта система линейных алгебраических уравнений имеет какое-нибудь решение $(C_1, \ldots, C_m)$, то, подставляя его в правую часть (2.11), мы получим решение заданного интегрального уравнения (2.2), так как каждый шаг, сделанный при переходе от (2.2) к (2.13), обратим. Таким образом, задача свелась к исследованию системы (2.13).

Аналогично, для интегрального уравнения

$$z(x) = \int K(\xi, x) z(\xi)\, d\xi + f^*(x), \tag{2.14}$$

транспонированного к уравнению (2.2), мы сводим задачу к системе линейных уравнений

$$C_i^* = \sum_{j=1}^{m} K_{ji} C_j^* + f_i^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.15}$$

транспонированной к системе (2.2).

По условию функции $a_i(x)$ и $b_i(\xi)$ линейно независимы. Поэтому каждым p линейно независимым решениям однородной системы (2.13) или (2.15) отвечают p линейно независимых решений однородного уравнения (2.2) или соответственно уравнения (2.14), и обратно.Т.е. установлено взаимно однозначное соответствие между решениями интегральных уравнений (2.2) и (2.14), с одной стороны, и решениями линейных алгебраических уравнений (2.13) и (2.15), с другой стороны. И, конечно, решениям взаимно транспонированных уравнений (2.2) и (2.14) соответствуют решения взаимно транспонированных уравнений (2.13) и (2.15).

Учитывая, что для алгебраической линейной системы (2.13) справедливы две первые теоремы Фредгольма, отсюда непосредственно вытекают первые две теоремы Фредгольма для интегрального уравнения (2.2). Для доказательства третьей из этих теорем заметим, что если имеется второй случай альтернативы для системы (2.13), то необходимым и достаточным условием существования решения системы (2.13) является условие

$$\sum_{i=1}^{m} f_i C_i^* = 0,$$

где $(C_1^*, \ldots, C_m^*)$ – любое решение транспонированной однородной системы. Пользуясь равенствами (2.11), это условие перепишем так:

$$\sum_{i=1}^{m} C_i^* \int f(\xi) b_i(\xi)\, d\xi = 0,$$

или:

$$\int f(\xi) \left(\sum_{i=1}^{m} C_i^* b_i(\xi) \right) d\xi = 0. \tag{2.16}$$

Если $(C_1^*, \ldots, C_m^*)$ есть решение однородной системы (2.15), то $\sum C_i^* b_i(\xi)$ есть решение однородного уравнения (2.14), транспонированного к уравнению (2.2). Поэтому условие (2.16) эквивалентно условию, чтобы

$$\int f(\xi) z(\xi)\, d\xi = 0$$

для всякого решения $z(\xi)$ однородного уравнения (2.14). Отсюда прямо следует третья теорема Фредгольма для уравнения (2.2).

Замечание 2.1. *Мы не накладывали здесь условие вещественности на ядро $K(x, \xi)$ или функцию $f(\xi)$. Они вполне могут быть комплексно значными функциями действительных переменных x и ξ, как и решения $y(x)$ интегрального уравнения (2.2), которые соответственно могут оказаться комплексно значными функциями действительной переменной x. При этом, конечно, сохраняются все доказанные в этом разделе теоремы.*

Замечание 2.2. *Часто оказывается, что $a_i(x)$ и $b_i(\xi)$ являются функциями от некоторого комплексного параметра λ. Обращаясь еще раз к аргументации предыдущей лекции, легко видеть, что первый или второй случай альтернативы Фредгольма для уравнения (2.2) имеет место имеет место в зависимости от того, равен или не равен нулю определитель, составленный из коэффициентов системы (2.13), т.е. определитель*

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - K_{11} & -K_{12} & \ldots & -K_{1m} \\ -K_{21} & 1 - K_{22} & \ldots & -K_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -K_{m1} & 1 - K_{m2} & \ldots & 1 - K_{mm} \end{vmatrix}, \tag{2.17}$$

где

$$K_{ij} = \int b_i(\xi, \lambda) a_j(\xi, \lambda)\, d\xi.$$

Пусть $a_j(\xi,\lambda)$ и $b_i(\xi,\lambda)$ при каждом x из G суть голоморфные функции от λ в некоторой конечной области Λ комплексной плоскости. Предположим, что $a_j(\xi,\lambda)$ и $b_i(\xi,\lambda)$ равномерно непрерывны по совокупности (ξ,λ). Тогда K_{ij} и определитель (2.17) также суть голоморфные функции от λ, что нетрудно показать, представляя интеграл в виде предела интегральной суммы и пользуясь известной теоремой Вейерштрасса о том, что если последовательность голоморфных функций равномерно сходится в некоторой области, то предельная функция будет голоморфной в той же области. Поэтому те значения λ, при которых определитель (2.17) равен нулю и имеет место второй случай альтернативы для (2.2), не могут иметь конечных предельных точек внутри Λ, если только определитель (2.17) отличен от нуля хотя бы при одном $\lambda \in \Lambda$.

3. Лекция

3.1. **Интегральные уравнения с вырожденными ядрами (продолжение).**

Замечание 3.1. *Пусть K_{ij} и f_i – голоморфные функции $\lambda \in \Lambda$. Так будет, в частности, если $a_j(\xi, \lambda)$ и $b_i(\xi, \lambda)$ обладают перечисленными в Замечании 2.2 свойствами, а $f(\xi)$ – равномерно непрерывная функция ξ, что мы и будем предполагать для простоты.*

По известным правилам теории определителей коэффициенты C_i находятся из уравнений (2.13) в виде дробей, у которых знаменателем при всех i является один и тот же определитель (2.17), а в числителе стоит определитель D_i, получающийся из определителя (2.17) заменой его i-го столбца столбцом $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Раскрывая D_i по элементам этого последнего столбца, получим:

$$C_i = \frac{\sum_j M_{ij} f_j}{D(\lambda)},$$

где M_{ij} суть многочлены от K_{ij}. Подставляя только что найденные значения C_i в правую часть (2.11) и пользуясь формулами (2.12) для f_i, найдем:

$$y(x) = \frac{1}{D(\lambda)} \int \sum_{i,j} M_{ij} b_j(\xi, \lambda) a_i(x, \lambda) f(\xi)\, d\xi + f(x). \tag{3.1}$$

Числитель правой части этой формулы при каждом фиксированном x и ее знаменатель суть голоморфные функции λ в области Λ. Поэтому это равенство (3.1) обычно записывают в виде:

$$y(x) = \int \widetilde{R}(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{3.2}$$

где

$$\widetilde{R}(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i,j} M_{ij} b_j(\xi, \lambda) a_i(x, \lambda). \tag{3.3}$$

Удобство этой записи в том, что функция $\widetilde{R}(x, \xi, \lambda)$ не зависит от $f(x)$. Эта функция, как следует из (3.3) – частное двух голоморфных во всей области Λ функций λ. Функция $\widetilde{R}(x, \xi, \lambda)$ может не быть голоморфной функцией λ только при тех значениях λ, когда $D(\lambda) = 0$, т.е. при которых для интегрального уравнения (2.2) имеет место второй случай альтернативы Фредгольма. Мы уже показали выше, что такие значения λ не имеют предельных точек внутри Λ, если только $D(\lambda)$ не равно нулю тождественно, что и будем здесь предполагать. Тогда легко показать, что каждое такое значение $\lambda = \lambda_0$, где $D(\lambda_0) = 0$, действительно является особым для $\widetilde{R}(x, \xi, \lambda)$ в следующем смысле: $\widetilde{R}(x, \xi, \lambda)$ не является равномерно непрерывной функцией (x, ξ, λ), когда λ находится в произвольно малой окрестности точки λ_0, а x и ξ меняются в G. этого факта допустим противное. Пусть функция $y(x, \lambda)$, определПенная формулой (3.2), будет равномерно непрерывна, если $x \in G$, а λ меняется в некоторой окрестности точки λ_0. Тогда результаты подстановки правой части (3.2) (или (3.1)) в обе части уравнения (2.2) будут при всякой равномерно непрерывной функции $f(\xi)$ равномерно непрерывными функциями при той же области изменения x и λ. Мы знаем, что эти результаты совпадают, когда $\lambda \neq \lambda_0$ и $|\lambda - \lambda_0|$ достаточно мало, что гарантирует, что $D(\lambda) \neq 0$. Отсюда, по непрерывности эти результаты совпадают и при $\lambda = \lambda_0$. Следовательно, при всякой функции $f(x)$ рассматриваемого класса интегральное уравнение (2.2) имеет решение при $\lambda = \lambda_0$: оно дается формулой (3.2) при $\lambda = \lambda_0$, где $\widetilde{R}(x, \xi, \lambda)$ определено при $\lambda = \lambda_0$ по непрерывности. Но тогда при этом значении λ для уравнения (2.2) имеет место первый случай альтернативы Фредгольма, а не второй, и потому $D(\lambda_0) \neq 0$.

Эти рассуждения легко переносятся на случай, когда $a_i(\xi, \lambda)$, $b_i(\xi, \lambda)$, $f(\xi)$ имеют разрывы по ξ на некоторых точках, достаточно гладких линиях и поверхностях до $(d-1)$-го измерения включительно, независимых от λ, если при подходе точки ξ к местам разрыва $|a_i(\xi, \lambda)|$, $|b_i(\xi, \lambda)|$, $|f(\xi)|$ растут не очень быстро. Решения будут неопределенными в тех точках x, где $a_i(x, \lambda)$ и $f(x)$ не определены.

Пример 3.1.

$$y(x) = -\lambda \int_0^1 (x^2\xi + x\xi^2) y(\xi)\, d\xi + f(x).$$

Отсюда

$$y(x) = -\lambda \left[x^2 \int_0^1 \xi y(\xi)\, d\xi + x \int_0^1 \xi^2 y(\xi)\, d\xi \right] + f(x).$$

Полагая

$$\int_0^1 \xi y(\xi)\, d\xi = C_2, \qquad \int_0^1 \xi^2 y(\xi)\, d\xi = C_1, \tag{3.4}$$

получим:

$$y(x) = f(x) - C_1\lambda x - C_2\lambda x^2. \tag{3.5}$$

Подставляя это выражение y в равенства (3.4), получим

$$\int_0^1 \xi[f(\xi) - C_1\lambda\xi - C_2\lambda\xi^2]\, d\xi = C_2, \qquad \int_0^1 \xi^2[f(\xi) - C_1\lambda\xi - C_2\lambda\xi^2]\, d\xi = C_1$$

или

$$b_1 - \frac{C_1\lambda}{3} - \frac{C_2\lambda}{4} = C_2, \qquad b_2 - \frac{C_1\lambda}{4} - \frac{C_2\lambda}{5} = C_1, \tag{3.6}$$

где

$$b_1 = \int_0^1 \xi f(\xi)\, d\xi, \text{ и } b_2 = \int_0^1 \xi^2 f(\xi)\, d\xi.$$

Перепишем уравнения (3.6) в следующем виде:

$$\begin{cases} C_1\dfrac{\lambda}{3} + C_2\left(1 + \dfrac{\lambda}{4}\right) = b_1, \\[2ex] C_1\left(1 + \dfrac{\lambda}{4}\right) + C_2\dfrac{\lambda}{5} = b_2 \end{cases} . \tag{3.7}$$

Определитель этой системы равен

$$1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{240}.$$

Он имеет только два корня

$$\lambda = 60 \pm 16\sqrt{15}.$$

Только при этих двух значениях λ имеет место второй случай альтернативы Фредгольма. В этих случаях все решения однородного интегрального уравнения

$$y(x) + \lambda \int_0^1 (x^2\xi + |x-\xi|^2) y(\xi)\, d\xi = 0$$

даются формулами

$$y(x) = C\left(x \mp \frac{5}{\sqrt{15}} x^2\right),$$

где C – произвольное постоянное. При других же значениях λ наше интегральное уравнение имеет единственное решение, даваемое формулой (3.5), где C_1 и C_2 определяются единственным образом из системы (3.7). Это решение можно представить в виде (3.2), где

$$\widetilde{R}(x,\xi,\lambda) = \lambda \frac{\dfrac{\xi x}{5} - \left(1+\dfrac{\lambda}{4}\right)\xi^2 x - \xi x^2\left(1+\dfrac{\lambda}{4}\right) + \xi^2 x^2 \dfrac{\lambda}{3}}{1 + \dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{\lambda^2}{240}}.$$

3.2. **Интегральные уравнения с достаточно малыми по абсолютной величине непрерывными ядрами.** Мы рассмотрим теперь класс ядер интегральных уравнений, которые можно назвать достаточно малыми по абсолютной величине и непрерывными. Ниже мы дадим точное определение этого класса. Сейчас же отметим, что для таких уравнений всегда имеет место первый случай альтернативы, т.е. такие уравнения всегда имеют единственное решение. Доказывается это методом последовательных приближений, как в теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказываются существование и единственность решения одного интегрального уравнения, эквивалентного заданному дифференциальному уравнению и начальным условиям. По существу, это – применение принципа сжатых отображений. Мы не будем применять здесь эту общую теорию, а проведем доказательство для данного конкретного случая. Полученные на этом пути формулы будут применяться в дальнейшем. Введем символические обозначения, которыми мы иногда будем пользоваться ниже. Пусть $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$ – равномерно непрерывные функции x и ξ, когда $x \in G$ и $\xi \in G$. Положим

$$(K_2 \circ K_1)(x,\xi) = \int K_2(x,s) K_1(s,\xi)\, ds. \tag{3.8}$$

Назовем ядро $K(x,\xi) = (K_2 \circ K_1)(x,\xi)$ символическим произведением ядра $K_2(x,\xi)$ на $K_1(x,\xi)$. Покажем, что такое символическое умножение ядер аналогично умножению матриц. Для доказательства пусть функция $\varphi_1(x)$ преобразуется с помощью ядра $K_1(x,\xi)$ в функцию $\varphi_2(x) = \int K_1(x,\xi)\varphi_1(\xi)\, d\xi$, а функция $\varphi_2(x)$ преобразуется с помощью ядра $K_2(x,\xi)$ в функцию $\varphi_3(x) = \int K_2(x,\xi)\varphi_2(\xi)\, d\xi$. Комбинируя эти действия, мы получаем, что ядро $K_2 \circ K_1$ задает преобразование функции $\varphi_1(x)$ в $\varphi_3(x)$, т.е. $\varphi_3(x) = \int (K_2 \circ K_1)\varphi_1(\xi)\, d\xi$. Здесь полная аналогия с последовательным применением двух линейных преобразований в n-мерном пространстве. В результате мы получаем линейное преобразование с матрицей, равной произведению матриц этих преобразований.

Учитывая, что оба ядра – равномерно непрерывные функции своих аргументов x и ξ, легко показать, что $K_2 \circ K_1$ есть равномерно непрерывная функция тех же аргументов. Действительно,

$$\left|\int K_2(x_1,s)K_1(s,\xi_1)\,ds - \int K_2(x_2,s)K_1(s,\xi_2)\,ds\right| \leq$$
$$\leq \left|\int K_2(x_1,s)[K_1(s,\xi_1) - K_1(s,\xi_2)]\right| ds +$$
$$+ \left|\int K_1(s,\xi_2)[K_2(x_1,s) - K_2(x_2,s)]\right| ds. \tag{3.9}$$

Пусть верхняя граница абсолютных значений $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$, когда $x \in G$ и $\xi \in G$ не превосходит M, и D – объем области G. В силу равномерной непрерывности $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$ для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что

$$|K_2(x_1,s) - K_2(x_2,s)| < \frac{\varepsilon}{2DM}$$

и

$$|K_1(s,\xi_1) - K_1(s,\xi_2)| < \frac{\varepsilon}{2DM},$$

если расстояние между точками x_1 и x_2 и между точками ξ_1 и ξ_2 меньше η. Легко видеть, что при этом условии левая часть неравенства (3.9) будет меньше ε, что и требовалось доказать. Заметим, что, вообще говоря, $K_2 \circ K_1 \neq K_1 \circ K_2$. Если $K_3(x,\xi)$ – равномерно непрерывная функция x и ξ, то легко проверить, что

$$K_1 \circ (K_2 \circ K_3) = (K_1 \circ K_2) \circ K_3.$$

Переходим теперь к доказательству того, что интегральные уравнения с достаточно малыми по абсолютной величине непрерывными ядрами всегда имеют единственное решение. В дальнейшем мы воспользуемся этим для доказательства теорем Фредгольма в случае интегрального уравнения с любым непрерывным ядром. Итак, мы рассматриваем интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi + f(x), \tag{3.10}$$

где λ – некоторый параметр. Мы уже видели на предыдущей лекции, что такая зависимость ядра от комплексного параметра удобна для исследования свойств его решений.

Пусть $K(x,\xi)$ и $f(x)$ – некоторые равномерно непрерывные функции, когда $x \in G$ и $\xi \in G$, где G – некоторая конечная область. Заметим, что вместо того чтобы каждый раз подчеркивать равномерную непрерывность рассматриваемых на открытой области G функций, можно было бы рассматривать эти функции на конечной замкнутой области $\overline{G}$ (т.е. на G вместе с ее границей) и требовать только их непрерывность; тогда отсюда прямо следовала бы и равномерная непрерывность этих функций. Если задана какая-нибудь равномерно непрерывная на открытой области G функция φ, то ее можно продолжить по непрерывности и на границу области G. Тогда получится функция, равномерно непрерывная на замкнутой области $\overline{G}$. Для тех простых областей, которые мы будем рассматривать (ср. замечание к Лекции 1), d-мерный объем границы равен нулю. Тогда интеграл от функции φ по области G совпадает с интегралом по $\overline{G}$ от ее продолжения.

Все дальнейшие рассуждения этого раздела одинаково применимы как в том случае, когда рассматриваемые функции принимают комплексные значения, так и в том случае, если они принимают только действительные значения. Параметр λ тоже может принимать комплексные значения. Но очень существенно, что точки x и ξ действительны, т.е. что все координаты этих точек действительны, иначе возникла бы необходимость определить, что такое интеграл по многим комплексным переменным.

Следуя в точности тому определению ядра, которое было дано прежде, нам следовало бы теперь называть ядром $\lambda K(x,\xi)$. Но, пользуясь обычной терминологией, мы будем функцию $K(x,\xi)$ также называть ядром интегрального уравнения (3.10). Говоря в заголовке настоящего раздела о малости ядра, мы имели в виду малость $K(x,\xi)$.

Мы будем искать решение интегрального уравнения (3.10) в виде бесконечного степенного ряда по λ

$$y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \dots . \tag{3.11}$$

Подставляя формально этот ряд в (3.10), получим:

$$\begin{aligned} y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \lambda^3 y_3(x) + \dots = \\ = \lambda \int K(x,\xi)[y_0(\xi) + \lambda y_1(\xi) + \lambda^2 y_2(\xi) + \lambda^3 y_3(\xi) + \dots]\, d\xi + f(x). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= f(x), \\ y_{k+1}(x) &= \int K(x,\xi) y_k(\xi)\, d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{3.13}$$

или

$$\begin{aligned} y_0(x) &= f(x), \\ y_1(x) &= \int K(x,x_1) f(x_1)\, dx_1, \\ y_2(x) &= \iint K(x,x_1)K(x_1,x_2) f(x_2)\, dx_1 dx_2, \\ &\dots, \\ y_k(x) &= \overbrace{\int \cdots \int}^{k \text{ раз}} K(x,x_1)K(x_1,x_2)\dots K(x_{k-1},x_k) f(x_k)\, dx_1 \dots dx_k. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$y_k(x) = \int K^{(k)}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \tag{3.15}$$

где

$$\begin{aligned} K^{(k)}(x,\xi) &= \overbrace{\int \cdots \int}^{(k-1) \text{ раз}} K(x,x_1)K(x_1,x_2)\dots K(x_{k-1},\xi)\, dx_1 \dots dx_{k-1}, \\ &\qquad \text{при } k = 2, 3, \dots, \\ K_1(x,\xi) &= K(x,\xi). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Пользуясь символическими обозначениями, мы можем ядро $K^{(k)}(x,\xi)$ представить в виде

$$K^{(k)}(x,\xi) = \underbrace{K \circ K \circ K \circ \ldots \circ K}_{k \text{ раз}}. \tag{3.17}$$

По доказанному в начале этого раздела все ядра $K^{(k)}(x,\xi)$ равномерно непрерывны. Функция $K^{(k)}(x,\xi)$ называется k-м повторением ядра или k-й итерацией ядра $K(x,\xi)$. Все функции $y_k(x)$, как легко видеть, также равномерно непрерывны. Оценим ядра $K^{(k)}(x,\xi)$. В силу равномерной непрерывности ядро $K(x,\xi)$ ограничено. Пусть

$$|K(x,\xi)| < M. \tag{3.18}$$

Подставляя эту оценку в правую часть (3.16), получим:

$$|K^{(k)}(x,\xi)| < M^k D^{k-1}, \tag{3.19}$$

где D означает объем области G. Пользуясь формулой (3.15), мы получим отсюда

$$|y_k(x)| < M^k D^k F,$$

где F есть верхняя грань $|f(x)|$. Поэтому ряд (3.11) сходится абсолютно и равномерно по x в области G, если

$$|\lambda| < \frac{1}{MD}. \tag{3.20}$$

Сумма этого ряда есть непрерывная функция x, поскольку каждое слагаемое непрерывно. В силу равномерной сходимости ряда (3.11) интегрирование в ранее формально написанном равенстве (3.12) можно производить почленно. Поэтому благодаря определению $y_k(x)$ по формулам (3.13) равенство (3.12) действительно имеет место, т.е. функция $y(x)$, определенная рядом (3.11), является решением интегрального уравнения (3.10).

Покажем, что это решение единственное в классе ограниченных функций при условии (3.20). Действительно, допустим, что существуют два таких решения уравнения (3.10), $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Подставляя их в уравнение (3.10) и вычитая почленно полученные тождества, найдем:

$$y_2(x) - y_1(x) = \lambda \int K(x,\xi)[y_2(\xi) - y_1(\xi)]\, d\xi. \tag{3.21}$$

Обозначим через Y верхнюю грань $|y_2(x) - y_1(x)|$, тогда из (3.21), пользуясь неравенством (3.18), найдем:

$$Y \le |\lambda| MDY.$$

Отсюда на основании (3.20) получим:

$$Y < cY, \text{ где } c < 1.$$

Учитывая, что Y неотрицательно, такое неравенство возможно, только если $Y = 0$, что и требовалось доказать.

Часто бывает удобно представить решение интегрального уравнения (3.10) в следующем виде:

$$y(x) = \lambda \int R(x,\xi,\lambda) f(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{3.22}$$

где

$$R(x,\xi,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K^{(k)}(x,\xi). \tag{3.23}$$

Из оценок (3.19) следует что ряд (3.23) сходится равномерно по (x, ξ, λ), если $x \in G$, $\xi \in G$ и $|\lambda| < \frac{1}{MD} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Отсюда функция $R(x, \xi, \lambda)$ есть равномерно непрерывная функция по совокупности (x, ξ) и голоморфная функция от λ в круге (3.20), если $x \in G$ и $\xi \in G$. Поэтому интеграл (3.22) существует. Что он действительно дает решение интегрального уравнения (3.10) представленное рядом (3.11), легко увидеть, если подставить вместо $R(x, \xi, \lambda)$ ряд (3.23) в правую часть (3.22) и интегрирование по ξ выполнить почленно. Функция $R(x, \xi, \lambda)$ называется **резольвентой** интегрального уравнения (3.10)

Замечание 3.2. *Сравним (3.22) с (3.20). Покажем, что для интегральных уравнений (3.10) с вырожденными ядрами, для которых $a_i(x)$ и $b_i(x)$ равномерно непрерывны и достаточно малы по абсолютной величине, т.е. для тех интегральных уравнений, которые принадлежат одновременно к типам, рассмотренным в Лекциях 3 и данной, будет*

$$\widetilde{R}(x, \xi, \lambda) = \lambda R(x, \xi, \lambda).$$

Так как при этом имеет место первый случай альтернативы, то $D(\lambda) \neq 0$.

Допустим, что в некоторой точке (x_0, ξ_0, λ_0)

$$\widetilde{R}(x_0, \xi_0, \lambda_0) \neq \lambda_0 R(x_0, \xi_0, \lambda_0), \qquad D(\lambda_0) \neq 0.$$

Так как для уравнений с рассматриваемыми ядрами $\widetilde{R}(x_0, \xi, \lambda_0)$ и $R(x_0, \xi, \lambda_0)$ непрерывны по ξ, то всегда можно найти такую окрестность G_0 точки ξ_0, в которой всюду

$$\widetilde{R}(x_0, \xi, \lambda_0) \neq \lambda_0 R(x_0, \xi, \lambda_0).$$

С другой стороны, в силу единственности решения интегральных уравнений рассматриваемого типа при любой равномерно непрерывной функции $f(x)$ должно иметь место следующее равенство:

$$\int \widetilde{R}(x_0, \xi, \lambda_0) f(\xi)\, d\xi = \lambda_0 \int R(x_0, \xi, \lambda_0) f(\xi)\, d\xi.$$

В частности, это равенство должно выполняться при функции $f(\xi)$, равной нулю всюду вне окрестности G_0 точки ξ_0 и положительной внутри этой окрестности, что невозможно.

Как видно из предыдущего, резольвента $R(x, \xi, \lambda)$ определяется ядром интегрального уравнения и не зависит от $f(x)$. Так как функция $y(x)$, даваемая формулой (3.22), представляет единственное решение уравнения (3.10), то отсюда следует, что уравнения (3.10) и (3.22) эквивалентны. Поэтому, если в уравнении (3.22) считать $y(x)$ известной функцией, а $f(x)$ неизвестной функцией, то единственное решение $f(x)$ этого уравнения дается формулой (3.10). Функция $K(x, \xi)$ в этой формуле играет роль резольвенты для уравнения (3.22) с ядром $R(x, \xi, \lambda)$.

Применяя к уравнению

$$z(x) = \lambda \int K(\xi, x) z(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{3.24}$$

транспонированному к уравнению (3.10), те же рассуждения, какие мы только что провели для уравнения (3.10), мы найдем, что в круге (3.20) оно имеет единственное в классе ограниченных функций решение, которое дается рядом

$$z(x) = z_0(x) + \lambda z_1(x) + \lambda^2 z_2(x) + \lambda^3 z_3(x) + \ldots .$$

Здесь

$$z_0(x) = f(x),$$
$$z_k(x) = \int K(\xi, x) z_{k-1}(\xi)\, d\xi,$$

или, обозначая через $K^*(x, \xi)$ ядро $K(\xi, x)$, получим:

$$z_1(x) = \int K^*(x, x_1) f(x_1)\, dx_1,$$
$$z_k(x) = \overbrace{\int \cdots \int}^{k \text{ раз}} K^*(x, x_1) K^*(x_1, x_2) \ldots K^*(x_{k-1}, x_k) f(x_k)\, dx_1 \ldots dx_k,$$

или

$$z_k(x) = \int K^{*(k)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

где

$$K^{*(k)}(x, \xi) = \overbrace{\int \cdots \int}^{(k-1) \text{ раз}} K^*(x, x_1) K^*(x_1, x_2) \ldots K^*(x_{k-1}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{k-1},$$

Легко видеть, выписывая соответствующие интегралы, что $K^{*(k)}(x, \xi) = K^{(k)}(\xi, x)$. Отсюда следует, что решение уравнения (3.24) можно представить в виде

$$z(x) = \lambda \int R^*(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{3.25}$$

где

$$R^*(x, \xi, \lambda) = R(\xi, x, \lambda).$$

Таким образом, мы видим, что в круге (3.20) как уравнение (3.10), так и транспонированное к нему уравнение (3.24) при всякой равномерно непрерывной функции $f(x)$ и при сделанных предположениях о ядре имеют единственное решение, т.е. мы доказали, что в этом случае всегда имеет место первый случай альтернативы Фредгольма. Отметим следующие две формулы:

$$R(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) + \lambda \int K(x, x_1) R(x_1, \xi, \lambda)\, dx_1, \tag{3.26}$$

$$R(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) + \lambda \int R(x, x_1, \lambda) K(x_1, \xi)\, dx_1, \tag{3.27}$$

Для проверки этих формул достаточно подставить вместо R ряд (3.23), а затем сравнить коэффициенты при одинаковых степенях λ, воспользовавшись формулой (3.17).

4. Лекция

4.1. **Интегральные уравнения с ядрами, близкими к вырожденным.** Пусть дано интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int K(x,\xi) y(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{4.1}$$

где $f(x)$ – равномерно непрерывная функция, а

$$K(x,\xi) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_i(x) b_i(\xi) + \lambda K_1(x,\xi) = A(x,\xi) + K_1(x,\xi).$$

Здесь $a_i(x)$, $b_i(\xi)$, $K_1(x,\xi)$ – равномерно непрерывные и, следовательно, ограниченные функции, так как их области определения конечны. Нам опять безразлично, принимают ли эти функции комплексные значения или только действительные.

Чтобы последующие довольно громоздкие выкладки не затемняли существа дела, нам будет удобнее записывать интегральные уравнения в символической форме. Равенство

$$\psi(x) = \int K(x,\xi) y(\xi)\, d\xi$$

условимся записывать символически в виде

$$\psi = Ky$$

Таким образом, через K мы будем обозначать оператор, который функцию $y(x)$ переводит в функцию $\psi(x) = \int K(x,\xi) y(\xi)\, d\xi$. Этот оператор определяется ядром $K(x,\xi)$. Через K^* будем обозначать оператор, который определяется транспонированным ядром $K^*(x,\xi) = K(\xi,x)$. Символом E будем обозначать оператор, который функцию $y(x)$ переводит в ту же самую функцию, т.е. $Ey = y$ при всякой функции $y(x)$. Оператор $K_1 \pm K_2$ определяем равенством

$$(K_1 \pm K_2)y = K_1 y \pm K_2 y$$

при любой функции $y(x)$. Оператор $K_1 K_2$ определяем при помощи следующего равенства:

$$K_1 K_2 y = K_1(K_2 y)$$

для любой функции $y(x)$.

Легко видеть, что если K_1 и K_2 – операторы вида (4.1) с ядрами $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$, то оператор $K_1 \pm K_2$ определяется ядром $K_1(x,\xi) \pm K_2(x,\xi)$, а оператор $K_1 K_2$ определяется ядром $K_1 \circ K_2$. Таким образом, уравнение (4.1) можно записать в виде

$$(E - \lambda K) y = f.$$

Прежде чем переходить к доказательству теорем Фредгольма для уравнения (4.1), сформулируем следующие леммы:

Лемма 4.1. *Если $A(x,\xi)$ – вырожденное ядро и $K(x,\xi)$ – произвольное непрерывное ядро, то $A \circ K$ и $K \circ A$ также суть вырожденные ядра.*

Лемма 4.2. *Ядро, транспонированное к $K_1 \circ K_2$, равно $K_2^* \circ K_1^*$.*

В справедливости этих утверждений легко убедиться, рассматривая соответствующие интегралы. Докажем теперь, что для уравнения (4.1) при $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$, где M_1 есть верхняя грань значений $|K_1(x,\xi)|$, а D – объем области G, справедливы три теоремы Фредгольма.

1. Первая теорема Фредгольма. Покажем, что если однородное уравнение (4.1) имеет только тривиальное решение, то неоднородное уравнение (4.1) имеет решение при всякой функции $f(x)$. Заменив K на $A + K_1$ перепишем уравнение (4.1) в виде

$$(E - \lambda A - \lambda K_1)y = f,$$

где A и K_1 – операторы, соответствующие ядрам $A(x,\xi)$ и $K_1(x,\xi)$. Тогда

$$(E - \lambda K_1)y = \lambda A y + f. \tag{4.2}$$

Положим

$$(E - \lambda K_1)y = \eta. \tag{4.3}$$

Так как $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$, то из доказанной на предыдущей лекции формулы (3.22) следует, что

$$y = \eta + \lambda R\eta = (E + \lambda R)\eta, \tag{4.4}$$

где R – оператор, соответствующий резольвенте $R(x,\xi,\lambda)$ ядра $K_1(x,\xi)$. Подставляя это выражение $y(x)$ в уравнение (4.2), получим:

$$\eta = \lambda A(E + \lambda R)\eta + f,$$

или

$$[E - \lambda A(E + \lambda R)]\eta = f. \tag{4.5}$$

Ядро $A(x,\xi) + A \circ \lambda R$ этого интегрального уравнения вырожденное, как это следует из леммы 4.1. Таким образом, мы показали, что каждому решению $y(x)$ уравнения (4.1) соответствует по формуле (4.3) решение $\eta(x)$ уравнения (4.5) с вырожденным ядром.

Обратно, легко проверить, что каждому решению $\eta(x)$ уравнения (4.5) соответствует решение $y(x)$ уравнения (4.1), определенное по формуле (4.4). Далее, если однородное уравнение (4.5) имеет нетривиальное решение, то однородное уравнение (4.1) также имеет нетривиальное решение, которое определяется формулой (4.4).

Так как, по предположению, однородное уравнение (4.1) имеет только тривиальное решение, то, следовательно, однородное уравнение (4.5) также имеет только тривиальное решение. Для уравнения (4.5) с вырожденным ядром мы доказали в Лекции 3 первую теорему Фредгольма. Поэтому неоднородное уравнение (4.5) имеет решение $\eta(x)$ при всякой функции $f(x)$. По формуле (4.4) мы получим решение $y(x)$ уравнения (4.1) при любой функции $f(x)$. Это решение, очевидно, единственное. Тем самым первая теорема Фредгольма доказана, так как если однородное уравнение имеет нетривиальное решение, то неоднородное уравнение либо не имеет решения, либо это решение не единственное.

2. Вторая теорема Фредгольма. Покажем, что уравнение $(E - \lambda A - \lambda K_1)y = 0$ и транспонированное к нему уравнение

$$(E - \lambda A^* - \lambda K_1^*)\eta = 0 \tag{4.6}$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений, если $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$.

Заметим, что однородные уравнения (4.1) и (4.5) имеют одинаковое число линейно независимых решений, так как каждым p линейно независимым решениям одного уравнения соответствует по формуле (4.3) или (4.4) p линейно независимых решений другого уравнения. Однородное уравнение, транспонированное к уравнению (4.5), имеет в силу леммы 4.2 вид

$$[E-\lambda(E+\lambda R^*)A^*]\zeta = 0. \tag{4.7}$$

Так как уравнение (4.5) имеет вырожденное ядро, то по второй теореме Фредгольма, доказанной в Лекции 3 для уравнений с вырожденными ядрами, однородные уравнения (4.5) и (4.7) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Покажем теперь, что уравнения (4.7) и (4.6) эквивалентны. Пусть некоторая функция $\zeta(x)$ есть решение уравнения (4.7). Покажем, что она удовлетворяет также уравнению (4.6). Применяя к правой и левой частям равенства (4.7) оператор $E\lambda K_1^*$, мы получим:

$$(E-\lambda K_1^*)[E-\lambda(E+\lambda R^*)A^*]\zeta = [E-\lambda K_1^* - \lambda(E-\lambda K_1^*)(E+\lambda R^*)A^*]\zeta. \tag{4.8}$$

Так как из формул (3.24) и (3.25) следует, что

$$(E-\lambda K_1^*)(E+\lambda R^*)\varphi = \varphi$$

при любой функции $\varphi(x)$, то из равенства (4.8) получаем:

$$(E-\lambda K_1^* - \lambda A^*)\zeta = 0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично, применяя оператор $E+\lambda R^*$ к правой и левой частям равенства (4.6) и пользуясь равенством $(E+\lambda R^*)(E-\lambda K_1^*) = E$, получим, что всякое решение уравнения (4.6) удовлетворяет уравнению (4.7). Итак, мы доказали, что однородные уравнения (4.1), (4.5), (4.7) и (4.6) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Тем самым вторая теорема Фредгольма доказана.

Те значения λ, при которых для уравнения (4.1) имеет место второй случай альтернативы Фредгольма, называются собственными значениями уравнения (4.1) (или ядра $K(x,\xi)$; ср. Лекцию 2), а соответствующие нетривиальные решения однородного уравнения – собственными функциями, отвечающими этому собственному значению.

Так как в круге $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$ функция $R(\xi, x, \lambda)$ есть голоморфная функция от λ, то определитель (2.17), соответствующий вырожденному уравнению (4.5), также есть голоморфная функция от λ в этом круге. При $\lambda = 0$ этот определитель обращается в 1. Следовательно, он не равен 0 тождественно. Поэтому его корни не могут иметь точек накопления в этом круге. Следовательно, собственные значения λ уравнения (4.1) не могут иметь предельных точек в круге $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$.

3. Третья теорема Фредгольма. Покажем, что решение уравнения (4.1) существует тогда и только тогда, когда

$$\int f(x)z(x)\,dx = 0,$$

где $z(x)$ – любое решение однородного транспонированного к (4.1) уравнения (4.6). При доказательстве первой теоремы Фредгольма для уравнения (4.1) мы установили, что уравнение (4.1) имеет решение тогда и только тогда, когда существует решение уравнения (4.5) с вырожденным ядром. В Лекции 3 мы показали, что уравнение (4.5) с вырожденным ядром имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int f(x)\zeta(x)\,dx = 0,$$

где $\zeta(x)$ – любое решение уравнения (4.7). Но согласно только что доказанному совокупность таких решений $\zeta(x)$ совпадает с совокупностью решений $z(x)$ уравнения (4.6). Этим теорема доказана.

4.2. **Интегральные уравнения с равномерно непрерывными ядрами.** При рассмотрении интегральных уравнений с таким ядрами удобно пользоваться теоремой Вейерштрасса: пусть f – непрерывная функция, определённая на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен p с вещественными коэффициентами, что для всех x из $[a, b]$ одновременно выполнено условие $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$. В силу этой теоремы всякое равномерно непрерывное ядро $K(x, \xi)$ можно равномерно аппроксимировать с какой угодно точностью вырожденными ядрами. Действительно, пусть $K(x, \xi)$ – какая-нибудь равномерно непрерывная функция (x, ξ), заданная на конечной области G. По указанной теореме, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $K_0(x, \xi)$ достаточно высокой степени относительно координат точек x и ξ, что всюду на G

$$|K(x, \xi) - K_0(x, \xi)| < \varepsilon.$$

Очевидно, что каждый член многочлена $K_0(x, \xi)$ можно представить в виде произведения двух множителей, из которых один зависит только от координат точки x, а другой – только от координат точки ξ, т.е. $K_0(x, \xi) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x) b_i(\xi)$. Поэтому мы имеем

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x) b_i(\xi) + K_1(x, \xi),$$

причем

$$|K_1(x, \xi)| < \varepsilon.$$

Теперь воспользуемся теоремой, доказанной выше: в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon D},$$

где D – объем области G, справедливы все три теоремы Фредгольма и что в этом круге нет точек накопления собственных значений λ. Но ε можно взять как угодно малым. Отсюда следует справедливость этих теорем на сколь угодно больших кругах с центром в точке $\lambda = 0$, т.е. справедливость их на всей плоскости λ.

Напомним ход рассуждений, которые привели нас к доказательству теорем Фредгольма для уравнений с равномерно непрерывными ядрами. Сначала (Лекция 3) мы доказали эти теоремы для интегральных уравнений с вырожденными ядрами. Затем эти теоремы были доказаны для уравнений с ядрами, близкими к вырожденным. А в настоящем разделе было показано, что всякое равномерно непрерывное ядро может быть с какой угодно точностью равномерно аппроксимировано вырожденным ядром. Тем самым получилось доказательство теорем Фредгольма для интегральных уравнений с любыми равномерно непрерывными ядрами. Заметим, что можно приближенно решать интегральные уравнения с непрерывными ядрами, заменяя эти ядра близкими к ним вырожденными.

4.3. **Интегральные уравнения с ядрами вида $\dfrac{L(x,\xi)}{\rho^{\alpha}(x-\xi)}$. 1.** Мы рассмотрим точки $x=(x_1,\dots,x_d)$ и $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_d)$ принадлежащими некоторой конечной замкнутой d-мерной области $\overline{G}$. Пусть

$$\rho(x)=\sqrt{\sum_{m=1}^{d} x_m^2}$$

означает расстояние от нуля до точки x. Предположим, что $L(x,\xi)$ – некоторая непрерывная по точкам (x,ξ) (т.е. по совокупности точек x и ξ) функция. Докажем сначала, что для интегральных уравнений с ядрами такого вида при $\alpha<d$ на всей плоскости λ справедливы все три теоремы Фредгольма и что тогда собственные значения λ не могут иметь конечных предельных точек.

Предварительно докажем следующую лемму для ядер $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$, непрерывных по (x,ξ), если $x\neq\xi$, $x\in\overline{G}$ и $\xi\in\overline{G}$.

Лемма 4.3. *Если*

$$|K_1(x,\xi)|<\frac{A_1}{\rho^{\alpha_1}(x-\xi)},\quad 0\le\alpha_1<d, \tag{4.9}$$

и

$$|K_2(x,\xi)|<\frac{A_2}{\rho^{\alpha_2}(x-\xi)},\quad 0\le\alpha_2<d, \tag{4.10}$$

то интеграл

$$K_3(x,\xi)=\int K_1(x,x_1)K_2(x_1,\xi)\,dx_1$$

всегда существует и непрерывен по (x,ξ), если x отлично от ξ; далее,

$$|K_3(x,\xi)|<\frac{A_3}{\rho^{\alpha_1+\alpha_2-d}(x-\xi)},\qquad \text{если } \alpha_1+\alpha_2>d, \tag{4.11}$$

и

$$|K_3(x,\xi)|<A_3\log\rho(x-\xi)+A_4,\qquad \text{если } \alpha_1+\alpha_2=d, \tag{4.12}$$

где A_3 и A_4 – некоторые постоянные. Если же $\alpha_1+\alpha_2<d$, то этот интеграл существует всегда и есть равномерно непрерывная функция от (x,ξ).

Доказательство. Пусть $x\neq\xi$. Тогда

$$|K_3(x,\xi)|\le\int|K_1(x,x_1)|\cdot|K_2(x_1,\xi)|\,dx_1<$$

$$<\overbrace{\int\cdots\int}^{d}_{r_1\le D}\frac{A_1A_2dx_1^{(1)}\dots dx_d^{(1)}}{\left[\sum_{i=1}^{d}(x_i-x_i^{(1)})^2\right]^{\alpha_1/2}\left[\sum_{i=1}^{d}(x_i^{(1)}-y_i)^2\right]^{\alpha_2/2}}=I. \tag{4.13}$$

Здесь x_i, $x_i^{(1)}$, y_i, $i=1,\dots,d$, – соответственно координаты точек x, x_1, ξ; D – диаметр области $\overline{G}$, т.е. верхняя грань расстояний между двумя ее точками. Мы обозначили $r_1=\sqrt{\sum(x_i^{(1)}-x_i)^2}$.

Для простоты вычислений, не ограничивая общности, положим

$$x_1=\ldots=x_d=0;\qquad y_1=\rho,\quad y_2=\cdots=y_d=0,$$

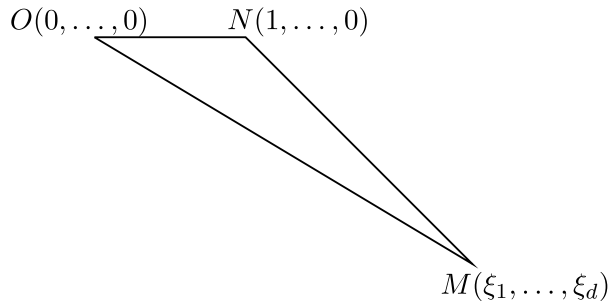

Рис. 2

где $\rho = \rho(x-\xi)$. Положим далее

$$x_i^{(1)} = \rho\xi_i.$$

Тогда интеграл I, стоящий в правой части (4.13), можно переписать так:

$$I = \overbrace{\int \cdots \int}^{d}_{r_1 \le D} \frac{A_1 A_2 \rho^d d\xi_1 \dots d\xi_d}{\left[\sum_{i=1}^d \xi_i^2\right]^{\alpha_1/2} \left[(\xi_1-1)^2 + \sum_{i=2}^d \xi_i^2\right]^{\alpha_2/2} \rho^{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Заметим, что если $\sqrt{\sum_{i=1}^d \xi_i^2} \ge 2$, то

$$\sqrt{(\xi_1-1)^2 + \sum_{i=2}^d \xi_i^2} \ge \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^d \xi_i^2}. \tag{4.14}$$

Действительно, из рис. 2 видно, что $NM + ON \ge OM$. Но $ON = 1$. Следовательно, $NM \ge OM - 1 = \dfrac{1}{2}(OM + (OM-2))$. Но по условию $OM \ge 2$.

Поэтому $NM \ge OM/2$.

5. Лекция

5.1. Интегральные уравнения с ядрами вида $\dfrac{L(x,\xi)}{\rho^{\alpha}(x-\xi)}$ (продолжение).

Разобьем интеграл I на две части и воспользуемся оценкой (4.14). Тогда получим:

$$I \le \frac{A_1A_2}{\rho^{\alpha_1+\alpha_2-d}} \underset{\sum \xi_i^2 \le 4}{\int \cdots \int} \frac{d\xi_1 \dots d\xi_d}{\left[\sum_{i=1}^d \xi_i^2\right]^{\alpha_1/2} \left[(\xi_1-1)^2 + \sum_{i=2}^d \xi_i^2\right]^{\alpha_2/2}} +$$
$$+ \frac{A_1A_2}{\rho^{\alpha_1+\alpha_2-d}} \underset{4 \le \sum \xi_i^2 D^2/\rho^2}{\int \cdots \int} \frac{2^{\alpha_2} d\xi_1 \dots d\xi_d}{\left[\sum_{i=1}^d \xi_i^2\right]^{(\alpha_1+\alpha_2)/2}}.$$

Интеграл в первом слагаемом сходится и дает некоторое постоянное, не зависящее от ρ число C_1. Для вычисления второго интеграла перейдем к полярным координатам. Получим:

$$I \le C_1 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + C_2 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2} \int_2^{D/\rho} \tau^{d-1-\alpha_1-\alpha_2}\, d\tau, \tag{5.1}$$

где C_2 – некоторая положительная постоянная.

Если $\alpha_1+\alpha_2 > d$, то из последней формулы следует, что

$$I \le C_1 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + C_2 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2} \int_2^{D/\rho} \tau^{d-1-\alpha_1-\alpha_2}\, d\tau = C_3 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2},$$

т.е. оценка (4.11).

Если $\alpha_1+\alpha_2 = d$ то из формулы (5.1) следует

$$I \le C_1 + C_2 \log \frac{D}{2\rho},$$

т.е. оценка (4.12) для $K(x,\xi)$. Заметим, что в дальнейших рассмотрениях случая $\alpha_1+\alpha_2 = d$ всегда можно избежать, увеличивая немного α_1 или α_2. Если же $\alpha_1+\alpha_2 < d$, то прежде всего ясно, что $K_3(x,\xi)$ существует и при $x=\xi$. Далее, из оценки (5.1) следует

$$I \le C_1 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + \frac{C_2 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2}}{d-\alpha_1-\alpha_2} \left[\left(\frac{D}{\rho}\right)^{d-\alpha_1-\alpha_2} - 2^{d-\alpha_1-\alpha_2} \right] \le C_3, \tag{5.2}$$

где C_3 есть некоторая постоянная.

Докажем теперь, что $K_3(x,\xi)$ всегда непрерывно зависит от (x,ξ), если x не совпадает с ξ. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} |K_3(x,\xi) - K_3(x^*,\xi^*)| &\le \\ &\le |K_3(x,\xi) - K_3(x,\xi^*)| + |K_3(x,\xi^*) - K_3(x^*,\xi^*)| \le \\ &\le \int |K_1(x,x_1)| \cdot |K_2(x_1,\xi) - K_2(x_1,\xi^*)|\, dx_1 + \\ &+ \int |K_2(x_1,\xi^*)| \cdot |K_1(x,x_1) - K_1(x^*,x_1)|\, dx_1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Мы предположили, что функции $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$ заданы для всех точек x и ξ (если $x \neq \xi$), принадлежащих $\overline{G}$, и что $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$ непрерывны всюду, где только $x \neq \xi$. Поэтому на любом замкнутом множестве точек (x,ξ), не содержащем точек, для которых $x = \xi$, функции $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$ равномерно по (x,ξ) непрерывны. Отсюда каждая из разностей, стоящих под знаком интеграла, равномерно по x_1 мала, если только точки ξ и ξ^*, x и x^* достаточно близки, во всей области $\overline{G}$ точек x_1 за исключением некоторых окрестностей G_1, G_2, G_3, G_4 точек $x_1 == \xi$, $x_1 = \xi^*$, $x_1 = x$, $x_1 = x^*$. К G_1, G_2, G_3, G_4 мы относим точки G, отстоящие соответственно от ξ, ξ^*, x, x^* не дальше некоторого малого, но фиксированного r, не меняющегося при приближении точки x к x^*, ξ к ξ^*. Поэтому в силу условий (4.9) и (4.10) интегралы, входящие в (5.3) и взятые по областям $\overline{G} - (G_1 + G_2)$ и $\overline{G} - (G3 + G4)$, делаются как угодно малыми при достаточной близости точек (x,ξ) и (x^*,ξ^*). Части же интегралов (5.3), взятые по окрестностям G_1, G_2, G_3 и G_4 в силу условий (4.9) и (4.10) делаются как угодно малыми, когда $r \to 0$, если $x \neq \xi$.

Если же $\alpha_1 + \alpha_2 < d$, то при достаточной близости точек (x,ξ) и (x^*,ξ^*) интегралы (5.3) делаются как угодно малыми, если даже точки x и ξ (или x^* и ξ^*) совпадают между собой, так как в этом случае части этих интегралов по окрестностям G_1, G_2, G_3 и G_4 равномерно по (x,ξ) стремятся к 0 при $r \to 0$.

Действительно, первый из интегралов (5.3), взятый по этим окрестностям, не превосходит суммы

$$\int |K_1(x,x_1)| \cdot |K_2(x_1,\xi)|\, dx_1 + \int |K_1(x,x_1)| \cdot |K_2(x_1,\xi^*)|\, dx_1$$

Каждый из этих интегралов мы оцениваем, пользуясь неравенством (5.2). Аналогично оцениваем второй из интегралов (5.3), взятый по G_1, G_2, G_3, G_4. Отсюда следует непрерывность функции $K_3(x,\xi)$ во всей замкнутой области ее определения и, следовательно, ее равномерная непрерывность.

Переходим теперь к рассмотрению интегральных уравнений

$$y(x) = \lambda \int K(x,\xi) y(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{5.4}$$

где $K(x,\xi)$ имеет вид, обозначенный в заголовке настоящего раздела при $\alpha < d$. Функцию $f(x)$ мы будем считать непрерывной на замкнутой области и потому ограниченной; мы будем рассматривать также только непрерывные решения этого уравнения. Заметим, что совершенно так же, как в предыдущем абзаце, легко показать, что при наших предположениях о $K(x,\xi)$ всякое ограниченное решение уравнения (5.4) непрерывно, если $f(x)$ непрерывна.

Докажем прежде всего, что при достаточно малом $|\lambda|$ это уравнение, точно так же как и транспонированное к нему, имеет всегда единственное решение в классе ограниченных функций. Так как для транспонированного уравнения все доказательства проводятся так же, как и для данного уравнения (5.4), то мы ограничимся рассмотрением только уравнения (5.4). Доказательство существования и единственности решения уравнения (5.4) проводится совершенно так же, как это делалось в Лекции 4. Мы будем искать решение в виде суммы ряда

$$y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \dots. \tag{5.5}$$

Как и в Лекции 4, мы найдем, что

$$y(x) = f(x), \qquad y_{k+1}(x) = \int K(x,\xi) y_k(\xi)\, d\xi, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Применяя только что доказанную лемму, мы получим отсюда, что все $y_k(x)$ суть непрерывные функции x. Оценим их модули. Пусть

$$|f(x)| < N,$$

где N – некоторое постоянное число. Пусть M есть верхняя грань значений интеграла

$$\int |K(x,\xi)|\, d\xi$$

(M, очевидно, существует). Тогда легко видеть, что

$$|y_k(x)| \leq NM^k.$$

Отсюда видно, что при

$$|\lambda| < \frac{1}{M} - \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0,$$

ряд (5.5) равномерно по λ сходится и дает функцию, голоморфную по λ и равномерно непрерывную по совокупности (x, λ). Совершенно так же, как в Лекции 4, доказывается, что этот ряд дает решение интегрального уравнения (5.4) и что другого решения этого уравнения в классе ограниченных функций нет.

Совершенно так же, как в Лекции 4, мы найдем, что это решение $y(x)$ можно представить в виде

$$y(x) = \lambda \int R(x,\xi,\lambda) f(\xi)\, d\xi + f(x),$$

где

$$R(x,\xi,\lambda) = K(x,\xi) + \lambda K^{(2)}(x,\xi) + \lambda^2 K^{(3)}(x,\xi) + \ldots . \tag{5.6}$$

Первый член этого ряда имеет вид

$$K(x,\xi) = \frac{L(x,\xi)}{\rho^\alpha(x-\xi)}, \tag{5.7}$$

где $L(x,\xi)$ есть равномерно непрерывная по (x,ξ) функция. В силу ограниченности G отсюда следует ограниченность $L(x,\xi)$ и по доказанной в начале этого раздела лемме

$$|K^{(2)}(x,\xi)| < \frac{A}{\rho^{2\alpha-d}(x-\xi)},$$

вообще

$$|K^{(m)}(x,\xi)| < \frac{A_m}{\rho^{m\alpha-(m-1)d}(x-\xi)},$$

если $m\alpha - (m-1)d > 0$. Здесь через A и A_m обозначены некоторые постоянные. Так как $\alpha < d$, то при достаточно большом m будет

$$m\alpha - (m-1)d < 0.$$

Тогда в силу доказанной леммы $K^{(m)}(x,\xi)$ будет равномерно непрерывной по (x,ξ) функцией. Все следующие повторения $K^{(p)}(x,\xi)$ будут также равномерно непрерывными. При этом для $p \geq m$ будет

$$|K^{(p+1)}(x,\xi)| \leq \left| \int K(x,x_1)K^{(p)}(x_1,\xi)\,dx_1 \right| \leq$$
$$\leq M_p \int |K(x,x_1)|\,dx_1 \leq M_p M,$$

где M_p есть верхняя грань модуля $K^{(p)}(x,\xi)$. Отсюда получается доказательство равномерной по x, ξ и λ (при $\lambda < 1/M - \varepsilon$) сходимости ряда (5.6), так же как это доказывалось для ряда (3.23). Аналогичные рассуждения можно провести для транспонированного уравнения.

Все формулы, которые мы получили в Лекции 4, сохраняют и теперь свою силу. После этого все рассуждения Лекции 4 делаются применимыми для интегральных уравнений с ядрами

$$K(x,\xi) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) b_i(\xi) + K_1(x,\xi),$$

где $a_i(x)$ и $b_i(\xi)$ непрерывны в $\overline{G}$, а $K_1(x,\xi)$ имеет вид (5.7). Таким образом, получается доказательство теорем Фредгольма в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{M_1}$$

где M_1 есть наибольшая из верхних граней интегралов:

$$\int |K_1(x,\xi)|\,d\xi, \qquad \int |K_1(x,\xi)\,dx.$$

Кроме того, получается, что в этом круге не может быть точек сгущения для собственных значений λ.

Перейдем теперь к доказательству теорем Фредгольма для интегральных уравнений с ядрами того типа, какой указан в названии настоящего раздела. Положим

$$\varphi_C(x) = x, \text{ если } x \leq C,$$
$$\varphi_C(x) = C, \text{ если } x > C.$$

Тогда функция

$$K_C(x,\xi) = L(x,\xi)\varphi_C\left(\frac{1}{\rho^\alpha(x-\xi)}\right)$$

будет равномерно непрерывной функцией (x,ξ) при всяком C. При достаточно большом C интегралы

$$\int |K(x,\xi) - K_C(x,\xi)|\,d\xi, \qquad \int |K(x,\xi) - K_C(x,\xi)|\,dx$$

будут равномерно по x, соответственно по ξ, как угодно малы. Как мы уже говорили в Лекции 5, равномерно непрерывную функцию $K_C(x,\xi)$ можно с какой угодно точностью равномерно на области $\overline{G}$ аппроксимировать суммами вида

$$S_m(x,\xi) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) b_i(\xi).$$

Тогда будет

$$K(x,\xi) = S_m(x,\xi) + \widetilde{K}(x,\xi),$$

причем верхняя грань значений

$$\int |\widetilde{K}(x,\xi)|\,d\xi, \qquad \int |\widetilde{K}(x,\xi)|\,dx$$

может быть сделана меньше любого $\varepsilon > 0$. Отсюда получается доказательство всех трех теорем Фредгольма на всей плоскости λ для интегральных уравнений с ядрами вида (5.7). Кроме того, получается доказательство отсутствия конечных точек накопления у собственных значений. Только что приведенное доказательство теорем Фредгольма для ядер вида (5.7) в основном воспроизводит доказательство этих теорем для ограниченных равномерно непрерывных ядер. Доказательство этих последних теорем в сущности основывалось только на том, что некоторые интегралы были малы; требование малости подинтегральных функций было для этого излишним. Этим мы и воспользовались в настоящем разделе.

Замечание 5.1. *Пусть ядро $K(x,\xi)$ – непрерывная функция x и ξ, когда $x \in G$, $\xi \in G$ и $x \neq \xi$, и удовлетворяет условию $|K(x,\xi)| < \dfrac{A}{\rho^{\alpha}(x-\xi)}$, $0 \le \alpha < d$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\alpha + \varepsilon < d$. Тогда*

$$K(x,\xi) = \frac{K(x,\xi)\rho^{\alpha+\varepsilon}(x-\xi)}{\rho^{\alpha+\varepsilon}(x-\xi)} = \frac{L(x,\xi)}{\rho^{\alpha+\varepsilon}(x-\xi)},$$

где $L(x,\xi)$ – непрерывная функция x и ξ. Таким образом, для ядер указанного вида также справедливы все теоремы Фредгольма.

2. Многие задачи математической физики приводят к рассмотрению интегральных уравнений, в которых интегрирование происходит не по области d-мерного евклидова пространства, а по линии, поверхности или многообразию меньшей размерности, расположенным в евклидовом пространстве достаточно большого числа измерений. Мы будем называть d-мерным непрерывно дифференцируемым многообразием M, лежащим в n-мерном евклидовом пространстве E_n $(0 < d < n)$ замкнутое связное ограниченное множество точек M, лежащее в E_n и такое, что в некоторой окрестности любой точки $A \in M$ некоторые $n-d$ координат точек M являются непрерывно дифференцируемыми функциями остальных d координат.

Для интегральных уравнений такого вида также справедливы теоремы Фредгольма. Ниже мы покажем, как, пользуясь рассуждениями п. **1**, можно доказать теоремы Фредгольма в том случае, когда областью интегрирования служит замкнутая гладкая поверхность в трехмерном пространстве. Для других многообразий доказательства аналогичны. Итак, пусть дано уравнение

$$y(x) = \lambda \int\limits_S K(x,\xi) y(\xi)\,dS_\xi + f(x), \tag{5.8}$$

где S – замкнутая гладкая поверхность в трехмерном пространстве (мы предполагаем, что в некоторой достаточно малой окрестности любой точки $A \in S$ какая-либо одна из координат точек S является непрерывно дифференцируемой функцией двух других координат), dS_ξ – элемент площади поверхности S; $x \in S$, $\xi \in S$, $f(x)$ – заданная непрерывная функция на S. Пусть $K(x,\xi) = \dfrac{L(x,\xi)}{\rho^{\alpha}(x-\xi)}$, где $L(x,\xi)$ – непрерывная функция, когда $x \in S$ и $\xi \in S$;

$0 \leq \alpha < 2$ и $\rho(x-\xi)$ – расстояние между точками x и ξ в трехмерном пространстве. Для того, чтобы доказать с помощью рассуждений п. 1 все теоремы Фредгольма для рассматриваемого уравнения (5.8), достаточно показать, что остается справедливой лемма п. 1 и что всякое непрерывное ядро $K_1(x,\xi)$, заданное на S, можно равномерно приблизить вырожденным ядром с любой степенью точности. Все другие рассуждения Лекций 4 и 5 переносятся автоматически на уравнения рассматриваемого вида.

Непрерывное ядро $K_1(x,\xi)$ можно рассматривать как непрерывную функцию, заданную на некотором замкнутом множестве S^2 в 6-мерном пространстве $(x,\ y,\ z,\ x_\xi,\ y_\xi,\ z_\xi)$. Это множество получается, когда точки $x(x,y,z)$ и $\xi(x_\xi,y_\xi,z_\xi)$ независимо друг от друга пробегают множество S. Обозначим через R куб в пространстве $(x,y,z,x_\xi,y_\xi,z_\xi)$, содержащий все точки множества S^2. Непрерывную функцию, заданную на замкнутом множестве S^2, можно продолжить до непрерывной функции, заданной на R. По теореме Вейерштрасса непрерывную функцию, заданную на R, можно равномерно приблизить многочленом с любой степенью точности. Если теперь рассматривать этот многочлен только на S^2, то он и будет являться вырожденным ядром, приближающим ядро $K_1(x,\xi)$ с любой степенью точности.

Убедимся теперь в справедливости леммы п. **1** Лекции 5. Для доказательства непрерывности $K_3(x,\xi)$ при $x \neq \xi$, подобно доказательству, проведенному в п. **1**, достаточно проверить, что интеграл вида

$$\int\limits_{S(\xi,r)} \frac{dS_{x_1}}{\rho^\alpha(\xi-x_1)}, \quad 0 \leq \alpha < 2,$$

взятый по части поверхности S, расположенной в сфере радиуса r с центром в точке ξ, будет равномерно по ξ, меняющемуся в малой окрестности некоторой точки ξ_0, как угодно мал при достаточно малом r.

Пусть в окрестности точки ξ_0 поверхность S задается непрерывно дифференцируемой функцией $z=f(x,y)$ и ξ' и x_1' – проекции точек ξ и x_1 на плоскость $z=0$. Так как $dS < Cdxdy$, где C есть некоторая постоянная, и кроме того, $\rho(\xi'-x_1') \leq \rho(\xi-x_1)$, то

$$\int\limits_{S(\xi,r)} \frac{dS_{x_1}}{\rho^\alpha(\xi-x_1)} < \int\limits_{S(\xi',r)} \frac{Cdxdy}{\rho^\alpha(\xi'-x_1')}.$$

Последний интеграл можно сделать как угодно малым, если r достаточно мало.

Для доказательства непрерывности $K_3(x,\xi)$ при $x=\xi$ и $\alpha_1+\alpha_2<d$ достаточно точно также оценить интеграл вида

$$\int\limits_{S(\xi,r)+S(x,r)} \frac{dS_{x_1}}{\rho^{\alpha_1}(\xi-x_1)\rho^{\alpha_2}(\xi-x_1)}.$$

когда x и ξ меняются в малой окрестности точки $x* = \xi*$ и r стремится к нулю, и воспользоваться неравенством (5.2).

Чтобы доказать справедливость неравенств (4.11) и (5.2), покажем ограниченность функций

$$K_3(x,\xi)\rho^{\alpha_1+\alpha_2-d}(x-\xi), \text{ если } \alpha_1+\alpha_2>d,$$

и
$$\frac{K_3(x,\xi)}{|\log\rho(x-\xi)|+1},\ \text{если } \alpha_1+\alpha_2=d.$$
при $x\in S$, $\xi\in S$, $x\neq\xi$.

Для этого допустим, что наше утверждение неверно. Тогда найдутся последовательности точек $x_1\in S, x_2\in S,\ldots,\xi_1\in S,\xi_2\in S$ причем $x_i\neq\xi_i$ и
$$|K_3(x_i,\xi_i)|\rho^{\alpha_1+\alpha_2-d}(x_i-\xi_i)\to\infty \text{ при } i\to\infty. \tag{5.9}$$
Мы можем предполагать, что последовательности x_i. и ξ_i являются сходящимися, т.е.
$$x_i\to x_0\in S,\qquad \xi_i\to\xi_0\in S.$$
Положим для определенности, что в некоторой достаточно малой окрестности U точки x_0 координата z точек S является непрерывно дифференцируемой функцией x и y и что в этой окрестности имеет место неравенство $dS\le Cdxdy$ (C – постоянная). Тогда для всех достаточно больших i
$$\begin{aligned}&|K_3(x_i,\xi)|\le\\ &\le A_1A_2\int\limits_U\frac{dS_{x_1}}{\rho^{\alpha_1}(x_i-x_1)\rho^{\alpha_2}(x_1-\xi_i)}+A_1A_2\int\limits_{S-U}\frac{dS_{x_1}}{\rho^{\alpha_1}(x_i-x_1)\rho^{\alpha_2}(x_1-\xi_i)}\le\\ &\le A_1A_2C\int\limits_{U'}\frac{dxdy}{\rho^{\alpha_1}(x'_i-x'_1)\rho^{\alpha_2}(x'_1-\xi'_i)}+\\ &+A_1A_2\max_{x_1\in S-U}\frac{1}{\rho^{\alpha_1}(x_i-x_1)\rho^{\alpha_2}(x_1-\xi_i)}\int\limits_{S-U}dS_{x_1},\end{aligned}$$
где штрихами обозначены проекции на плоскость $z=0$. Так как последнее из полученных слагаемых ограничено, то из (5.9) следует, что
$$\rho^{\alpha_1+\alpha_2-d}(x_i-\xi_i)\int\limits_{U'}\frac{dxdy}{\rho^{\alpha_1}(x'_i-x'_1)\rho^{\alpha_2}(x'_1-\xi'_i)}\to\infty \text{ при } i\to\infty. \tag{5.10}$$

Однако для всех достаточно больших i будет $\rho(x'_i-\xi'_i)\le C_1\rho(x_i-\xi_i)$ где $C_1>0$. Поэтому из (5.10) получаем:
$$\rho^{\alpha_1+\alpha_2-d}(x'_i-\xi'_i)\int\limits_{U'}\frac{dxdy}{\rho^{\alpha_1}(x'_i-x'_1)\rho^{\alpha_2}(x'_1-\xi'_i)}\to\infty \text{ при } i\to\infty.$$

Но точки x'_i, ξ'_i находятся уже в области U' на плоскости. Поэтому в силу леммы, доказанной в п. 1, имеем для всех достаточно больших i
$$\int\limits_{U'}\frac{dxdy}{\rho^{\alpha_1}(x'_i-x'_1)\rho^{\alpha_2}(x'_1-\xi'_i)}<\frac{A}{\rho^{\alpha_1+\alpha_2-d}(x'_i-\xi'_i)}$$
(A – некоторая постоянная). Это соотношение противоречит предыдущему. Аналогично доказывается ограниченность функции $\dfrac{K_3(x,\xi)}{|\log\rho(x-\xi)|+1}$.

6. Лекция

6.1. **Примеры особых интегральных уравнений.** Особыми интегральными уравнениями мы называем такие, для которых или неверны теоремы Фредгольма, или собственные значения имеют конечные предельные точки. У приводимых в этом разделе особых интегральных уравнений интервал интегрирования бесконечен. Но, полагая, например,

$$\xi = \operatorname{tg} \eta, \qquad x = \operatorname{tg} y,$$

эти интегральные уравнения можно привести к таким уравнениям, у которых интервал интегрирования конечен.

Примеры 6.1. (1) *У интегрального уравнения*

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^\infty \sin|x - \xi| \varphi(\xi)\, d\xi$$

при $\lambda = \pm\sqrt{2/\pi}$ *– имеется бесконечное множество линейно независимых решений, так как при таких* λ *этому уравнению удовлетворяют функции*

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ax} \pm \frac{x}{a^2 + x^2}$$

при любом $a > 0$.

(2) *Уравнение*

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda - \xi|} \varphi(\xi)\, d\xi$$

имеет решение e^{iax} *при* $\lambda = \dfrac{1+\alpha^2}{2}$. *Таким образом, всякое действительное* $\lambda \geq \dfrac{1}{2}$ *является собственным значением. Мы рассматриваем здесь только действительные значения* a, *так как в противном случае* e^{iax} *делается неограниченным на бесконечном интервале* $-\infty < x < +\infty$.

Существуют примеры интегральных уравнений, для которых не имеют места и другие теоремы Фредгольма. Важную роль в теории дифференциальных уравнений с частными производными и математической физике играют так называемые сингулярные интегральные уравнения. Такие уравнения имеют вид (5.4), но ядра таких уравнений имеют сильную особенность ($\alpha = d$) и неинтегрируемы в обычном смысле, а соответствующий интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Построена полная теория сингулярных интегральных уравнений. Эта теория существенно отличается от теории интегральных уравнений Фредгольма. Сингулярным интегральным уравнениям посвящена обширная литература, надеюсь, мы обратимся к ней в конце этого курса.

6.2. **Интегральные уравнения для резольвенты.** Мы рассмотрели интегральные уравнения Фредгольма для различных классов ядер этих уравнений, последовательно переходя ко все более и более случаям. Как мы видели, свойства решений этих уравнений в существенном определяются свойствами их резольвент. Рассмотрим их подробнее. В Лекции 4 мы ввели интегральные операторы $\psi(x) = \int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$, для краткости это обозначалось как $\psi = K\varphi$. Эти операторы линейны и допускают композицию. Вводя **итерированные ядра**:

$$K_1(x,\xi) = K(x,\xi); \qquad K_n(x,\xi) = \int_a^b K_{n-1}(x,t_1)K(t_1,\xi)dt_1, \tag{6.1}$$

т.е. $K_n(x,\xi)$ есть ядро оператора K^n, мы получили на Лекции 4, что резольвента задается рядом

$$R(x,\xi;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,\xi)\lambda^n, \qquad K_1(x,\xi) = K(x,\xi). \tag{6.2}$$

При сделанном предположении непрерывности $K(x,\xi)$ в $\overline{G}$ ряд, составленный из модулей членов ряда (6.2), сходится равномерно по x и ξ в $\overline{G}$ при выполнении (3.20), т.е. когда

$$|\lambda| < \left[\int_a^b \int_a^b |K(x,\xi)|^2 dx d\xi\right]^{-1/2}. \tag{6.3}$$

Ряд (6.2) сходится абсолютно и равномерно при условии (3.20), или (6.3). Сумму этого ряда в (3.23) мы обозначили $R(x,\xi;\lambda)$ назвали **р**езольвентой ядра $K(x,\xi)$ или интегрального уравнения.

Мы показали, что резольвента $R(x,\xi;\lambda)$ определенная при условии (3.20), удовлетворяет как функция x и ξ двум интегральным уравнениям (3.26) и (3.27), которые следуют из

$$\lambda \int_a^b R(x,t;\lambda)K(t,\xi)dt = R(x,\xi;\lambda) - K(x,\xi).$$

До сих пор мы определили резольвенту только при значениях λ, удовлетворяющих условию (3.20). В дальнейшем увидим, что резольвента существует на всей плоскости комплексного переменного λ, кроме некоторых изолированных значений λ, и что она на всей плоскости λ удовлетворяет уравнениям (3.26) и (3.27). Поэтому представляется важным доказать теорему существования и единственности, исходя только из уравнений (3.26) и (3.27).

Теорема 6.1. *Если при некотором значении λ существует непрерывная в квадрате G функция $R(x,\xi;\lambda)$, удовлетворяющая уравнениям (3.26) и (3.27), то уравнение (3.10) при этом значении λ имеет единственное решение, и это решение определяется формулой (3.20).*

Доказательство распадается на две части. Сначала мы докажем, что при наличии (3.26) и (3.27) всякое решение уравнения (3.10) должно выражаться формулой (3.22). Это даст нам единственность. Затем мы проверим, что формула (3.22) действительно дает решение уравнения (3.10).

Пусть $\varphi(x)$ – некоторое решение уравнения (3.10). Умножим обе части (3.10) на $\lambda R(x,\xi;\lambda)$ и проинтегрируем по ξ:

$$\lambda \int R(x,\xi;\lambda)\varphi(\xi) = \lambda \int \left[\int \lambda R(x,\xi;\lambda)K(\xi,t)d\xi\right]\varphi(t)dt + \lambda \int R(x,\xi;\lambda)f(\xi).$$

Принимая во внимание уравнение (3.27), мы можем написать:

$$\lambda \int R(x,\xi;\lambda)K(\xi,t)\,d\xi = R(x,t;\lambda) - K(x,t),$$

и предыдущая формула переписывается в виде

$$\lambda \int R(x,\xi;\lambda)\varphi(\xi)\,d\xi = \lambda \int R(x,\xi;\lambda)\varphi(\xi)d\xi - \lambda \int K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \\ + \lambda \int R(x,s;\lambda)f(s).$$

Сокращая в этой формуле одинаковые члены слева и справа и заменяя в силу (3.10)

$$\lambda \int K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi = \varphi(x) - f(x),$$

получим формулу (3.22).

Справедливость утверждения, что функция $y(x)$, определяемая формулой (3.22), действительно удовлетворяет уравнению (3.10) была доказана выше. Теорема, таким образом, полностью доказана. ■

Принимая во внимание, что при значениях λ, удовлетворяющих условию (3.20), мы построили резольвенту, удовлетворяющую уравнениям (3.26) и (3.27), мы можем утверждать, что при значениях λ, удовлетворяющих условию (3.20), уравнение (3.10) имеет единственное решение и что это решение определяется формулой (3.22). Это можно было бы доказать и непосредственно.

6.3. **Знаменатель Фредгольма.** Мы определили резольвенту только в круге (3.20) плоскости комплексного переменного λ. Дальше мы покажем, что она может быть аналитически продолжена на всю плоскость λ, что ее особыми точками могут быть только полюсы, и что при всех λ, кроме полюсов, она удовлетворяет уравнениям (3.26) и (3.27). Для этого мы построим такую целую функцию $D(\lambda)$ (ее частный случай для вырожденного ядра мы ввели в (2.17)), что при умножении ряда (3.23) на $D(\lambda)$ получим также целую функцию $D(x,\xi;\lambda)$ от λ. Резольвента окажется, таким образом, частным двух целых функций λ (ср. (3.3)) :

$$R(x,\xi;\lambda) = \frac{D(x,\xi;\lambda)}{D(\lambda)}. \tag{6.4}$$

т.е. дробной или мероморфной функцией λ. Если уравнение $D(\lambda) = 0$ не имеет корней, то $R(x,\xi;\lambda)$ есть целая функция λ и ряд (3.23) сходится на всей плоскости λ. Дальше мы, построив $D(\lambda)$ и $D(x,\xi;\lambda)$, подробно исследуем правую часть (6.4).

Введем

$$K\left(\begin{smallmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_n \end{smallmatrix}\right) = \begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) & \dots & K(x_1,y_n) \\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & \dots & K(x_2,y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n,y_1) & K(x_n,y_2) & \dots & K(x_n,y_n) \end{vmatrix}. \tag{6.5}$$

Докажем следующее равенство:

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n, \tag{6.6}$$

где
$$d_n = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K\left(\begin{smallmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \end{smallmatrix}\right) dt_1 dt_2 \ldots dt_n, \tag{6.7}$$
определяется согласно формуле (6.5). Для доказательства этого равенства мы должны доказать два факта: во-первых, что ряд (6.6) сходится на всей плоскости комплексного переменного λ, т.е. является целой функцией λ, и, во-вторых, что при умножении ряда (6.2) на ряд (6.6) мы получим также целую функцию λ. Произведем оценку коэффициентов d_n. В формуле (6.7) под знаком интеграла стоит определитель порядка n, каждый элемент которого $K(t_i, t_k)$ по модулю не превышает положительного числа M. Применяя теорему Адамара и обычную оценку кратного интеграла, получим
$$|d_n| \leq n^{n/2}[M(b-a)]^n.$$
Таким образом, члены ряда (6.6) по модулю не превосходят положительных чисел:
$$\frac{|\lambda|^n}{n!} n^{n/2}[M(b-a)]^n. \tag{6.8}$$
Покажем, что эти числа образуют сходящийся ряд. Взяв отношение последующего числа к предыдущему, получим
$$\frac{|\lambda|}{n+1} \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{n^{n/2}} M(b-a) = \frac{|\lambda| M(b-a)}{\sqrt{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/2}$$
При беспредельном возрастании n выражение $(1+1/n)^{n/2}$ стремится к $\sqrt{e}$, а все написанное отношение стремится к нулю, откуда и вытекает сходимость при всяком λ ряда, образованного числами (6.8). Таким образом, функция (6.6) является целой функцией от λ.

Естественно предположить, что функция $D(\lambda)$ является знаменателем для резольвенты, т.е., что, умножая ряд (3.23) на $D(\lambda)$, мы получим целую функцию от λ. В результате этого умножения получим ряд, члены которого уже не числа, как $D(\lambda)$,а функции от (x, ξ). Введем специальное обозначение для этого ряда:
$$D(x, \xi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n(x, \xi). \tag{6.9}$$
Оба степенных ряда (3.23) и (6.6) сходятся в круге (3.20). Поэтому и ряд (6.9), полученный от их перемножения, также сходится в этом круге. Степенные ряды, как абсолютно сходящиеся, можно перемножать почленно, и мы могли бы получить выражение для коэффициентов $d_n(x, \xi)$ при помощи простого перемножения упомянутых рядов, но для удобства в дальнейших вычислениях поступим иначе. Умножая обе части (3.26) на $D(\lambda)$, получим
$$D(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(x, t_1) D(t_1, \xi; \lambda) dt_1. \tag{6.10}$$
Подставляя в эту формулу вместо $D(\lambda)$ и $D(x, \xi, \lambda)$ ряды (6.6) и (6.9) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, придем к формуле:
$$d_n(x, \xi) = K(x, \xi) d_n - n \int_a^b K(x, t_1) d_{n-1}(t_1, \xi) dt_1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6.11}$$
которая дает возможность последовательно вычислять коэффициенты $d_n(x, \xi)$, причем мы должны считать $d_0(x, \xi) = K(x, \xi)$. Заметим при этом, что ряд

(6.9) во всяком случае сходится абсолютно и равномерно относительно (x, ξ) при условии (3.20), так как при этом члены перемножаемых рядов (6.2) и (6.6) меньше положительных чисел, образующих сходящийся ряд. Это дает нам возможность почленного интегрирования в правой части формулы (6.10). Полагая в (6.11) $n = 1$, будем иметь:

$$d_1(x,\xi) = K(x,\xi)\int K(t_1,t_1)dt_1 - \int K(x,t_1)K(t_1,\xi)dt_1 = \int \begin{vmatrix} K(x,\xi) & K(x,t_1) \\ K(t_1,\xi) & K(t_1,t_1)dt_1 \end{vmatrix}$$

т.е., принимая во внимание обозначение (6.5),

$$d_1(x,\xi) = \int K\left(\begin{smallmatrix} x, & t_1 \\ \xi, & t_1 \end{smallmatrix}\right) dt_1.$$

Аналогично, при $n = 2$ в силу формулы (6.11) получаем:

$$d_2(x,\xi) = \iint K\left(\begin{smallmatrix} x, & t_1, & t_2 \\ \xi, & t_1, & t_2 \end{smallmatrix}\right) dt_1 dt_2.$$

Докажем, что при любом целом положительном n мы имеем:

$$d_n(x,\xi) = \iint K\left(\begin{smallmatrix} x, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ \xi, & t_1, & t_2 & \ldots, & t_n \end{smallmatrix}\right) dt_1 dt_2 \ldots dt_n. \tag{6.12}$$

Выше мы доказали справедливость этой формулы при $n = 1$. Обозначим через $d_n^*(x,\xi)$ выражение, стоящее в правой части формулы (6.12). Мы имеем в силу сказанного: $d_1^*(x,\xi) = d_1(x,\xi)$. Покажем сейчас, что $d_n^*(x,\xi)$ удовлетворяют тому же соотношению:

$$d_n^*(x,\xi) = K(x,\xi)d_n - n\int K(x,t_1)d_{n-1}^*(t_1,\xi)dt_1,$$

что и $d_n(x,\xi)$. В силу (6.11) и последнего равенства $d_n(x,\xi)$ и $d_n^*(x,\xi)$, $n = 2, 3, \ldots$ определяются последовательно единственным образом, и из $d_1^*(x,\xi) = d_1(x,\xi)$ будет следовать, что $d_n^*(x,\xi) = d_n(x,\xi)$ при любом n. Таким образом, доказательство формулы (6.12) сводится к доказательству предыдущего соотношения, где $d_n^*(x,\xi)$ есть правая часть формулы (6.12).

Применяя к определителю, входящему в формулу (6.12), теорему Адамара, получим следующую оценку:

$$|d_n(x,\xi)| \leq (n+1)^{(n+1)/2} M^{n+1} D^n,$$

и отсюда, совершенно так же, как и для (6.6), покажем, что ряд (6.9) дает целую функцию от λ и что при любом λ, он сходится абсолютно и равномерно относительно (x,ξ) в квадрате $\overline{G}$.

Принимая во внимание, что при условии (6.7) мы имеем

$$R(x,\xi;\lambda)D(\lambda) = D(x,\xi\lambda),$$

можем написать при этих значениях λ:

$$R(x,\xi;\lambda) = \frac{D(x,\xi;\lambda)}{D(\lambda)}. \tag{6.13}$$

Правая часть этой формулы дает аналитическое продолжение функции $R(x,\xi;\lambda)$ на всю плоскость комплексного переменного λ. Отметим, что знаменатель в формуле (6.13), называемый обычно **знаменателем Фредгольма**, не зависит от переменных (x, ξ). Укажем некоторые следствия из написанных выше формул. Из (6.7) и (6.12) непосредственно следует:

$$d_{n+1} = \int_a^b d_n(x, x) ds. \tag{6.14}$$

Отметим еще возможность простого последовательного вычисления коэффициентов d_n и $d_n(x, \xi)$. Полагая в формуле (6.14) $n = 0$ и принимая во внимание, что $d_0(x, \xi) = K(x, \xi)$, получим из этой формулы d_1. Рассматривая затем формулу (6.11) при $n = 1$, получим из нее $d_1(x, \xi)$, помня, что $d_0 = 1$. Затем формула (6.14) при $n = 1$ даст нам d_2, после чего формула (6.11) при $n = 2$ даст $d_2(x, \xi)$ и т.д. Если в формуле (6.9) положить $\xi = x$ и проинтегрировать обе части по x, то, в силу (6.14) получим

$$\int_a^b D(x, x; \lambda) dx = d_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_{n+1},$$

т.е. в силу (6.6)

$$D'(\lambda) = -\int_a^b D(x, x; \lambda) dx. \tag{6.15}$$

Отметим, что из (6.12) следует непрерывность $d_n(x, \xi)$ в $\overline{G}$, а из равномерной сходимости ряда (6.9) в $\overline{G}$ следует непрерывность $D(x, \xi; \lambda)$ в $\overline{G}$.

Принимая во внимание (6.13), (6.15) мы находим

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\int_a^b R(s, s, \lambda) ds$$

и в силу (3.23), вводя обозначения,

$$A_n = \int_a^b K^{(n)}(s, s) ds, \qquad A_1 = \int_a^b K(s, s) ds,$$

будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1} \lambda^n = -\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)},$$

откуда в силу $D(0) = 1$,

$$D(\lambda) = \exp -\left(A_1 \lambda + A_2 \frac{\lambda^2}{2} + A_3 \frac{\lambda^3}{3} + \dots \right).$$

Числа A_n называются обычно следами повторных ядер $K_n(x, \xi)$, $n = 1, \dots$. Ряд, стоящий в показателе степени, сходится при условии (6.3). Но если мы разложим правую часть найденной формулы по степеням λ, пользуясь обычным разложением e^z,

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(A_1 \lambda + A_2 \frac{\lambda^2}{2} + A_3 \frac{\lambda^3}{3} + \dots \right)^n}{n!},$$

то получим разложение на всей плоскости λ, и коэффициенты d_n будут содержать лишь следы $A_1, A_2, \dots$. Из формулы

$$D(x, \xi; \lambda) = R(x, \xi; \lambda) D(\lambda)$$

следует, что коэффициенты $d_n(x,\xi)$ в разложении $D(x,\xi;\lambda)$ могут быть выражены через следы A_1, A_2, ..., A_n и ядра $K_1(x,\xi)$, $K_2(x,\xi)$, ..., $K_{n-1}(x,\xi)$. Целые функции $D(\lambda)$ и $D(x,\xi;\lambda)$ могут быть разложены на всей плоскости λ по целым неотрицательным степеням $\lambda-\lambda_0$, где λ_0 – любое фиксированное комплексное число. Например,

$$D(x,\xi;\lambda) = D(x,\xi;\lambda_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k D(x,\xi;\lambda_0)}{\partial \lambda^k} \frac{(\lambda-\lambda_0)^k}{k!},$$

где

$$\frac{\partial^k D(x,\xi;\lambda)}{\partial \lambda^k} = \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} d_n(x,\xi).$$

Из оценок для $d_n(x,\xi)$ непосредственно следует, что последний ряд сходится равномерно в $\overline{G}$ при любом λ, и мы можем утверждать, что коэффициенты в разложении $D(x,\xi;\lambda)$ по степеням $\lambda-\lambda_0$ также непрерывные в $\overline{G}$ функции.

7. Лекция

7.1. **Уравнение Фредгольма при любом λ.** Рассмотрим уравнение (6.10). Оно получилось из уравнения (3.26) при помощи умножения на $D(\lambda)$. Уравнения (3.26) и (3.27) были нами получены лишь при условии (6.3) и, следовательно, мы можем утверждать, что обе части уравнения (6.10) совпадают при условии (6.3). Но в силу основного принципа аналитического продолжения, если две целые функции совпадают в некотором круге на плоскости комплексного переменного λ, то они совпадают и на всей плоскости комплексного переменного. Деля обе части (6.10) на $D(\lambda)$, мы видим, что резольвента удовлетворяет уравнению (3.26) при любых значениях λ, которые не обращают в нуль $D(\lambda)$. В этом последнем случае отношение (6.13) теряет смысл. Точно так же, применяя аналитическое продолжение, мы убедимся, что резольвента удовлетворяет и уравнению (3.27) при упомянутых значениях λ. Таким образом, если λ отлично от корня $D(\lambda)$, то мы имеем непрерывное решение обоих уравнений (3.26) и (3.27) и, применяя теорему существования и единственности, получаем следующую теорему:

Теорема 7.1. *Если значение λ не есть корень $D(\lambda)$, то уравнение $y = \lambda K y + f$ при любом $f(x)$ имеет единственное решение, и это решение выражается формулой $y = \lambda R f + f$, где $R(x,\xi;\lambda) = \dfrac{D(x,\xi;\lambda)}{D(\lambda)}$.*

Рассмотрим $\lambda = \lambda_0$ – корень $D(\lambda)$. Может оказаться, что оно же является корнем и функции $D(x,\xi;\lambda)$ при любых (x,ξ). Покажем сейчас, что кратность этого корня в числителе $R(x,\xi;\lambda) = \dfrac{D(x,\xi;\lambda)}{D(\lambda)}$ обязательно ниже его кратности в знаменателе.

Теорема 7.2. *Всякий корень λ_0 функции $D(\lambda)$ является полюсом резольвенты.*

Доказательство. Пусть λ_0 есть корень $D(\lambda)$ кратности k, т.е. $D(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k D_0(\lambda)$, где $D_0(\lambda_0) \neq 0$. Положим, что он же является корнем $D(x,\xi;\lambda)$ кратности ℓ, т.е. $D(x,\xi;\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^\ell D_0(x,\xi;\lambda)$, где $D_0(x,\xi;\lambda)$ – ряд по целым положительным степеням $(\lambda-\lambda_0)$, свободный член которого отличен от нуля при некоторых значениях (x,ξ). Напомним, что производная $D'(\lambda)$ имеет корень $\lambda = \lambda_0$ кратности $(k-1)$. С другой стороны, применяя формулу $D'(\lambda) = -\int D(s, s\lambda)ds$, получим $D'(\lambda) = -(\lambda-\lambda_0)^\ell \int D_0(s,s;\lambda)ds$. Левая часть имеет корень $\lambda = \lambda_0$ кратности $(k-1)$, а в правой части уже имеется множитель $(\lambda-\lambda_0)^\ell$. Возможно, после интегрирования по s выделится еще целая положительная степень $(\lambda-\lambda_0)$. Поэтому $\ell \leq k-1$. Таким образом, если $\lambda = \lambda_0$ – корень числителя, то кратность этого корня ниже k, а потому вся дробь имеет полюс в точке $\lambda = \lambda_0$. Заметим, что свободный член в разложении $D_0(x,\xi;\lambda)$ по степеням $(\lambda-\lambda_0)$ есть некоторая функция (x,ξ). Она может обращаться в нуль при некоторых частных значениях x и ξ, но не равна нулю тождественно, ибо если бы это было так, то $\lambda = \lambda_0$ явилось бы корнем $D(x,\xi;\lambda)$ кратности выше ℓ. ■

Мы доказали, что всякий корень λ_0 функции $D(\lambda)$ есть полюс резольвенты. Пусть это будет полюс кратности r. В окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ будем иметь разложение вида:

$$R(x,\xi;\lambda)=\frac{a_{-r}(x,\xi)}{(\lambda-\lambda_0)^r}+\frac{a_{-r+1}(x,\xi)}{(\lambda-\lambda_0)^{r-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}(x,\xi)}{\lambda-\lambda_0}+$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}a_i(x,\xi)(\lambda-\lambda_0)^i,$$

где коэффициент $a_{-r}(x,\xi)$ не равен тождественно нулю в G. Как следует из сказанного ранее, $a_k(x,\xi)$ – непрерывные в G функции. Подставляя последнее разложение в $R=K+\lambda KR$, умножая обе части на $(\lambda-\lambda_0)^r$ и полагая затем $\lambda=\lambda_0$ получим

$$a_{-r}(x,\xi)=\lambda_0\int K(x,t)a_{-r}(t,\xi)dt.$$

Таким образом, оказывается, что коэффициент $a_{-r}(x,\xi)$ как функция от x при любом значении переменной ξ является решением однородного уравнения

$$\varphi(x)=\lambda_0\int K(x,t)\varphi(t)dt. \tag{7.1}$$

Поскольку функция $a_{-r}(x,\xi)$ не есть тождественный нуль, мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

Теорема 7.3. *Если λ_0 есть корень $D(\lambda)$, то однородное уравнение (7.1) имеет решения, не равные тождественно нулю.*

Таким образом, всякий корень $D(\lambda)$ является характеристическим значением интегрального уравнения, т.е. при этом однородное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int K(x,t)\varphi(t)dt \tag{7.2}$$

имеет решения, отличные от нулевого. Если же λ не есть корень $D(\lambda)$, то в силу теоремы 7.1 уравнение $y=\lambda Ky+f$ при любом $f(x)$ имеет единственное решение и, в частности, однородное уравнение (7.2) имеет при этом только нулевое решение. Иначе говоря, если λ – корень $D(\lambda)$, то это – характеристическое значение, а если λ – не корень $D(\lambda)$, то это не есть характеристическое значение. Мы получаем, таким образом:

Теорема 7.4. *Характеристические значения интегрального уравнения суть корни $D(\lambda)$.*

Целая функция $D(\lambda)$ может иметь лишь конечное число корней во всякой ограниченной области плоскости комплексного переменного λ, т.е.

Теорема 7.5. *Во всякой ограниченной области плоскости λ может существовать лишь конечное число характеристических значений.*

Еще полезная формула. Пусть

$$f(s)=\int K(x,\xi)\omega(\xi)d\xi, \tag{7.3}$$

где $\omega(\xi)$ – некоторая функция. Пусть λ не характеристическое значение, тогда

$$\varphi(x)=\int K(x,\xi)\omega(\xi)d\xi+\lambda\iint R(x,\xi;\lambda)K(\xi,t)\omega(t)d\xi dt.$$

Подставим в предыдущую формулу равенство $\lambda RK = R - K$. Тогда решение $\varphi = \lambda K\varphi + f$ примет вид:

$$\varphi(x) = \int R(x, \xi; \lambda)\omega(\xi)d\xi, \tag{7.4}$$

если свободный член уравнения определен формулой (7.3).

Дальнейшее исследование позволяет вывести все теоремы Фредгольма во всей плоскости λ.

7.2. **Уравнения Вольтерра.** Так называются интегральные уравнения

$$y(x) = \int K(x, \xi)y(\xi)d\xi + f(x),$$

удовлетворяющие следующим условиям:

а) каждая из координат точек x и ξ принимает значение от 0 до некоторого $a > 0$;

б) $K(x, \xi) = 0$, если хотя бы одна координата точки x больше соответствующей (т. е. имеющей тот же номер) координаты точки ξ.

Одномерный случай:

$$y(x) = \lambda \int_0^x K(x, \xi)y(\xi)d\xi + f(x). \tag{7.5}$$

При всяком λ имется первый случай альтернативы Фредгольма в предположении, что $K(x, \xi)$ – непрерывная функция при $0 \le x \le a$, $0 \le \xi \le x$, а $f(x)$ непрерывна при $0 \le x \le a$.

У уравнения Вольтерра нет собственных значений. *Доказательство.* Сведем (7.5) к классу уравнений, для которого доказаны теоремы Фредгольма:

$$K(x, \xi) = \frac{K(x, \xi)|x - \xi|^\varepsilon}{|x - \xi|^\varepsilon}, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

Функция $\widetilde{K}(x, \xi)$, определенная равенствами

$$\widetilde{K}(x, \xi) = \begin{cases} K(x, \xi)|x - \xi|^\varepsilon, & 0 \le \xi \le x \\ 0, & \xi \ge x, \end{cases}$$

равномерно непрерывна на квадрате $0 \le x \le a$, $0 \le \xi \le a$. Поэтому для интегрального уравнения (7.5) справедливы все три теоремы Фредгольма.

Значит, для доказательства того, что для этого уравнения при всяком λ имеет место первый случай альтернативы Фредгольма, достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^x K(x, \xi)y(\xi)d\xi \tag{7.6}$$

может при всяком λ иметь только тривиальное решение в классе непрерывных функций от x при $0 \le x \le a$. Для доказательства этого последнего утверждения обозначим через B наибольшее значение $|y(x)|$ при $0 \le x \le a$, а через M – наибольшее значение $|K(x, \xi)|$ при $0 \le x \le a$, $0 \le \xi \le x$. Тогда из уравнения (7.6) получим:

$$|y(x)| \le |\lambda| MBx.$$

Подставим это в правую часть (7.6):

$$|y(x)| \le |\lambda|^2 M^2 \frac{Bx^2}{2}. \text{ Далее:}$$
$$|y(x)| \le \frac{|\lambda|^k M^k x^k B}{k!} \le \frac{|\lambda|^k M^k a^k B}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

П.ч.$\to 0$ при $k \to \infty$. $\Longrightarrow y(x) = 0$ на интервале $(0, a)$. ■

Можно искать решение уравнения (7.5) в виде ряда

$$y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \ldots. \tag{7.7}$$

Как известно,

$$y_0(x) = f(x), \qquad y_{k+1} = \int\limits_0^x K(x,\xi) y_k(\xi) d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Пусть N есть наибольшее значение $|f(x)|$ на интервале $(0, a)$. Тогда получим:

$$|y_k(x)| \le \frac{M^k x^k N}{k!} \le \frac{M^k a^k N}{k!}.$$

Отсюда видно, что ряд (7.7) равномерно по λ и x сходится, когда λ находится в каком угодно большом круге, а $0 \le x \le a$. Чтобы наглядно представить себе, почему уравнение Вольтерра не имеет собственных значений, рассмотрим следующую систему линейных алгебраических уравнений, соответствующую уравнению Вольтерра на интервале $0 \le x \le a$:

$$\begin{aligned}
&f_1 = y_1 - \lambda K_{11} y_1 \Delta\xi,\\
&f_2 = -\lambda K_{21} y_1 \Delta\xi + y_2 - \lambda K_{22} y_2 \Delta\xi,\\
&f_3 = -\lambda K_{31} y_1 \Delta\xi - \lambda K_{32} y_2 \Delta\xi + y_3 - \lambda K_{33} y_3 \Delta\xi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Уравнения (7.8) при любом фиксированном λ можно решать последовательно, если только $|\Delta\xi|$ достаточно мало, что мы будем предполагать. В самом деле, из первого уравнения можно найти y_1, так как при достаточно малом $|\Delta\xi|$ коэффициент при y_1 отличен от 0. Подставим значение y_1 во все последующие уравнения. Тогда из второго уравнения можно найти y_2. Подставим его значение во все последующие уравнения. Тогда из третьего уравнения можно найти y_3 и т.д. Очень легко показать, что при $\Delta x \to 0$ решение системы (7.8) действительно будет приближаться к решению интегрального уравнения (7.5).

Определитель системы (7.8) равен

$$\Pi = (1 - \lambda K_{11}\Delta\xi)(1 - \lambda K_{22}\Delta\xi)\cdots(1 - \lambda K_{nn}\Delta\xi),$$

где $\Delta x = \Delta\xi = a/n$. Отсюда видно, что

$$\Pi \ge (1 - |\lambda| M \Delta\xi)^{\dfrac{a}{\Delta\xi}}. \tag{7.9}$$

Правая часть этого неравенства при всяком достаточно малом $\Delta\xi$ отлична от 0. Когда $\Delta\xi \to 0$, то правая часть (7.9) стремится к

$$e^{-|\lambda| a M}.$$

Именно в том обстоятельстве, что определитель системы (7.8) всегда отличен от 0 и не стремится к 0, когда $\Delta\xi \to 0$, лежит алгебраическая причина отсутствия собственных значений у уравнения Вольтерра.

Замечание 7.1. *Рассуждениями, совершенно аналогичными тем, какими мы показали отсутствие собственных значений у уравнений Вольтерра с равномерно непрерывными ядрами, можно то же самое показать для уравнений Вольтерра с ядрами вида*

$$K(x,\xi) = \frac{\widetilde{K}(x,\xi)}{|x-\xi|^{\alpha}}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

где $\widetilde{K}(x,\xi)$ – равномерно непрерывная функция.

Замечание 7.2. *Рассмотрим следующее интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода относительно неизвестной функции $y(x)$:*

$$\int\limits_0^x K(x,\xi)y(\xi)d\xi = f(x), \qquad f(0) = 0. \tag{7.10}$$

Предположим, что $K(x,\xi)$, $K'_x(x,\xi)$, $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны, когда $0 \le x \le a$, $0 \le \xi \le x$. Тогда всякое непрерывное при $0 \le x \le a$ решение $y(x)$ уравнения (7.10) удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(x,x)y(x) + \int\limits_0^x K'_x(x,\xi)y(\xi)d\xi = f'(x), \tag{7.11}$$

которое получается из (7.10) почленным дифференцированием по x.

Легко видеть, что и обратно, всякое непрерывное при $0 \le x \le a$ решение уравнения (7.11) удовлетворяет также уравнению (7.10). Если $K(x,x)$ превосходит по абсолютной величине некоторую положительную постоянную, то уравнение (7.11) сводится к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода, рассмотренному в настоящей лекции. Если $K(x,x) = 0$, иногда бывает полезно еще раз продифференцировать уравнение (7.11) по x и т.д.

Литература к лекциям:

И.Г. Петровский, “Лекции по теории интегральных уравнений”, Физматлит, М., 2009

В.И. Смирнов, “Курс высшей математики”, том 3, часть 1, Наука, 1967

8. Лекция

8.1. **Интегральные уравнения Фредгольма с действительными симметрическими ядрами.**

8.1.1. *Геометрические аналоги некоторых соотношений между функциями.* Мы рассматриваем здесь функции, определенные в конечной d-мерной области G, непрерывные в этой области всюду, за исключением, быть может, некоторого конечного числа точек, достаточно гладких линий и поверхностей, до $(d-1)$-го измерения включительно. На этих особых точках, линиях и поверхностях функции могут быть не определены. Границу области G мы считаем состоящей из конечного числа кусков гладких $(d-1)$-мерных поверхностей или конечного числа гладких дуг, если $d = 2$. Интегрирование мы понимаем в обычном смысле, если функции непрерывны в G; если эти функции имеют на некоторых точках, линиях или поверхностях разрывы, то интегралы рассматриваются как несобственные; все рассматриваемые функции мы считаем абсолютно интегрируемыми. Мы также будем полагать, что квадраты всех рассматриваемых функций интегрируемы по всей конечной области их определения.

Рассмотрим множество функций $f(x)$, равномерно непрерывных на заданной конечной области G, например на конечном интервале, и перенесем на такие функции ряд понятий конечномерного пространства. Например, «длиной», или нормой, функции $f(x)$ будем называть число

$$\sqrt{\int_G |f(x)|^2 dx}.$$

Аналогично определяется норма разности двух функций $f_2(x) - f_1(x)$:

$$\sqrt{\int_G |f_2(x) - f_1(x)|^2 dx}.$$

Определенная только что норма разности характеризует среднее квадратичное уклонение функции $f_2(x)$ от $f_1(x)$. Характеризовать отличие функции $f_2(x)$ от $f_1(x)$ можно многими разными способами, а не только при помощи определенной только что нормы разности. Это отличие, можно, например, характеризовать при помощи числа B, равного верхней грани выражения

$$|f_2(x) - f_1(x)|.$$

Если B мало, это значит, что разность $f_2(x) - f_1(x)$ равномерно мала по всей рассматриваемой области G. Так как область G конечна, из малости B следует малость определенной выше нормы разности $f_2(x) - f_1(x)$.

Если имеется бесконечная последовательность функций

$$f_1(x), \ldots, f_k(x), \ldots,$$

и функция $f(x)$, для которых

$$\sup_G |f(x) - f_k(x)| \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

то, как известно, говорят, что последовательность функций $f_k(x)$ равномерно сходится к $f(x)$.

Если же

$$\int_G |f(x) - f_k(x)|^2 dx \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

то говорят, что последовательность функций $f_k(x)$ сходится в среднем к $f(x)$. Из равномерной сходимости на конечной области следует сходимость в среднем. Обратное неверно, как показывает следующий пример.

Последовательность функций

$$f_k(x) = e^{-kx}$$

на открытом интервале $(0, 1)$ сходится в среднем к $f(x) \equiv 0$, когда $k \to \infty$. Но, очевидно, эта сходимость неравномерная.

Приведем еще пример последовательности, которая сходится в среднем, но нигде не сходится в обычном смысле. Такой будет последовательность функций $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, определенных на замкнутом отрезке $[0, 1]$ следующим образом:

$$f_{2^k+p}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \dfrac{p}{2^k} \le x \le \dfrac{p+1}{2^k} \\ 0 & \text{при } x < \dfrac{p}{2^k} \text{ и при } x > \dfrac{p+1}{2^k} \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, \ldots, 2^k - 1.$$

При $i = 2^k + p \to \infty$ эта последовательность в среднем сходится к 0. Но ни в какой точке отрезка $[0, 1]$ эта последовательность не сходится в обычном смысле, так как для каждого значения x из этого отрезка можно указать сколь угодно большие значения i, при которых $f_i(x) = 1$, и сколь угодно большие i, при которых $f_i(x) = 0$.

Задача 8.1. *Показать, что при соответствующем выборе чисел a_k и b_k функции*

$$\sin |(x - b_k)|^{a_k}, \qquad \frac{1}{1 + a_k(x - b_k)^2}, \qquad e^{a_k(x-b_k)^2}$$

при $k \to \infty$ сходятся к 0 в среднем на отрезке $[0, 1]$ и не сходятся ни в одной точке.

Норма функции удовлетворяет **неравенству треугольника**, т.е. условию, что сумма двух сторон треугольника не меньше третьей:

$$\sqrt{\int |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx} + \sqrt{\int |f_2(x) - f_3(x)|^2 dx} \ge \sqrt{\int_G |f_1(x) - f_3(x)|^2 dx}.$$

Для доказательства этого неравенства следует возвести в квадрат обе части и воспользоваться **неравенством Коши–Буняковского**:

$$\left(\left|\int f(x) g(x) dx\right|\right)^2 \le \int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx.$$

Помимо указанных операций можно задать **скалярное произведение функций** $f_1(x)$ и $f_2(x)$, обозначаемое как

$$(f_1, f_2) = \int f_1(x) f_2(x) dx.$$

Существование этого интеграла при наших предположениях следует из того, что

$$|ab| \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

В силу неравенства Коши–Буняковского можно определить **косинус угла** между функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ как

$$\frac{\int f_1(x)f_2(x)dx}{\sqrt{\int |f(x)|^2dx}\sqrt{\int |g(x)|^2dx}}.$$

В силу указанного неравенства эта величина не превосходит 1. Отметим, что функция $f(x)$ называется **нормированной (на единицу)**, если ее норма равна 1. Тогда косинус угла между двумя нормированными функциями равен скалярному произведению между ними.

Условие **ортогональности** функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ есть условие равенства нулю их скалярного произведения:

$$\int f_1(x)f_2(x)dx = 0.$$

Условие линейной зависимости функций $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ состоит в существовании таких постоянных $C_1, \ldots, C_m$, среди которых есть отличные от 0, что

$$\sum_{k=1}^{m} C_k f_k(x) = 0$$

для всех точек x.

Пусть дано m взаимно ортогональных нормированных функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$. Коэффициентом Фурье функции $f(x)$ по отношению к функции $\varphi_k(x)$ называется

$$f_k = \int f(x)\varphi_k(x)dx.$$

Теорема 8.1. *Пусть дана интегрируемая вместе со своим квадратом функция $f(x)$. Будем искать постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_m$ так, чтобы среднее квадратичное уклонение I_m линейной комбинации $C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_m\varphi_m(x)$ от $f(x)$ было наименьшим. Мы утверждаем, что искомые значения будут равны коэффициентам Фурье f_k.*

Действительно,

$$\begin{aligned} I_m &= \int [f(x) - C_1\varphi_1(x) - \ldots - C_m\varphi_m(x)]^2 dx = \\ &= \int f^2(x) - 2\sum_{k=1}^{m} C_k \int f(x)\varphi_k(x)dx + \sum_{i,j=1}^{m} C_iC_j \int \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \\ &= \int f^2(x) - 2\sum_{k=1}^{m} C_k f_k + \sum_{k=1}^{m} C_k^2 = \\ &= \int f^2(x) + \sum_{k=1}^{m} (f_k - C_k)^2 - \sum_{k=1}^{m} f_k^2. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что I_m достигает своего минимума $\int f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{m} f_k^2$, если $C_k = f_k$. ■

Для всякой функции $f(x)$ имеет место **неравенство Бесселя**

$$\sum_{k=1}^{m} f_k^2 \leq \int f^2(x)dx.$$

Доказательство неравенства Бесселя. Очевидно, $I_m \geq 0$ при любых C_i. Если $C_i = f_i$ при $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$I_m = \int f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{m} f_k^2, \text{ т.е. } \int f^2(x)dx \geq \sum_{k=1}^{m} f_k^2,$$

и требовалось доказать.

Последовательность попарно ортогональных нормированных функций (короче, **ортонормальная система**)

$$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots \tag{8.1}$$

называется **полной**, если для всякой непрерывной (и потому ограниченной) функции $f(x)$, заданной на замкнутой области $\overline{G}$, имеет место следующее **равенство Парсеваля**:

$$\int f^2(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2.$$

Ортонормальная система (8.1) называется замкнутой, если не существует такой функции рассматриваемого класса, интеграл от квадрата которой существует, положителен и которая была бы ортогональна ко всем функциям (8.1)

Теорема 8.2. *Всякая полная система замкнута.*

Доказательство. Допустим, что полная система (8.1) не замкнута, т.е. что существует функция $f(x)$, у которой интеграл от квадрата существует, положителен и которая ортогональна ко всем функциям (8.1). У такой функции все коэффициенты Фурье по отношению к функциям (8.1) равны 0. Следовательно, для функции $f(x)$ не выполняется равенство Парсеваля. ■

Аналог уравнения плоскости в пространстве функций:

$$\int a(x)\varphi(x)dx = 0,$$

где

$$\int a^2(x)dx = 1.$$

Точно также можно дать определение поверхности 2-го порядка в пространстве функций:

$$\iint K(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy = 1, \tag{8.2}$$

где

$$K(x,y) \equiv K(y,x), \qquad x \in G, \quad y \in G.$$

8.2. **План следующих построений.** При широких предположениях относительно не равного нулю тождественно действительного симметрического ядра $K(x,y)$, т.е. такого, для которого $K(x,y) \equiv K(y,x)$, будет показано, что интегральная квадратичная форма

$$\iint K(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy$$

может быть представлена в виде конечной или бесконечной суммы вида

$$\sum_{i=1} \frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i},$$

где

$$\psi^{(i)} = \int \varphi(x)\varphi_i(x)dx,$$

а функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, образуют непустое конечное или счетное множество взаимно ортогональных и нормированных функций, т.е.

$$\int \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx = \delta_{ik}.$$

Каждая из функций $\varphi_i(x)$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int K(x, y)\varphi_i(y)dy. \tag{8.3}$$

Все λ_i – действительны. Таким образом, интегральные уравнения с симметричным ядром весьма общего вида всегда имеют собственные значения (в противоположность уравнениям Вольтерра) и притом действительные.

Основная идея доказательства существования у интегрального уравнения (8.3) по крайней мере одного собственного значения состоит в следующем. Мы докажем существование в классе функций $\varphi(x)$, у которых

$$\int \varphi^2(x)dx = 1, \tag{8.4}$$

такой функции, которая дает отличный от 0 экстремума λ_1 интегральной форме (8.2). Эта функция $\varphi_1(x)$ будет удовлетворять интегральному уравнению (8.3) при $i = 1$. Нахождение нормированной собственной функции интегрального уравнения (8.3), соответствующей λ_2, легко сводится к нахождению экстремума интегральной формы

$$\iint \left[K(x, y) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1}\right]\varphi(x)\varphi(y)dxdy$$

в классе функций, нормированных условием (8.4). Аналогично находятся другие нормированные решения интегрального уравнения (8.3), ортогональные предыдущим решениям.

При некоторых предположениях относительно $K(x, y)$ будет показано, что

$$K(x, y) = \sum_i \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}.$$

Кроме того, мы покажем, что всякая функция $f(x)$, **истокообразно представимая** при помощи ядра $K(x, y)$ и некоторой функции $h(y)$ с интегрируемым квадратом, т.е. функция, представимая в виде

$$f(x) = \int K(x, y)h(y)dy,$$

может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $\varphi_i(x)$ оператора $K(x, y)$ (теорема Гильберта–Шмидта).

8.3. **Доказательство существования собственных функций у интегральных уравнений с симметрическими ядрами.**

8.3.1. *Предварительные замечания.* Если существуют интегралы от квадратов $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $K(x,y)$ по областям их определения, что мы предположили, то интеграл

$$\iint K(x,y)\varphi(x)\psi(y)dxdy$$

также существует. Действительно,

$$|K(x,y)\varphi(x)\psi(y)| < \frac{1}{2}K^2(x,y) + \frac{1}{2}\varphi^2(x)\psi^2(y).$$

Поэтому

$$\iint |K(x,y)\varphi(x)\psi(y)|dxdy < \frac{1}{2}\iint K^2(x,y)dxdy + \frac{1}{2}\int \varphi^2(x)dx \cdot \int \psi^2(y)dy.$$

Символ $\iint$ всюду в дальнейшем будет означать интегрирование по всей области определения $K(x,y)$, т.е. по всей той области, где $x \in G$ и $y \in G$.

Мы будем рассматривать ядра $K(x,y)$, описанные выше. Для таких $K(x,y)$ все двойные интегралы, т.е. интегралы по совокупности (x,y), вида

$$\iint K(x,y)\varphi(x)\psi(y)dxdy$$

можно рассматривать как повторные интегралы, взятые сначала по x, а потом по y.

Положим

$$B\varphi(x) = \int K(x,y)\varphi(y)dy + c\varphi(x),$$

где c – некоторая постоянная.

Функция $B\varphi(x)$ интегрируема с квадратом по G, так как в силу неравенства Буняковского

$$\left(\int K(x,y)\varphi(y)dy\right)^2 \le \int K^2(x,y)dy \cdot \int \varphi^2(y)dy,$$

и потому

$$\int\left(\int K(x,y)\varphi(y)dy\right)^2 dx \le \iint K^2(x,y)dxdy \cdot \int \varphi^2(y)dy,$$

Обобщение неравенства Буняковского. Пусть сумма интегралов

$$\iint K(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy + c\int \varphi^2(x)dx \equiv (B\varphi,\varphi), \tag{8.5}$$

где c – некоторая постоянная, **неотрицательно определенна**. Это значит, что при всякой действительной функции $\varphi(x)$ эта сумма не отрицательна. Как и всюду в дальнейшем, мы будем предполагать, что $K(x,y) = K(y,x)$. Тогда для любых функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$

$$(B\varphi,\psi)^2 \le (B\varphi,\varphi)(B\psi,\psi). \tag{8.6}$$

Доказательство неравенства (8.6). В силу предполагаемой неотрицательной определенности суммы (8.5) при всяком действительном μ

$$\iint K(x,y)[\varphi(x)+\mu\psi(x)][\varphi(y)+\mu\psi(y)]dxdy + c\int[\varphi(x)+\mu\psi(x)]^2dx \ge 0.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$\iint K(x,y)\varphi(x)\varphi(y)+$$

$$+\,\mu\iint K(x,y)\varphi(x)\psi(y)+$$

$$+\,\mu\iint K(x,y)\psi(x)\varphi(y)+$$

$$+\,\mu^2\iint K(x,y)\psi(x)\psi(y)+$$

$$+\,c\int\varphi^2(x)dx+2\mu c\int\varphi(x)\psi(x)dx+c\mu^2\int\psi^2(x)dx\geq 0.$$

Так как в силу симметричности $K(x,y)$ второй и третий интегралы равны между собой, то это неравенство можно переписать так:

$$(B\varphi,\varphi)+2\mu(B\varphi,\psi)+\mu^2(B\psi,\psi)\geq 0.$$

Это последнее неравенство может выполняться при всяком действительном μ только в том случае, если

$$(B\varphi,\psi)^2\leq(B\varphi,\varphi)(B\psi,\psi),$$

что и требовалось доказать.

Если $K(x,y)=0$, а $c=1$, неравенство (8.6) переходит в неравенство Буняковского

$$\left(\int\varphi(x)\psi(x)\right)^2\leq\int\varphi^2(x)dx\cdot\int\psi^2(x)dx.$$

В дальнейшем, пока не сказано обратное, мы будем рассматривать интегральные уравнения с действительным симметрическим ядром вида

$$K(x,y)=\frac{\widetilde{K}(x,y)}{\rho^\alpha(x-y)},\quad 0\leq\alpha<\frac{d}{2}, \tag{8.7}$$

где $\widetilde{K}(x,y)$ – равномерно непрерывная функция по (x,y), когда $x\in G$ и $y\in G$. Мы будем считать область G конечной. Поэтому функция $\widetilde{K}(x,y)$ ограничена.

Теорема 8.3. *Пусть дано семейство функций $h(x)$, для которых*

$$\int h^2(x)dx\leq M^2,\qquad M>0, \tag{8.8}$$

где M – некоторая постоянная, одна и та же для всех функций $h(x)$. Тогда семейство функций $\psi(x)$, определяемых равенством

$$\psi(x)=\int K(x,y)h(y)dy,$$

равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на G.

Равностепенная непрерывность семейства означает,что для любых двух точек x_1 и x_2, принадлежащих G, $|\psi(x_2)-\psi(x_1)|$ делается меньше произвольного числа $\varepsilon>0$, если только расстояние $\rho(x_1-x_2)$ меньше некоторого $\eta>0$, зависящего только от ε, но не зависящего ни от функции $\psi(x)$ рассматриваемого семейства, ни от положения точек x_1 и x_2 на области G.

Доказательство.

$$|\psi(x_2)-\psi(x_1)|^2 = \left|\int [K(x_2,y)-K(x_1,y)]h(y)dy\right|^2 \le$$
$$\le \int [K(x_2,y)-K(x_1,y)]^2 dy \cdot \int h^2(y)dy \le$$
$$\le M^2 \int [K(x_2,y)-K(x_1,y)]^2 dy. \tag{8.9}$$

Делая предпоследний переход, мы воспользовались неравенством Буняковского, а делая последний – неравенством (8.8). Оценим интеграл, стоящий в правой части неравенства (8.9). Разобьем для этого область G на две части G_1 и G_2. К G_1 мы отнесем точки G, отстоящие от одной из точек x_1 или x_2 не дальше r. В силу равенства (8.7) и ограниченности $\widetilde{K}(x,y)$

$$\int\limits_{G_1} [K(x_2,y)-K(x_1,y)]^2 dy$$

меньше любого положительного ε, если r будет меньше некоторого числа $r(\varepsilon)$, зависящего только от ε и стремящегося к 0 при $\varepsilon \to 0$. При этом $r(\varepsilon)$ не зависит от точек x_1 и x_2. С другой стороны, при фиксированном r

$$\int\limits_{G_2} [K(x_2,y)-K(x_1,y)]^2 dy \tag{8.10}$$

можно сделать как угодно малым, если только точки x_1 и x_2 становятся достаточно близкими друг к другу, в силу равномерной непрерывности $\widetilde{K}(x,y)$ в области G. При этом гарантируемая степень малости интеграла (8.10) зависит только от расстояния между точками x_1 и x_2, но не от их положения.

Равномерную ограниченность семейства функций $\psi(x)$ легко получить, пользуясь неравенством Буняковского. Действительно,

$$\left|\int K(x,y)h(y)dy\right| \le \sqrt{\int K^2(x,y)dy}\sqrt{\int h^2(y)dy}.$$

Первый из интегралов, стоящих в правой части этого неравенства, ограничен согласно (8.7), второй меньше M согласно условию (8.8). ■

Литература к лекциям:

И.Г. Петровский, “Лекции по теории интегральных уравнений”, Физматлит, М., 2009

В.И. Смирнов, “Курс высшей математики”, том 3, часть 1, Наука, 1967

9. Лекция

9.1. **Интегральные уравнения Фредгольма с действительными симметрическими ядрами (продолжение).**

Теорема 9.1. *Интегральное уравнение*

$$\varphi(x) = \lambda \int K(x,y)\varphi(y)dy \tag{9.1}$$

имеет по крайней мере одно конечное собственное значение, если ядро обладает свойствами, описанными в начале предыдущего раздела, и не равно 0 тождественно.

Вообще, в дальнейшем мы будем рассматривать только ядра, описанные в начале предыдущего раздела, не оговаривая это особо каждый раз. Впервые почти одновременно доказали таким методом эту теорему независимо один от другого Гильберт и Гольмгрен. Наибольшая из встречающихся при этом трудностей состоит в доказательстве существования в рассматриваемом классе функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию (8.4), такой функции, которая дает максимум или минимум интегральной форме (8.2).

Доказательство. Рассмотрим множество S функций $\varphi(x)$, для которых

$$\int \varphi^2(x)dx = 1. \tag{9.2}$$

Пусть

$$I(\varphi) = \iint K(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy.$$

Значения $I(\varphi)$ на множестве S ограничены. Действительно, по неравенству Буняковского

$$|I(\varphi)|^2 \le \iint K^2(x,y)dxdy \cdot \iint \varphi^2(x)\varphi^2(y)dxdy =$$
$$= \iint K^2(x,y)dxdy \cdot \int \varphi^2(x)dx \cdot \int \varphi^2(y)dy.$$

Первый из последних трех интегралов конечен по условию (8.7), а последние два интеграла равны 1 согласно (9.2).

Пусть μ_m, соответственно μ_M, есть нижняя, соответственно верхняя, грань значений $I(\varphi)$ на семействе S. Предполагая, что $K(x,y)$ не равно нулю тождественно, докажем, что по крайней мере одно из чисел μ_m и μ_M отлично от нуля. В самом деле, в противном случае интеграл $I(\varphi)$ равнялся бы 0 для всех функций $\varphi(x)$ семейства S. В частности, это было бы для всякой функции $\varphi_{x_0}(x)$, равной 0 всюду, кроме некоторой произвольно малой окрестности одной какой-нибудь точки x_0, где $\varphi_{x_0}(x) > 0$. Но, с другой стороны, так как $K(x,y)$ не тождественно равно 0, то непременно найдется точка (x_0, y_0), где $K(x_0,y_0) \neq 0$. При этом мы можем считать, что y_0 не совпадает с x_0, так как если бы $K(x,y)$ равнялось 0 для всех точек (x,y), у которых x не совпадает с y, то оно равнялось бы тождественно 0 в силу предполагаемой равномерной непрерывности по

(x, y) функции $K(x, y)$, написанной в соотношении (8.7). Но

$$I(\varphi_{x_0} + \varphi_{y_0}) = I(\varphi_{x_0}) + I(\varphi_{y_0}) + \iint K(x, y)\varphi_{x_0}(x)\varphi_{y_0}(y)dxdy+$$
$$+ \iint K(x, y)\varphi_{x_0}(y)\varphi_{y_0}(x)dxdy.$$

Последние два из написанных здесь интегралов берутся по малым окрестностям точек (x_0, y_0) и (y_0, x_0); в силу предполагаемой симметричности $K(x, y)$ интегралы по этим двум окрестностям совпадают и в силу того, что $K(x_0, y_0) \neq 0$ и в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) сохраняет знак, они отличаются от 0. Интегралы же $I(\varphi_{x_0})$ и $I(\varphi_{y_0})$ мы предположили равными 0. Поэтому

$$I(\varphi_{x_0} + \varphi_{y_0}) \neq 0,$$

что невозможно. Итак, при наших предположениях μ_m и μ_M не могут быть одновременно равными 0. Пусть для определенности $\mu_M \neq 0$. Рассмотрим бесконечную последовательность нормированных функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_k(x), \dots,$$

для которых

$$I(\varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu_M. \tag{9.3}$$

Разность

$$-I(\varphi) + \mu_M \int \varphi^2(x)dx,$$

как легко проверить, неотрицательно определена в смысле, описанном выше. Поэтому в неравенстве (8.6) можно считать

$$B\varphi(x) = \int (-K(x, y)\varphi(y)dy + \mu_M\varphi(x).$$

Положим в этом неравенстве

$$\varphi(x) = \varphi_k(x), \qquad \psi(x) = B\varphi_k(x).$$

Получим:

$$(B\varphi_k, B\varphi_k)^2 \leq (B\varphi_k, \varphi_k)(BB\varphi_k, B\varphi_k). \tag{9.4}$$

В силу (9.3)

$$(B\varphi_k, \varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{9.5}$$

С другой стороны,

$$|B\varphi_k(x)| \leq \frac{1}{2}\int K^2(x, y)dy + \frac{1}{2}\int \varphi^2(y)dy + |\mu_M| \cdot |\varphi_k(x)|.$$

Согласно (8.7) первый из интегралов в правой части ограничен, а второй по условию (9.2) равен 1. Поэтому

$$|B\varphi_k(x)| \leq M|\mu_M| \cdot |\varphi_k(x)|,$$

где M – некоторая не зависящая от φ_k постоянная. Точно так же аналогичную оценку можно получить для $BB\varphi_k$. Применяя неравенство Буняковского, легко показать, что выражение $(BB\varphi_k, B\varphi_k)$ также ограничено. Поэтому из соотношений (9.4) и (9.5) следует, что

$$(B\varphi_k, B\varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{9.6}$$

Согласно Теореме 8.3 семейство функций

$$K\varphi_k(x) = \int K(x,y)\varphi_k(y)dy$$

равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. Поэтому по теореме Арцеля из последовательности функций $K\varphi_k(x)$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Пусть это будет

$$K\varphi_{k_1}(x), K\varphi_{k_2}(x), \ldots, K\varphi_{k_m}(x), \ldots.$$

Пусть

$$K\varphi_{k_m}(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} \varphi^*(x).$$

Мы утверждаем тогда, что функция $\varphi^*(x)$ будет решением интегрального уравнения (9.1) при $\lambda = \dfrac{1}{\mu_M}$. Действительно,

$$\begin{aligned}
|BK\varphi_k(x)| &= |-KK\varphi_k(x) + \mu_M K\varphi_k(x)| = \\
&= |K[-K\varphi_k(x) + \mu_M\varphi_k(x)]| = |KB\varphi_k(x)| = \\
&= \left|\int K(x,y)\cdot B\varphi_k(y)dy\right| \le \\
&\le \sqrt{\int K^2(x,y)dy}\sqrt{\int [B\varphi_k(y)]^2 dy|}.
\end{aligned}$$

Поэтому, пользуясь (9.6), получим:

$$BK\varphi_{k_m}(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Отсюда в силу равномерной сходимости $K\varphi_{k_m}(x)$

$$B\varphi^*(x) = 0,$$

что и требовалось доказать. При этом $\varphi^*(x)$ не равно 0 тождественно, так как в противном случае в силу соотношения (9.6) последовательность $\mu_M\varphi_{k_m}(x)$ при $m\to\infty$ также стремилась бы в среднем к 0; а это невозможно, так как

$$\int [\mu_M\varphi_{k_m}(x)]^2 dx = \mu_M^2. \quad \blacksquare$$

Замечание 9.1. *Случай $\mu_m \ne 0$ сводится к разобранному случаю $\mu_M \ne 0$ изменением знака у $K(x,y)$.*

Замечание 9.2. *Мы показали, что нижняя, соответственно верхняя, грань значений интеграла $I(\varphi)$ на множестве нормированных функций $\varphi(x)$ равна обратной величине некоторого собственного значения λ интегрального уравнения (9.1), если только эта грань не равна 0. С другой стороны, обратная величина каждого собственного значения λ_i уравнения (9.1) есть одно из значений интеграла $I(\varphi)$ при некоторой функции из класса (9.2). Действительно, значение интеграла $I(\varphi)$ при $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ где $\varphi_i(x)$ есть нормированная собственная функция, соответствующая собственному значению λ_i, равно:*

$$\int \varphi_i(x)K(x,y)\varphi_i(y)dydx = \frac{1}{\lambda_i}\int \varphi_i^2(x)dx = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Можно также сказать, что верхняя, соответственно нижняя, грань значений интеграла $I(\varphi)$ на множестве функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int \varphi^2(x)dx \leq 1, \tag{9.7}$$

равна обратной величине наименьшего положительного, соответственно наибольшего отрицательного, собственного значения λ уравнения (9.1), если только эта грань не равна 0. Отсюда следует, что при всех функциях $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию (9.7), значения интеграла $I(\varphi)$ по абсолютной величине не превосходят обратной величины наименьшего по абсолютному значению собственного значения λ уравнения (9.1). Кроме того, из предыдущих рассуждений видно, что верхняя, соответственно нижняя, грань $I(\varphi)$ на (9.7) достигается при φ, равном какой-нибудь нормированной собственной функции, соответствующей наименьшему по абсолютной величине положительному, соответственно отрицательному, собственному значению λ, если только эта грань не равна 0.

Задача 9.1. *Доказать, что множество значений $I(\varphi)$ на (9.2) может быть любой точкой, либо замкнутым отрезком, либо полузамкнутым отрезком, к которому не принадлежит точка $I = 0$, являющаяся одним из концов этого отрезка. Множество значений $I(\varphi)$ на (9.7) всегда содержит значение $I = 0$ и является либо точкой, либо отрезком. Какие случаи возможны, если ядро вырожденное?*

9.2. **Некоторые свойства собственных функций и собственных значений интегральных уравнений с симметрическими ядрами.** В разделах 1 и 2 этих лекции мы предполагаем, что собственные функции и λ могут принимать комплексные значения.

Теорема 9.2. *Собственные функции уравнения (9.1), соответствующие различным собственным значениям λ, ортогональны между собой.*

Доказательство. Пусть

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 \int K(x,y)\varphi_1(y)dy, \tag{9.8}$$

$$\varphi_2(x) = \lambda_2 \int K(x,y)\varphi_2(y)dy, \tag{9.9}$$

причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Умножим (9.8) на $\lambda_2\varphi_2(x)$, а (9.9) – на $\lambda_1\varphi_1(x)$. Вычитая почленно полученные равенства и интегрируя разность по x, получим:

$$\begin{aligned}(\lambda_2 - \lambda_1) \int \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx &= \\ &= \lambda_1\lambda_2 \iint K(x,y)\varphi_1(x)\varphi_2(y)dydx - \\ &- \lambda_1\lambda_2 \iint K(x,y)\varphi_2(x)\varphi_1(y)dydx. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Меняя обозначения переменных интеграции во втором члене правой части, получим:

$$\iint K(x,y)\varphi_2(x)\varphi_1(y)dydx = \iint K(y,x)\varphi_2(y)\varphi_1(x)dydx.$$

Так как $K(x, y) = K(y, x)$, то отсюда следует, что правая часть (9.10) равна 0. А так как, по предположению, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$\int \varphi_1(x)\varphi_2(x) = 0. \quad \blacksquare$$

Теорема 9.3. *Все собственные значения интегральных уравнений с симметрическими ядрами действительны.*

Докажем сначала лемму.

Лемма 9.1. *Все собственные функции уравнений рассматриваемого вида непрерывны.*

Действительно, согласно сказанному ранее мы считаем все такие функции интегрируемыми с квадратом. Наша лемма сразу следует из теоремы 8.3.

Доказательство теоремы. Допустим, что у интегрального уравнения (9.1) имеется комплексное собственное значение $\lambda = a + ib$, где $b \neq 0$. Пусть ему соответствует собственная функция $\varphi(x)$. Тогда

$$\varphi(x) = (a + ib) \int K(x, y)\varphi(y)dy. \tag{9.11}$$

Обозначая через $\overline{\varphi(x)}$ функцию, комплексно сопряженную с $\varphi(x)$, из тождества (9.11) получим:

$$\overline{\varphi(x)} = (a - ib) \int K(x, y)\overline{\varphi(y)}dy.$$

Согласно теореме 1 должно быть:

$$\int \varphi(x)\overline{\varphi(x)} = 0.$$

Отсюда и из только что доказанной леммы следует, что $\varphi(x) = 0$, и потому $(a + ib)$ при $b \neq 0$ не может быть собственным значением λ. $\blacksquare$

Замечание 9.3. *Из доказанной теоремы следует, что как действительная, так и мнимая часть комплексной собственной функции является также собственной функцией, соответствующей тому же собственному значению.*

9.2.1. *Ортогонализация собственных функций.* Одному и тому же собственному значению λ интегрального уравнения с симметрическим ядром могут соответствовать несколько линейно независимых между собой собственных функций. По второй теореме Фредгольма множество линейно независимых между собой собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению, всегда конечно. Пусть это будут функции

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x). \tag{9.12}$$

Из того, что соответствующее этим функциям собственное значение λ действительно, легко вывести, что все эти функции мы можем выбрать действительными. Согласно теореме 1 все эти функции ортогональны собственным функциям того же интегрального уравнения, но соответствующим другим значениям λ. Любая линейная комбинация с постоянными коэффициентами функций (9.12) есть также собственная функция уравнения (9.1). Покажем, что, составляя такие линейные с действительными коэффициентами комбинации функций (9.12), мы можем получить m нормированных, взаимно ортогональных и потому линейно независимых между собой собственных функций

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_m(x)$$

уравнения (9.1). Положим

$$\psi_1(x) = a\varphi_1(x).$$

Подберем постоянную $a \neq 0$ так, чтобы

$$\int \psi_1^2(x)dx = 1.$$

Положим

$$\psi_2(x) = b[\varphi_2(x) + b_1\psi_1(x)],$$

где $b \neq 0$ и b_1 – некоторые постоянные. Выберем постоянную b_1 так, чтобы было

$$\int \psi_1\psi_2 dx = b\left[\int \psi_1\varphi_2 dx + b_1\int \psi_1^2 dx\right] = 0.$$

Так как $\int \psi_1^2 dx = 1$, то это равенство единственным образом определяет b_1. Постоянную b подберем так, чтобы норма ψ_2 равнялась 1. Это возможно сделать, потому что в силу предполагаемой линейной независимости функций (9.12) $\varphi_2(x) + b_1\psi_1(x)$ не равно 0 тождественно. А так как все собственные функции уравнения (9.1) непрерывны, то интеграл от квадрата $\varphi_2(x) + b_1\psi_1(x)$ не может быть равным 0.

Положим далее

$$\psi_3(x) = c[\varphi_3(x) + c_2\psi_2(x) + c_1\psi_1(x)], \quad c \neq 0.$$

Подберем постоянную c_1 так, чтобы

$$\int \psi_1\psi_3 dx = c\left[\int \psi_1\varphi_3 dx + c_2\int \psi_2\psi_1 dx + c_1\int \psi_1^2 dx\right] = 0.$$

Так как

$$\int \psi_1\psi_2(x)dx = 0, \text{ и } \int \psi_1^2(x)dx = 1,$$

то это условие однозначно определяет c_1:

$$c_1 = -\int \psi_1\varphi_3 dx.$$

Совершенно так же постоянные c_2 и $c \neq 0$ можно выбрать так, чтобы

$$\int \psi_2\psi_3(x)dx = 0, \text{ и } \int \psi_3^2(x)dx = 1.$$

Продолжая этот процесс, получим $\psi_4(x), \ldots, \psi_m(x)$.

Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением лишь таких линейно независимых между собой собственных функций рассматриваемого интегрального уравнения, которые образуют ортонормальную систему. Возьмем одну какую-нибудь ортонормальную систему собственных функций этого уравнения, максимальную в том смысле, что всякая собственная функция этого интегрального уравнения выражается линейно через функции этой системы. Для дальнейшего нам будет удобно занумеровать их так, чтобы их номера возрастали по мере увеличения абсолютных величин соответствующих собственных значений λ (множество которых, как мы знаем, не имеет конечных предельных точек). Если одному и тому же λ соответствуют несколько линейно независимых между собой собственных функций, то все эти собственные функции мы поставим рядом. Таким образом, мы получим ряды

$$\varphi_1(x), \dots, \varphi_i(x), \dots, \tag{9.13}$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots. \tag{9.14}$$

Здесь под каждой собственной функцией подписано соответствующее собственное значение λ. Ряды (9.13) и (9.14) могут быть конечными или бесконечными. В ряду (9.14) некоторые рядом стоящие λ_i могут быть равными. Это будет тогда, если при соответствующем значении λ_i уравнение (9.1) имеет несколько линейно независимых между собой собственных функций. Но согласно второй теореме Фредгольма для каждого λ_i имеется только конечное число собственных функций, ортогональных между собой и потому линейно независимых. Из этой же теоремы следует, что если ряды (9.13) и (9.14) бесконечные, то

$$|\lambda_i| \to \infty \text{ при } i \to \infty.$$

Система (9.13) будет максимальной в указанном выше смысле, если в ряду (9.14) будут находиться все собственные значения рассматриваемого интегрального уравнения и если каждому такому собственному значению в ряду (9.13) будет соответствовать максимальное число линейно независимых между собой собственных функций, отвечающих этому собственному значению.

Теорема 9.4. *Пусть $\varphi_1(x)$ – собственная функция интегрального уравнения (9.1), соответствующая собственному значению λ_1. Тогда для ядра*

$$K_1(x,y) = K(x,y) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1}$$

последовательности собственных функций и собственных значений, аналогичные рядам (9.13) и (9.14) для $K_1(x,y)$, можно получить из рядов (9.13) и (9.14), соответствующих ядру $K(x,y)$, зачеркиванием $\varphi_1(x)$ и λ_1.

Доказательство. Покажем сначала, что всякая собственная функция $\varphi(x)$ ядра $K_1(x,y)$, соответствующая собственному значению λ, есть собственная функция ядра $K(x,y)$, соответствующая тому же собственному значению. Действительно, пусть

$$\varphi(x) = \lambda \int K_1(x,y)\varphi(y)dy. \tag{9.15}$$

Тогда

$$\int \varphi(x)\varphi_1(x)dx = 0, \tag{9.16}$$

потому что

$$\begin{aligned}
\int \varphi(x)\varphi_1(x)dx &= \lambda \int K_1(x,y)\varphi(y)\varphi_1(x)dxdy = \\
&= \lambda \int \left[K(x,y) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1}\right]\varphi(y)\varphi_1(x)dxdy = \\
&= \lambda \int K(x,y)\varphi(y)\varphi_1(x)dxdy - \frac{\lambda}{\lambda_1}\int \varphi_1(y)\varphi(y)dy \int \varphi_1^2(x)dx = \\
&= \frac{\lambda}{\lambda_1}\int \varphi_1(y)\varphi(y)dy - \frac{\lambda}{\lambda_1}\int \varphi_1(y)\varphi(y)dy = 0.
\end{aligned}$$

В силу соотношения (9.16) равенство (9.15) можно переписать в следующем виде:

$$\varphi(x) = \lambda \int \left[K(x,y) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1} \right] \varphi(y) dy = \lambda \int K(x,y)\varphi(y)dy.$$

Таким образом, доказано, что $\varphi(x)$ есть собственная функция интегрального уравнения (9.1), отвечающая тому же λ.

Покажем теперь обратно, что всякая собственная функция $\varphi_i(x)$ из ряда (9.13), соответствующая собственному значению λ_i из ряда (9.14) при $i > 1$, есть собственная функция, отвечающая тому же собственному значению λ_i для ядра $K_1(x,y)$. Действительно, пусть

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int K(x,y)\varphi_i(x)dx, \quad i > 1. \tag{9.17}$$

Тогда

$$\int \varphi_1(x)\varphi_i(x)dx = 0.$$

Поэтому из равенства (9.17) следует:

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int \left[K_1(x,y) + \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1} \right] \varphi_i(x) dx = \lambda_i \int K_1(x,y)\varphi_i(x)dx.$$

Функция же $\varphi_1(x)$ не является собственной функцией уравнения (9.15), так как в противном случае из условия (9.16) следовало бы, что $\int \varphi_1^2(x)dx = 0$, что невозможно. ■

9.2.2. *5.* Применяя последовательно теорему 9.4 к ядрам

$$K_1(x,y) = K(x,y) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1},$$
$$K_2(x,y) = K_1(x,y) - \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2},$$
$$\ldots,$$

мы найдем, что все собственные функции $\varphi_i(x)$ из ряда (9.13), соответствующие собственным значениям λ_i из ряда (9.14) для ядра $K(x,y)$, суть собственные функции, соответствующие тем же собственным значениям, для ядра

$$K_m(x,y) = K(x,y) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k},$$

если $i > m$. Эти собственные функции $\varphi_i(x)$, $i > m$, образуют для интегрального уравнения с ядром $K_m(x,y)$ максимальную систему собственных функций в том смысле, что всякая другая собственная функция этого ядра выражается линейно через них.

Таким образом, ряды (9.13) и (9.14) для симметрического ядра $K(x,y)$ можно получить, применяя последовательно вариационный метод к ядрам $K(x,y)$, $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$, ….

Допустим, что ядро $K(x,q)$ имеет только конечное число линейно независимых собственных функций (так будет у всякого вырожденного ядра). Тогда при достаточно большом m ядро $K_m(x,y)$ не будет иметь ни одного собственного значения. С другой стороны, так как функции $\varphi_k(x)$ согласно лемме 9.1

непрерывны, то ядро $K_m(x,y)$ будет точно так же, как и $K(x,y)$, обладать всеми свойствами, описанными в (8.7). Поэтому согласно теореме 9.1 должно быть $K_m(x,y) \equiv 0$, т.е. должно быть

$$K(x,y) \equiv \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k}. \tag{9.18}$$

Из этой формулы следует, что всякое ядро рассматриваемого вида с конечным числом собственных значений (или, что равносильно, с конечным числом линейно независимых собственных функций) есть вырожденное ядро.

Замечание 9.4. *Пусть* $K(x,y) = \dfrac{\widetilde{K}(x,y)}{\rho^{\alpha}(x-y)}$, *где* $0 \le \alpha < d$, $\widetilde{K}(x,y)$ *– равномерно непрерывная функция* x *и* y *и* $\widetilde{K}(x,y) = \widetilde{K}(y,x)$ *и* $\widetilde{K}(x,y)$ *не есть тождественный ноль. Легко видеть, что для непрерывных собственных функций интегрального уравнения с ядром* $K(x,y)$ *указанного вида справедливы теоремы 9.2 и 9.3 настоящей лекции. Воспользовавшись этим, мы покажем, что интегральное уравнение с ядром указанного вида имеет по крайней мере одно собственное значение.*

Из леммы 4.3 следует, что существует такое m, что ядро

$$K^{(m)}(x,y) = \underbrace{K \circ K \circ \ldots \circ K}_{m \text{ раз}}$$

непрерывно. Так как $K^{(m)}(x,y)$ – непрерывное симметрическое ядро, и, как легко проверить, $K^{(m)}(x,y)$ не равно тождественно нулю, то по доказанному на прошлой лекции существуют такое действительное число μ_1 и непрерывная функция $\varphi_1(x)$, что

$$\varphi_1 = \mu_1 K^{(m)} \varphi_1, \qquad \varphi_1 \not\equiv 0,$$

где $K^{(m)}$ означает оператор, соответствующий ядру $K^{(m)}(x,y)$. Будем предполагать, что m нечетно, и положим $\mu_1 = \lambda_1^m$, где λ_1 – действительное число. Пусть e – какой-нибудь первообразный корень степени m из единицы. Имеет место равенство

$$(E-\lambda_1 K)(E-\lambda_1 eK)(E-\lambda_1 e^2 K)\ldots(E-\lambda_1 e^{m-1}K) = (E-\lambda_1^m K^{(m)}).$$

Справедливость этого равенства вытекает из алгебраического тождества

$$a^m - b^m = (a-b)(a-eb)(a-e^2 b)\ldots(a-e^{m-1}b).$$

Таким образом,

$$(E-\lambda_1^m K^{(m)})\varphi_1 = (E-\lambda_1 K)(E-\lambda_1 eK)\ldots(E-\lambda_1 e^{m-1}K)\varphi_1.$$

Положим

$$(E-\lambda_1 eK)(E-\lambda_1 e^2 K)\ldots(E-\lambda_1 e^{m-1}K)\varphi_1 = \psi_1.$$

Тогда

$$(E-\lambda_1 K)\psi_1 = 0 \text{ и } \psi_1 \not\equiv 0,$$

т.е. ψ_1 есть собственная функция интегрального уравнения с ядром $K(x,y)$. Действительно, так как m нечетно, то для $\lambda_1 e^p$ при $1 \le p \le m-1$ имеем $\operatorname{Im} \lambda_1 e^p \ne 0$. Далее, $(E-\lambda_1 e^p K)\varphi \ne 0$ при любой функции $\varphi(x) \not\equiv 0$ и $1 \le p \le m-1$, так как уравнение с симметрическим ядром не имеет комплексных собственных значений в силу теоремы 9.3. Поэтому $\psi_1 \not\equiv 0$, так как в противном случае мы получили бы, что для некоторого p, $1 \le p \le m-1$, и некоторой функции $\varphi(x)$, нетождественно равной нулю, $(E - \lambda_1 e^p K)\varphi = 0$. Этим наше утверждение доказано.

10. Лекция

10.1. **Теорема Гильберта–Шмидта.**

Теорема 10.1. *Всякая функция $f(x)$, истокообразно представимая при помощи функции $h(x)$ с интегрируемым квадратом, т.е. функция вида*

$$f(x) = \int K(x,y)h(y)dy,$$

может быть разложена в ряд по собственным функциям (9.13) симметрического ядра $K(x,y)$, который сходится абсолютно и равномерно.

Замечание 10.1. *Конечно, о сходимости этого ряда имеет смысл говорить только в том случае, если интегральное уравнение (9.1) имеет бесконечное множество линейно независимых собственных функций. В противном случае этот ряд обращается в сумму конечного числа слагаемых. Чтобы не удлинять запись, мы здесь, как и в других аналогичных случаях, будем писать всюду бесконечные ряды, помня, что в случае конечного числа собственных функций эти ряды заменятся конечными суммами, сходимость которых не надо доказывать.*

Доказательство теоремы будет состоять в том, что мы сначала построим некоторый ряд по собственным функциям (9.13) и докажем, что он сходится равномерно, а потом докажем, что он сходится именно к функции $f(x)$.

Допустим, что функция $f(x)$ разлагается в ряд по собственным функциям (9.13), которые мы считаем ортонормированными. Пусть

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i\varphi_i(x) = f(x), \tag{10.1}$$

причем ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно. Для определения коэффициента C_i помножим обе части этого равенства на $\varphi_m(x)$ и проинтегрируем почленно по всей области G определения функций $f(x)$ и $\varphi_i(x)$. Получим:

$$\begin{aligned} C_m = \int f(x)\varphi_m(x)dx &= \iint K(x,y)h(y)\varphi_m(x)dxdy = \\ &= \int h(y)\left(\int K(x,y)\varphi_m(x)dx\right)dy = \\ &= \int \frac{\varphi_m(y)h(y)}{\lambda_m}dy = \frac{h_m}{\lambda_m}. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Мы здесь положили

$$h_m = \int h(x)\varphi_m(x)dx.$$

Покажем теперь, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i\varphi_i(x)}{\lambda_i} \tag{10.3}$$

сходится равномерно и абсолютно. Для этого применим признак Коши. Составим отрезок ряда

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{h_i\varphi_i(x)}{\lambda_i}.$$

Применяя неравенство Коши, получим:

$$\left[\sum_{i=m}^{m+p}|h_i|\left|\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right|\right]^2 \le \sum_{i=m}^{m+p}h_i^2\cdot\sum_{i=m}^{m+p}\left|\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right|^2. \tag{10.4}$$

Коэффициенты h_i суть коэффициенты Фурье функции $h(x)$ по отношению к функциям $\varphi_i(x)$. Поэтому, применяя неравенство Бесселя, мы найдем, что числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}h_i^2$$

сходится. Следовательно, по признаку Коши величина

$$\sum_{i=m}^{m+p}h_i^2$$

будет меньше любого положительного ε_1, если только m будет достаточно велико. С другой стороны, величины $\dfrac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}$ можно рассматривать как коэффициенты Фурье при разложении ядра $K(x,y)$, рассматриваемого как функция только от y, в ряд по функциям $\varphi_i(y)$. Применяя опять к этим коэффициентам неравенство Бесселя, мы найдем:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right)^2 \le \int K^2(x,y)dy.$$

Последний интеграл существует в силу условия (8.7) и ограничен постоянной, не зависящей от x. Поэтому при любых m и p сумма

$$\sum_{i=m}^{m+p}\left|\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right|^2$$

ограничена.

Таким образом, из неравенства (10.4) мы находим, что для любого постоянного $\varepsilon > 0$ можно указать такое m_0, зависящее только от ε, что при любом $m > m_0$ и любом $p > 0$:

$$\sum_{i=m}^{m+p}\left|\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)\right| < \varepsilon.$$

Отсюда по признаку Коши следует, что ряд (10.2) сходится абсолютно и равномерно.

Перейдем теперь к доказательству того, что ряд (10.2) сходится именно к функции $f(x)$.

Заметим прежде всего, что из теоремы 8.3 следует, что функция $f(x)$ и все собственные функции $\varphi_i(x)$ равномерно непрерывны. Кроме того, мы только что доказали, что ряд (10.2) сходится равномерно. Поэтому для доказательства сходимости этого ряда к $f(x)$ достаточно доказать, что этот ряд сходится к $f(x)$ в среднем, т.е. что

$$\int\left[f(x)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)\right]^2dx \xrightarrow[m\to\infty]{} 0. \tag{10.5}$$

Для доказательства же этого последнего утверждения заметим, что

$$f(x) - \sum_{i=1}^{m} \frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x) = \int \left[K(x,y) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}\right] h(y)dy,$$

откуда, полагая для сокращения записи

$$K_m(x,y) = K(x,y) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i},$$

$$g_m(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x),$$

получим:

$$\int \left[f(x) - \sum_{i=1}^{m} \frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)\right]^2 dx =$$

$$= \iint \int \left[K(x,y) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}\right] h(y) \int \left[f(x) - \sum_{i=1}^{m} \frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)\right] dxdy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint K_m(x,y)[h(y) + g_m(y)][h(x) + g_m(x)]dxdy -$$

$$- \frac{1}{2} \iint K_m(x,y)h(y)h(x)dxdy - \frac{1}{2} \iint K_m(x,y)g_m(y)g_m(x)dxdy. \tag{10.6}$$

Мы здесь воспользовались тем, что в силу симметричности ядра $K(x,y)$

$$\iint K_m(x,y)h(x)g_m(y)dxdy = \iint K_m(x,y)h(y)g_m(x)dxdy.$$

Так как

$$\int g_m^2(x)dx = \int f^2(x)dx - \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{h_i}{\lambda_i}\right)^2 \leq \int f^2(x)dx,$$

то существует такое не зависящее от m число M, что при всяком m

$$\int g_m^2(x)dx < M, \qquad \int h^2(x)dx < M, \qquad \int [h(x) + g_m(x)]^2 dx < M.$$

Согласно замечанию 9.2 и разд. 9.2.2

$$\left|\iint K_m(x,y)\psi(x)\psi(y)dxdy\right| \leq \frac{M}{|\lambda_{m+1}|},$$

если

$$\int \psi^2(x)dx \leq M.$$

Значит, все три интеграла, стоящие в правой части (10.6), стремятся к 0 при $m \to \infty$, и потому справедливо соотношение (10.5).■

Следствие 10.1. *Формула Шмидта для решения интегральных уравнений с симметрическим ядром.*

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int K(x,y)\varphi(y)dy + f(x), \tag{10.7}$$

где $K(x,y)$ – симметрическое ядро стандартного для нас вида, $f(x)$ – известная равномерно непрерывная функция, $\varphi(x)$ – искомая функция, λ – параметр. По первой теореме Фредгольма интегральное уравнение (10.7) имеет равномерно непрерывное решение $\varphi(x)$, если λ не является собственным значением. Тогда по теореме Гильберта–Шмидта функция $\varphi(x) - f(x)$ разлагается в ряд по собственным функциям ядра $K(x,y)$, который сходится абсолютно и равномерно. Пусть

$$\varphi(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(x).$$

Отсюда

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(x) + f(x). \tag{10.8}$$

Подставляя вместо $\varphi(x)$ в уравнение (10.7) правую часть равенства (10.8), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(x) + f(x) = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int K(x,y)\varphi_i(y)dy + \lambda \int K(x,y) f(y)dy + f(x) = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i \varphi_i(x)}{\lambda_i} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(x)}{\lambda_i} + f(x). \end{aligned} \tag{10.9}$$

Воспользовавшись опять теоремой Гильберта–Шмидта, мы заменили здесь

$$\int K(x,y) f(y) dy$$

абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(x)}{\lambda_i}, \text{ где } f_i = \int f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Легко видеть, что и первый из рядов, стоящих в правой части (10.9), равномерно сходится. Сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi_i(x)$ в правой и левой частях равенства (10.9), получим:

$$C_i = \frac{\lambda C_i}{\lambda_i} + \frac{\lambda f_i}{\lambda_i}.$$

Отсюда

$$C_i = \frac{\lambda f_i}{\lambda_i - \lambda}$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(x)}{\lambda_i - \lambda} + f(x), \tag{10.10}$$

где ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно. Эта формула называется **формулой Е. Шмидта**.

В том случае, когда λ совпадает с одним из собственных значений λ_i можно аналогичным образом получить решение уравнения (10.7). При этом $f_i = 0$ для всех i, которым соответствуют собственные значения, равные λ, в силу третьей теоремы Фредгольма. Решение $\varphi(x)$ будет представляться в виде ряда (10.8), в котором $C_i = \dfrac{\lambda f_i}{\lambda_i - \lambda}$, если $\lambda_i \neq \lambda$, и $C_i = \alpha_i$, где α_i – произвольная постоянная, если $\lambda_i = \lambda$.

Задача 10.1. *Доказать теорему Гильберта–Шмидта для вырожденных ядер непосредственно, воспользовавшись формулой (9.18).*

10.2. **Теорема о разложении ядер.**

Теорема 10.2. *Ядро $K(x,y)$ рассматриваемого нами вида разлагается в ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}, \tag{10.11}$$

который сходится к $K(x,y)$ в среднем по x, т.е. при всяком фиксированном y

$$\int \left[K(x,y) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i} \right]^2 dx \xrightarrow[m\to\infty]{} 0. \tag{10.12}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$K_2(x,y) = \int K(x,s)K(s,y)ds$$

как функцию только x, считая y фиксированным. Тогда эту функцию можно по теореме Гильберта–Шмидта разложить в ряд по собственным функциям $\varphi_i(x)$, который сходится равномерно и абсолютно по x. Пусть

$$K_2(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x).$$

Согласно формуле (10.2)

$$c_i = \frac{\int K(x,y)\varphi_i(x)dx}{\lambda_i} = \frac{\varphi_i(y)}{\lambda_i^2}.$$

Следовательно,

$$K_2(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i^2}. \tag{10.13}$$

По теореме Гильберта–Шмидта этот ряд сходится абсолютно и равномерно по x при всяком фиксированном y. Из соображений симметрии отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость этого ряда также и по y при всяком фиксированном x. Но нет никаких оснований заключить отсюда о равномерной сходимости этого ряда по совокупности x и y. Такая сходимость будет доказана при рассмотрении теоремы Дени ниже. Из (10.13) следует, что

$$K_2(x,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2}. \tag{10.14}$$

причем последний ряд сходится, но мы не можем пока утверждать, что он сходится равномерно по x.

С другой стороны,

$$\int \left[K(x,y) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i} \right]^2 dx = \int K(y,x)K(x,y)dx -$$

$$- 2\sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(y)}{\lambda_i} \int K(y,x)\varphi_i(x)dx + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(y)}{\lambda_i^2} =$$

$$= K_2(y,y) - 2\sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(y)}{\lambda_i^2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(y)}{\lambda_i^2} =$$

$$= K_2(y,y) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(y)}{\lambda_i^2}. \tag{10.15}$$

Согласно (10.14) эта последняя разность стремится к 0 при $m \to \infty$. Отсюда следует (10.12).■

10.3. **Классификация ядер.** Рассмотрим интегральную форму

$$\iint K(x,y)\chi(x)\chi(y)dxdy, \tag{10.16}$$

где $\chi(x)$ – какая-нибудь функция с интегрируемым квадратом. Воспользовавшись неравенством Буняковского, легко показать, что интеграл (10.16) существует, так как существует интеграл от квадрата $K(x,y)$ (ср. (8.7)). По теореме Гильберта–Шмидта функция от x

$$\int K(x,y)\chi(y)dy$$

разлагается в ряд по собственным функциям $\varphi_i(x)$ ядра $K(x,y)$, который равномерно по x сходится. Воспользовавшись при этом формулой (10.2), мы получим, таким образом,

$$\int K(x,y)\chi(y)dy = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i}{\lambda_i}\varphi_i^2(x), \tag{10.17}$$

где

$$\chi_i = \int \chi(x)\varphi_i(x)dx.$$

Помножив обе части (10.17) на $\chi(x)$ и проинтегрировав по x, получим:

$$\iint K(x,y)\chi(x)\chi(y)dxdy = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i^2}{\lambda_i}. \tag{10.18}$$

Интегральная форма и ядро $K(x,y)$ называются неотрицательно, соответственно неположительно, определенными (или дефинитными), если для всякой функции $\chi(x)$ с интегрируемым квадратом интегральная форма (10.16) неотрицательна, соответственно неположительна.

Из формулы (10.18) видно, что необходимым и достаточным условием неотрицательной, соответственно неположительной, определенности формы (10.16) является условие, чтобы все λ_i были положительными, соответственно отрицательными. Будем форму (10.16) и ядро $K(x,y)$ называть квазиопределенными неотрицательно, соответственно неположительно, если все соответствующие λ_i, кроме, быть может, конечного их числа, положительны, соответственно отрицательны.

10.4. **Теорема Дини и ее приложения.**

Теорема 10.3 (Дини)**.** *Если монотонная последовательность непрерывных функций*
$$f_1(x), \dots, f_k(x), \dots \tag{10.19}$$
всюду на замкнутом ограниченном множестве F сходится к непрерывной функции $f(x)$, то эта последовательность сходится равномерно.

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что $f(x) = 0$; общий случай сводится к этому вычитанием $f(x)$ из каждой функции $f_k(x)$. Мы можем далее считать, что последовательность (10.19) монотонно убывает в каждой точке x, т.е. $f_k(x) \geq f_{k+1}(x)$ при $k = 1, 2, \dots$, так как противоположный случай сводится к этому переменой знака у всех $f_k(x)$.

Итак, пусть имеется монотонно убывающая в каждой точке последовательность непрерывных функций $f_k(x)$, сходящаяся к 0 в каждой точке ограниченного замкнутого множества F. Докажем, что эта сходимость равномерная. Для этого заметим следующее. Для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой точки x множества F можно указать такое m, что
$$0 \leq f_m(x) < \varepsilon.$$
В силу непрерывности $f_m(x)$ то же неравенство будет иметь место и в некоторой окрестности O_x точки x. В силу монотонного убывания рассматриваемой последовательности функций в окрестности O_x будет
$$0 \leq f_k(x) < \varepsilon \text{ при всех } k \geq m. \tag{10.20}$$
Таким образом, при выбранном ε для каждой точки x множества F можно указать такую ее окрестность O_x, что, начиная с некоторого k, в ней будет справедливо неравенство (10.20). По лемме Гейне–Бореля из всей совокупности окрестностей O_x можно выбрать такое их конечное множество, которое покрывает все множество F. Пусть M будет максимальным из всех чисел m, соответствующих этим окрестностям. Тогда очевидно, что при всех $k \geq M$ на всем множестве F будет
$$f_k(x) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

10.5. **Приложения теоремы Дини.**

10.5.1. *1.* В (10.14) мы доказали, что
$$K_2(y, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(y)}{\lambda_i^2}$$
Оставался нерешенным вопрос о том, равномерно ли по y сходится ряд в правой части. Теперь, после доказательства теоремы Дини, мы легко сможем решить этот вопрос. Действительно, согласно лемме 4.3, функция $K_2(y, y)$ равномерно непрерывна по y. Следовательно, ее можно считать непрерывной на $\overline{G}$. Значит, последовательность
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(y)}{\lambda_i^2}$$
есть монотонная в каждой точке y последовательность непрерывных функций, которая сходится при $m \to \infty$ к непрерывной же функции. Следовательно, по теореме Дини эта сходимость равномерна на $\overline{G}$.

10.5.2. *2.* . Из того, что ряд, стоящий в правой части (10.14), сходится равномерно по y, следует, что последовательность (10.12) сходится к 0 равномерно по y, см. (10.15). Поэтому

$$\iint \left[K(x,y) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}\right]^2 dxdy \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

10.5.3. *3.* Из равномерной по y сходимости ряда (10.14) следует равномерная по (x,y) и абсолютная сходимость ряда (10.13), так как

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left|\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i^2}\right| \le \frac{1}{2}\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(y)}{\lambda_i^2}.$$

10.5.4. *4.* Интегрируя по y обе части (10.14), найдем:

$$\int K_2(y,y)dy = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}$$

так как функции $\varphi_i(y)$ нормированы. Значит, ряд, составленный из квадратов обратных величин λ_i сходится.

11. Лекция

11.1. **5. Теорема Мерсера.**

Теорема 11.1 (Теорема Мерсера.)**.** *Если ядро $K(x, y)$ определено неотрицательно, либо неположительно, и равномерно непрерывно по (x, y), то ряд (10.11) сходится к нему не только в среднем, но абсолютно и равномерно по (x, y).*

Доказательство. Для определенности будем предполагать, что ядро $K(x, y)$ определенно неотрицательно. Заметим далее, что если ядро $K_m(x, y)$ неотрицательно определено и непрерывно, то всегда $K_m(x, x) \geq 0$. Действительно, если бы в некоторой точке x_0 было $K_m(x_0, x_0) < 0$, то в силу непрерывности оно было бы отрицательным и в некоторой окрестности точки (x_0, x_0) в пространстве (x, y). Построим тогда непрерывную функцию $\varphi_{x_0}(x)$, которая равняется 0 всюду на области G, кроме некоторой малой окрестности G_0 точки x_0, где эта функция положительна. Тогда, если область G_0 достаточно мала, будет

$$\iint K_m(x, y)\varphi_{x_0}(x)\varphi_{x_0}(y)dxdy < 0,$$

что противоречит предположению о неотрицательной определенности ядра $K_m(x, y)$.

В силу предполагаемой неотрицательной определенности ядра $K(x, y)$ при достаточно большом m ядро

$$K_m(x, y) = K(x, y) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}$$

будет неотрицательно определенным (ср. последний раздел предыдущей лекции), поэтому согласно только что доказанному утверждению о неотрицательно определенных непрерывных ядрах должно быть при всех достаточно больших m

$$K(x, x) \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i}.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i} \tag{11.1}$$

при всех x сходится. Поэтому ряд

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(y)}{\lambda_i} \tag{11.2}$$

также сходится при всех y. Так как $K(x, x)$ ограничено, то все частичные суммы рядов (11.1) и (11.2) при всех x и y по абсолютной величине ограничены некоторой постоянной

$$M_0 > 0.$$

Применяя неравенство Коши и считая m настолько большим, что все $\lambda_i > 0$ при $i > m$, получим:

$$\left[\sum_{i=m}^{m+p} \left|\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}\right|\right]^2 \leq \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i} \cdot \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(y)}{\lambda_i}. \tag{11.3}$$

Применяя необходимый признак сходимости Коши к ряду (11.2), мы найдем, что для каждого постоянного $\varepsilon > 0$ при любом фиксированном y можно указать такое большое m_0, зависящее только от ε и y, что:

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(y)}{|\lambda_i|} = \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(y)}{\lambda_i}, \text{ если } m > m_0(\varepsilon, y).$$

Поэтому из неравенства (11.3) получим, что при любом $p > 0$ и при $m > m_0(\varepsilon, y)$:

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i} \right| < \varepsilon.$$

Отсюда, применяя достаточный признак сходимости Коши, мы найдем, что ряд (10.11) сходится абсолютно и равномерно по x при каждом фиксированном y.

В силу доказанного прежде соотношения (10.12) мы получим отсюда, что ряд (10.11) сходится именно к $K(x, y)$. В частности,

$$K(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i}. \tag{11.4}$$

Так как $K(x, x)$, по предположению, непрерывно на замкнутой области $\overline{G}$ и так как все функции $\varphi_i(x)$ также непрерывны на этой области, а все λ_i, начиная с некоторого, положительны, то по теореме Дини ряд в правой части (11.4) сходится равномерно по x. Поэтому для каждого постоянного $\varepsilon > 0$ можно указать такое m_0, зависящее только от ε, что будет при любом $p > 0$

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i} < \varepsilon, \text{ если } m > m_0(\varepsilon).$$

Из неравенства (11.3) следует, что при любых x и y, $p > 0$ и тех же m и ε

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i} \right| < \varepsilon,$$

и потому ряд (10.11) сходится абсолютно и равномерно по (x, y), что и требовалось доказать.

11.2. **Пример.** Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\ell} G(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad 0 \leq x \leq \ell, \tag{11.5}$$

где $G(x, \xi)$ – функция Грина, построенная в Лекции 2, (1.6). Как там было указано, эта функция симметрична относительно обоих своих аргументов. Поэтому к интегральному уравнению (11.5) применима вся теория, развитая в настоящей главе. Это уравнение имеет, как мы видели в Лекции 2, бесконечное множество собственных функций и собственных значений, которые все были найдены в Лекции 2. Нормируя их и выписывая собственные значения λ под соответствующими собственными функциями, получим ряды

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin x, & \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin 2x, & \ldots, & \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin kx, & \ldots \\ 1, & 4, & \ldots, & k^2, & \ldots \end{array} \tag{11.6}$$

Для упрощения записи мы положили.в уравнениях (1.6) $\ell = \pi$, $c = \dfrac{\rho}{T_0} = 1$. Здесь каждому собственному значению λ соответствует только одна собственная функция. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, как легко проверить, ортогональны между собой, в соответствии с Теоремой 9.2.

Применяя теорему Гильберта–Шмидта, мы найдем, что всякая функция $f(x)$ вида

$$f(x) = \int\limits_0^\pi G(x,\xi)h(\xi)d\xi, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{11.7}$$

где $h(\xi)$ – функция с интегрируемым квадратом, разложима в ряд по собственным функциям (11.6) ядра $G(x,\xi)$. Будем считать, как это мы делали всюду в предыдущем (ср. замечание к Лекции 1), что функция $h(\xi)$ имеет только конечное число точек разрыва. Продифференцируем два раза по x обе части равенства (11.7) так же, как это мы делали в Лекции 2, воспользовавшись при этом формулами (1.6). Получим, что всюду, кроме, быть может, конечного числа точек,

$$f''(x) = -\frac{h(x)}{T_0}.$$

Обратно, пользуясь формулами (1.6), легко проверить, что всякая непрерывная вместе с ее первой производной на замкнутом интервале $[0,\pi]$ функция $f(x)$, обращающаяся в 0 на концах этого интервала и имеющая непрерывную, за исключением конечного числа точек, вторую производную с интегрируемым квадратом, представима в виде (11.7), где $h(x)$ – функция с интегрируемым квадратом; за $h(x)$ надо принять именно $T_0 f"(x)$. Таким образом, по теореме Гильберта–Шмидта получается, что может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по $\sin kx$ всякая непрерывная вместе с ее первой производной на замкнутом интервале $[0,\pi]$ функция $f(x)$, у которой имеется всюду, за исключением конечного числа точек, непрерывная вторая производная с интегрируемым квадратом и у которой $f(0) = f(\pi) = 0$. Из теории тригонометрических рядов известна возможность такого разложения и при более слабых предположениях относительно $f(x)$. Для этого достаточно, например, чтобы $f(x)$ была непрерывной на замкнутом интервале $[0,\pi]$ вместе с ее первой производной и чтобы было $f(0) = f(\pi) = 0$. Из этого последнего класса функций легко выбрать функцию, которая не удовлетворяет условиям теоремы Гильберта–Шмидта; достаточно, например, взять функцию, нигде не имеющую второй производной. Это показывает, что условия теоремы Гильберта–Шмидта, вообще говоря, не являются необходимыми для возможности разложения функции $f(x)$ в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям.

Покажем, что система (11.6) полна, т.е. что для каждой непрерывной на замкнутом интервале $[0,\pi]$ функции $f(x)$ можно найти такую линейную комбинацию $\sin kx$, что средняя квадратичная ошибка при замене $f(x)$ этой линейной комбинацией будет как угодно мала. Для этого заметим, что для каждой непрерывной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ функции $f(x)$ можно найти на этом интервале такую функцию $f_1(x)$, непрерывную вместе с ее первыми двумя производными и обращающуюся в 0 на концах этого интервала, что норма разности $f(x)-f_1(x)$ будет как угодно мала. Функцию же $f_1(x)$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд по $\sin kx$, как мы только что видели. Поэтому функцию $f_1(x)$ можно аппроксимировать такой линейной комбинацией $\sin kx$ (именно, частичной суммой равномерно сходящегося к этой функции ряда по функциям $\sin kx$), что средняя квадратичная ошибка будет как угодно мала. Отсюда, применяя неравенство треугольника, легко показать, что система (11.6) полна.

Из полноты системы (11.6) следует ее замкнутость по Теореме 8.2. Все собственные значения ядра $G(x, \xi)$ положительны. Поэтому к нему применима теорема Мерсера. Получим:

$$\frac{\pi}{2} G(x, \xi) = \frac{\sin x \sin \xi}{1} + \frac{\sin 2x \sin 2\xi}{4} + \ldots,$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно по (x, ξ).

11.3. **Преобразование Лапласа.** Операционное исчисление было разработано Хевисайдом между 1880 и 1887. Это исчисление стало методом решения дифференциальных и интегральных уравнений с помощью сведения к обыкновенным алгебраическим уравнениям. Попутно Хевисайд ввел обозначение D для дифференциального оператора и функцию Хевисайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \tag{11.8}$$

(неустранимый разрыв первого рода пти $t = 0$) для описания момента включения напряжения в сети электрического тока.

Операционный метод – набор формальных операций над символом $p = \dfrac{d}{dt}$, где t – независимая переменная:

$$x = x(t)$$

$$x^{(n)}(t) \Leftrightarrow p^n x, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

$$Lx = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x \Leftrightarrow L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$\int_0^t dt\, x(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p} \cdot x$$

Пример 11.1. *Решить начальную задачу:*

$$x' - x = 1, \qquad x(0) = 0.$$

Решение. $px - x = 1, \Rightarrow$

$$x = \frac{1}{p-1} \cdot 1 \equiv \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p}} \cdot 1$$

формально разлагаем в ряд:

$$x = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^n} + \ldots \right) \cdot 1$$

$$\frac{1}{p} \cdot 1 = \int_0^t dt = t, \qquad \frac{1}{p^2} \cdot 1 \equiv \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} \cdot 1 = \int_0^t t\, dt = \frac{t^2}{2}, \textit{ и т.д.}$$

так что

$$x(t) = t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots = e^t - 1,$$

что легко проверить и непосредственно.

Обоснование операционного метода было дано в 20-ые годы XX-го столетия на основе преобразования Лапласа. При этом p оказывается комплексным числом $p = p_{\mathrm{Re}} + ip_{\mathrm{Im}}$.

Схема операционного метода. Требуется найти функцию $x(t)$ действительного переменного t из некоторого уравнения, содержащего производные и интегралы от нее.

1. Переходим к образу $X(p)$.
2. Уравнение на x переходит в алгебраическое уравнение на X.
3. Решаем это уравнение, находим $X(p)$
4. Переходим к оригиналу $x(t)$.

(аналогия с логарифмированием)

11.4. **Основные понятия и методы.**

Определение 11.1. ***Оригиналом*** *называется любая комплексная функция $f(t)$ вещественного аргумента t, удовлетворяющая условиям:*

(1) *$f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера всюду, кроме отдельных изолированных точек, где она имеет разрывы 1 рода (причем на каждом конечном интервале таких точек – конечное число), т.е., для каждого t, кроме указанных изолированных точек, найдутся такие положительные константы A, $a \le 1$ и h_0, что выполнено*

$$|f(t+h) - f(t)| < A|h|^a$$

для всех h, $|h| < h_0$, где A, вообще говоря, может зависеть от t;

(2) *$f(t) = 0$ при $t < 0$;*

(3) *$f(t)$ растет не быстрее некоторой экспоненты, т.е., $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ для некоторого $M > 0$ и вещественного s_0, называемого показателем роста $f(t)$ (точнее, $\inf$).*

Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3, то $f(t) = \eta(t)\varphi(t)$ удовлетворяет всем трем условиям.

Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется функция комплексного переменного p (изображение)

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \tag{11.9}$$

Функция $\eta(t)$ – простейший пример оригинала (часто называется единичной функцией). Вообще ее часто опускают, всегда в этом методе подразумевая выполнение условия 2.

Определение 11.2. *Изображением функции $f(t)$ (по Лапласу) называют функцию комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемую соотношением (11.9). Фраза "функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$" записывается как $f(t) \doteqdot F(p)$ или $F(p) \doteqdot f(t)$.*

Теорема 11.2. *Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 – показатель роста $f(t)$, и является в этой полуплоскости аналитической функцией p.*

Доказательство следует из оценки по свойству 3:

$$\left| \int_0^\infty dt\, f(t) e^{-pt} \right| \leq M \int_0^\infty dt\, e^{-(s-s_0)t} = \frac{M}{s - s_0},$$

так что в указанной области интеграл абсолютно сходится. Кроме того в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$

$$\left| \int_0^\infty dt\, t f(t) e^{-pt} \right| \leq M \int_0^\infty dt\, t e^{-(s-s_0)t} = \frac{M}{(s_1 - s_0)^2}.$$

Поэтому в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ интеграл, получающийся дифференцированием по p, сходится равномерно, ибо он также мажорируется сходящимся интегралом, не зависящим от p. Итак, функция $F(p)$ в любой точке полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ обладает производной. Часто мы будем рассматривать аналитическое продолжение изображений за прямую $\operatorname{Re} p > s_0$. Если точка p стремится к бесконечности так, что $\operatorname{Re} p$ неограниченно возрастает, то $F(p)$ стремится к нулю в силу первой оценки. Отсюда следует, что $F(p) \to 0$, если $p \to \infty$, оставаясь внутри любого угла $-\pi/2 + \delta < \arg p < \pi/2 - \delta$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало, причем эта сходимость равномерна относительно $\arg p$. Если, в частности, $F(p)$ аналитична в бесконечно удаленной точке, то $F(p) \to 0$ при $p \to \infty$ по любому пути; следовательно, $F(p)$ просто должна иметь нуль в бесконечности.

11.5. **Обращение преобразования Лапласа.**

Теорема 11.3. *Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(p)$ служит ее изображением, то в любой точке t, где $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, справедливо равенство*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} F(p), \tag{11.10}$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = a > s_0$ и понимается в смысле главного значения на бесконечности.

Здесь потребуется лемма Жордана.

Лемма 11.1 (Жордан.). *Пусть $f(z)$ – регулярная аналитическая функция комплексного переменного z в области $G = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$, C_R – полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, пусть $\max_{z \in C_R} |f(z)| \to 0$ при $R \to \infty$ и пусть $\alpha > 0$. Тогда*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz = 0 \tag{11.11}$$

Набосок доказательства. Рассмотрим интеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, \frac{e^{pt}}{p},$$

взятый вдоль прямой $\mathrm{Re}\, p = a > 0$, проходимой снизу вверх. Обозначим еще через C_R и C'_R части окружности $|p| = R$, лежащие соответственно слева и справа от прямой $\mathrm{Re}\, p = a$.

Пусть $t > 0$; так как $1/p \to 0$ при $R \to \infty$ равномерно относительно $\arg p$, то:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} dp\, \frac{e^{pt}}{p} = 0.$$

Следовательно, из теоремы Коши о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, \frac{e^{pt}}{p} + \int\limits_{C_R} dp\, \frac{e^{pt}}{p} = 2\pi i$$

в пределе при $R \to \infty$ получим, что

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b\to\infty} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, \frac{e^{pt}}{p} = 1 \tag{11.12}$$

при $t > 0$. Аналогично получаем $f(t) = 0$ при $t < 0$. Далее, мы имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, \frac{e^{p(t-\tau)}}{p} = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases}$$

а тогда для "ступеньки"

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} \frac{e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2}}{p} = \begin{cases} 0, & t < \tau_1 \\ 1, & \tau_1 < t < \tau_2 \\ 0, & \tau_2 < t \end{cases} .$$

Приблизим теперь произвольный оригинал $f(t)$ ступенчатой функцией. В силу последнего равенства тогда

$$f(t) \cong \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \frac{e^{-p\tau_k} - e^{-p\tau_{k+1}}}{p} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) e^{-p\tau_k} \Delta'\tau_k \right),$$

где

$$\Delta'\tau_k = \frac{1 - e^{p(\tau_k - \tau_{k+1})}}{p}.$$

Таким образом, в пределе, когда точки τ_k заполняют весь интервал и все $\Delta'\tau_k \to 0$, мы получаем искомое выражение оригинала через его изображение

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} \left(\int\limits_0^t d\tau\, f(\tau) e^{-p\tau} \right).$$

Литература к лекции 12: М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат "Методы теории функций комплексного переменного", гл. VI.

12. Лекция

12.1. **Еще одна формулировка теоремы обращения.** Мы доказали, что оригинал $f(t)$ вполне определяется своим изображением $F(p)$ с точностью до значений в точках разрыва $f(t)$. В самом деле, по доказанному значение оригинала в точке его непрерывности выражается через изображение $F(p)$, а значения оригинала в точках разрыва, очевидно, не влияют на изображение.

Теорема 12.1. *Если функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, стремится к нулю при $|p| \to \infty$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$ равномерно относительно $\arg p$, и интеграл $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, F(p)$ абсолютно сходится, то $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, данной в (11.10).*

Доказательство. Фиксируем некоторое число p_0, $\operatorname{Re} p_0 > a$, тогда из (11.10) следует:

$$\int_0^\infty dt\, e^{-p_0 t} f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dt\, e^{-p_0 t} \left(\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} F(p) \right).$$

Так как во внутреннем интеграле $p = a + i\sigma$, $dp = id\sigma$, то можно вынести за его знак множитель e^{at}, и получаем оценку

$$\left| \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{i\sigma t} F(p) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma\, |F(a + i\sigma)|$$

Отсюда видно, что этот интеграл сходится равномерно относительно t, и, следовательно, в предыдущей формуле можно изменить порядок интегрирования. Мы получим:

$$\int_0^\infty dt\, e^{-p_0 t} f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, F(p) \int_0^\infty dt\, e^{(p-p_0)t} =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, \frac{F(p)}{p - p_0}.$$

По условию теоремы на дуге окружности C'_R: $|p| = R$, $\operatorname{Re} p > a$, имеем $\max |F(p)| \to 0$ при $R \to \infty$, следовательно,

$$\left| \int_{C'_R} dp\, \frac{F(p)}{p - p_0} \right| \to 0$$

в этом пределе. Следовательно

$$\int_0^\infty dt\, e^{-p_0 t} f(t) = F(p_0),$$

что и требовалось доказать. Заметим теперь, что при $t<0$ по лемме Жордана мы получим $f(t)=0$. Далее, из (11.10)

$$|f(t)| \leq \frac{e^{at}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma\, |F(a+i\sigma)| = Me^{at},$$

так что и условие 3 также выполняется. На проверке условия 1 мы не будем останавливаться.

12.2. **Предельные соотношения.** Если $f(t)$ и $f'(t)$ – оригиналы, $f(t) \mathrel{\hat=} F(p)$, то

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0),$$

где $p\to\infty$ внутри угла $|\arg p| < \pi/2-\delta$, при некоторм $\delta>0$ и $f(0)$ – предел справа. Если таже существует $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, то

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(\infty),$$

где $p\to 0$ внутри того же угла.

Доказательство. Пусть $f(t)$ дифференцируема. Тогда первый предел следует из следующих равенств:

$$pF(p) = p\int_0^\infty dt\, e^{-pt} f(t) = -\int_0^\infty dt\, \frac{\partial e^{-pt}}{\partial t} f(t) = f(0) + \int_0^\infty dt\, e^{-pt} f'(t), \quad (12.1)$$

и последний интеграл исчезает при $p\to\infty$. Если функция $f(t)$ не дифференцируема, то ее сколько угодно точно можно приблизить дифференцируемой, после чего проходит тоже доказательство. Для доказательства второго предела заметим, что существование $\lim_{t\to\infty} f(t)$ влечет ограниченность функции $f(t)$. Поэтому $s_0=0$ и последний интеграл в (12.1) существует при любом p, $\operatorname{Re} p>0$ и существует при $p=0$. В указанном в условии углу он сходится равномерно по p, так что в (12.1) можно перейти к пределу $p\to 0$ в этом углу, что дает $\int_0^\infty dt\, f'(t) = \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0)$.

Замечание 12.1. *Полученное асимптотическое поведение показывает, что при доказательстве того, что $pF(p)-f(0)$ имеет своим оригиналом $f'(t)$ по формуле*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt}(pF(p)-f(0))$$

последний интеграл нельзя разбивать на два, а следует записывать как

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, pe^{pt}\left(F(p)-\frac{f(0)}{p}\right) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt}\left(F(p)-\frac{f(0)}{p}\right) =$$

(в предположении, что можно дифференцировать под знаком интеграла)

$$=\frac{d}{dt}(f(t)-f(0)\eta(t)) = f'(t) \qquad \text{при } t>0.$$

12.3. **Свойства преобразования Лапласа.** Простейшие преобразования:

$$1 \doteqdot \frac{1}{p} \text{ преобразование } \eta(t); \qquad e^{p_0 t} \doteqdot \frac{1}{p - p_0}. \tag{12.2}$$

Далее обозначаем: $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$ и т.д.

I Линейность: $\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p)$.

II Подобие: для любого постоянного $\alpha > 0$ имеем $f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

III Если функция $f(t)$ напрерывна при $t > 0$ и $f'(t)$ (или $f^{(n)}(t)$) является оригиналом, то

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0),$$
$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim_{t \to +0} f^{(k)}(t)$.

IV Дифференцирование изображения: $F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t)$.

V Интегрирование оригинала: $\int_0^t f(\tau) d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$.

Если $f(t)$ – оригинал, то легко видеть, что $g(t) = \int_0^t dt\, f(t)$ также является оригиналом. Тогда по III $f(t) = g'(t) \doteqdot pG(p)$ (учли, что $g(0) = 0$). Откуда, $f(t) \sim F(p) = pG(p)$, откуда следует результат.

VI Интегрирование изображения. Если интеграл $\int_p^\infty dp'\, F(p')$ сходится, то он служит изображением функции $f(t)/t$:

$$\frac{f(t)}{t} \cong \int_p^\infty dp'\, F(p'),$$

т.е. интегрирование изображения равносильно делению оригинала на t.

Доказательство. Имеем: $\int_p^\infty dp'\, F(p') = \int_p^\infty dp' \int_0^\infty dt\, e^{-p't} f(t)$. Пусть путь интегрирования (p, ∞) весь лежит в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p \geq a > s_0$ $\Longrightarrow \left|\int_0^\infty dt\, e^{-p't} f(t)\right| \leq M \int_0^\infty dt\, e^{-(a-s_0)t}$, $\Longrightarrow$ равномерная сходимость этого интеграла по p. Поэтому мы можем изменить порядок интегрирования:

$$\int_p^\infty dp'\, F(p') = \int_0^\infty dt\, e^{-pt} \frac{f(t)}{t},$$

откуда следует утверждение. Отсюда же следует сходимость последнего интеграла.

VII Теорема запаздывания. Для любого $\tau > 0$: $f(t - \tau) \doteqdot e^{-p\tau} F(p)$.

VIII Теорема смещения. Для любого комплексного p_0: $e^{p_0 t} f(t) \doteqdot F(p - p_0)$.

12.4. **Свертка, теорема Бореля и интеграл Дюамеля.** Для дальнейшего нам потребуется понятие свертки функций. **Сверткой** функций $f(x)$ и $g(x)$ называется функция

$$(f * g)(x) = \int dy\, f(x - y) g(y), \tag{12.3}$$

если данный интеграл существует. В этом преположении укажем простейчие свойства свертки.

(1) Свертка линейна по каждому аргументу.
(2) Свертка коммутативна: $f * g = g * f$.
(3) Дистрибутивность: $f * (g + h) = f * g + f * h$.

(4) Ассоциативность: $f*(g*h) = (f*g)*h$. Требует для своего доказательства существования и перестановочности всех интегралов в формальной выкладке

$$\begin{aligned}(f*(g*h))(x) &= \int dy\, f(x-y) \int dz\, g(y-z)h(z) = \\ &= \int dz \left(\int dy\, f(x-y)g(y-z) \right) h(z) = \\ &= \int dz \left(\int dy\, f(x-z-y)g(y) \right) h(z) = \\ &= \int dz (f*g)(x-z)h(z) = ((f*g)*h)(x).\end{aligned}$$

Свертка заведомо существует, если функции – оригиналы для преобразования Лапласа. Тогда, как следует из свойства (2) оригинала

$$(f*g)(t) = \int\limits_0^t d\tau\, f(t-\tau)g(\tau), \tag{12.4}$$

что определено в силу свойства (3) и обращается в ноль при $t<0$. Пусть s_0 – наибольшее из показателей роста оригиналов, тогда

$$\left| \int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau) \right| \leq M \left| \int_0^t d\tau\, e^{s_0\tau} e^{s_0(t-\tau)} \right| = Mte^{s_0 t},$$

т.е. такой интеграл имеет показатель $s_0 + \epsilon$, где ϵ – любое сколь угодно малое положительное число. Покажем, что свертка двух изображений удовлетворяет условию Гельдера. Действительно, поскольку $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют всем трем свойствам изображений, справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}&|(f*g)(t+h) - (f*g)(t)| = \\ &= \left| \int\limits_t^{t+h} d\tau\, f(t+h-\tau)g(\tau) + \int\limits_0^t [f(t+h-\tau) - f(t-\tau)]g(\tau) \right| \leq \\ &\leq M_1 M_2 \int\limits_t^{t+h} d\tau\, e^{(t+h-\tau)s_1 + \tau s_2} + |h|^a A(t) M_2 \int\limits_0^t d\tau e^{s_2\tau} \leq |h|^{a'} A',\end{aligned}$$

где $|h| \leq h_0'$ для некоторых новых констант a', A' и h_0, где A', вообще говоря, может зависеть от t. Что и доказывает свойство Гельдера для свертки.

Теперь мы можем доказать теорему умножения (теорему Бореля):

Теорема 12.2. *Произведение двух изображений $F(p)$ и $G(p)$ также является изображением, причем:*

$$F(p)G(p) \risingdotseq (f*g)(t).$$

Доказательство. Для изображения свертки имеем:

$$\int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau) \risingdotseq \int_0^\infty dt\, e^{-pt} \int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau).$$

Справа здесь стоит двукратный интеграл по сектору плоскости (t,τ): интегрирование по τ ведется в пределах от 0 до t, а затем по t от 0 до ∞. Так как при $\operatorname{Re} p > s_0$ этот двукратный интеграл абсолютно сходится, то в нем можно изменить порядок интегрирований, и мы получим (заменяя еще t на $t_1 = t - \tau$:

$$\int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau) \doteqdot \int_0^\infty d\tau\, f(\tau) \int_\tau^\infty dt\, e^{-pt} g(t-\tau) =$$
$$= \int_0^\infty d\tau\, e^{-p\tau} f(\tau) \int_0^\infty dt_1\, e^{-pt_1} g(t_1) = F(p)G(p),$$

что и требовалось доказать. Теорема Бореля утверждает, что умножение изображений равносильно свертыванию оригиналов.

В приложениях полезно следствие теоремы умножения, которое относится к случаю, когда надо найти оригинал произведения $pF(p)G(p)$. Пользуясь правилом дифференцирования оригинала и (12.2), имеем **интеграл Дюамеля**:

$$pF(p)G(p) \doteqdot f(0)g(t) + (f' * g)(t),$$

что легко следует из (12.2) и правила дифференцирования оригинала. В силу симметрии свертки интеграл Дюамеля можно записать также как

$$pF(p)G(p) \doteqdot f(0)g(t) + (g * f')(t),$$

а переставляя $F \leftrightarrow G$, получаем

$$pF(p)G(p) \doteqdot f(t)g(0) + (g' * f)(t) \equiv g(0)f(t) + (f * g')(t),$$

Справедлива также теорема двойственная теореме умножения.

Теорема 12.3. *Пуста даны два оригинала $f(t)$ и $g(t)$ с показателями роста s_1 и s_2. Их произведение также является оригиналом, причем*

$$f(t)g(t) \doteqdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dq\, F(q)G(p-q),$$

где $a > s_1$ и $\operatorname{Re} p > s_2 + a$.

Доказательство. В самом деле, произведение $f(t)g(t)$, очевидно, удовлетворяет условиям для оригиналов, поэтому для его изображения имеем

$$f(t)g(t) \doteqdot \int_0^\infty dt\, e^{-py} f(t)g(t).$$

Возьмем $a > s_1$ и заменим $f(t)$ по формуле обращения:

$$f(t)g(t) \doteqdot \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dt \left\{ \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dq\, e^{qt} F(q) \right\} e^{-pt} g(t) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dq \left\{ F(q) \int_0^\infty dt\, e^{-(p-q)t} g(t) \right\},$$

где перестановочность интегралов следует из их равномерной сходимости. Полагая $\operatorname{Re} p > s_2 + a$, получаем что $\operatorname{Re}(p-q) > s_2$, поскольку $\operatorname{Re} q = a$. Поэтому внутренной интеграл равен $G(p-q)$.■

Заметим что так как a можно взять сколь угодно близким к s_1, то изображение функции $f(t)g(t)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s$, где $s = s_1 + s_2$ – показатель роста этой функции.

12.4.1. *Примеры.* Свойство 1 (линейность) позволяет находить по (12.2) такие преобразования, как

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$
$$\cos\omega t = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \qquad \sinh\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \qquad \cosh\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

Свойство IV позволяет получить по (12.2)

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad t^n e^{p_0 t} \risingdotseq \frac{n!}{(p - p_0)^{n+1}}$$

а из предыдущих формул

$$t\sin\omega t =\risingdotseq \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}, \qquad t\cos\omega t =\risingdotseq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2},$$

В силу (12.2)

$$e^{bt} - e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p - b} - \frac{1}{p - a},$$

так что по Свойству VI, получаем

$$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty dp'\left(\frac{1}{p' - b} - \frac{1}{p' - a}\right) = \ln\frac{p - a}{p - b}.$$

Аналогично предыдущему примеру по изображению синуса получаем:

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty \frac{dp'}{1 + p'^2} = \operatorname{arcctg} p.$$

Применяя свойство V, найдем изображение интегрального синуса

$$\mathrm{si}t \equiv \int_0^t \frac{\sin t}{t} \risingdotseq \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}$$

Литература к лекции 12: М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат “Методы теории функций комплексного переменного”, гл. VI.

13. Лекция.

13.1. Решение интегральных уравнений Вольтерра второго рода с разностным ядром. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра с разностным ядром

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt, \quad x > 0. \tag{13.1}$$

Предположим, что функции $f(x)$ и $k(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, стремятся к нулю при $x \to +\infty$ и имеют оценки

$$|f(x)| \le Ae^{-ax}, \qquad |k(x)| \le Be^{-bx}, \tag{13.2}$$

где $A > 0$, $B > 0$, а постоянные $a \ge 0$, $b \ge 0$. Пусть m и M – верхние границы значений $|f(x)|$ и $|k(x)|$ при $x \ge 0$:

$$m = \sup_{x\ge 0}|f(x)|, \qquad M = \sup_{x \ge 0}|k(x)|. \tag{13.3}$$

Применяя к уравнению (13.1) метод последовательных приближений, получим для $\varphi(x)$ при $x \ge 0$ оценку

$$|\varphi(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty}|\varphi_n(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} m\frac{(Mx)^n}{n!} = me^{Mx}.$$

Отсюда следует, что к функциям $\varphi(x)$, $f(x)$ и $k(x)$ применимо преобразование Лапласа при $s > \max a, b, M$. Применяя к обеим частям (13.1) преобразование Лапласа, которое мы будем обозначать здесь $\mathcal{L}$, и используя формулу свертки и обозначения

$$\Phi(z) = (\mathcal{L}\varphi)(z), \qquad F(z) = (\mathcal{L}f)(z), \qquad K(z) = (\mathcal{L}k)(z), \tag{13.4}$$

имеем

$$\Phi(z) = F(z) + K(z)\Phi(z),$$

откуда

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{1 - K(z)}. \tag{13.5}$$

Выше мы видели, что функция $\Phi(z)$ должна быть аналитичной в полуплоскости $\operatorname{Re} z \ge M$. Отсюда в силу полной независимости $K(z)$ и $F(z)$ вытекает, что знаменатель дроби в (13.5) не должен иметь корней внутри упомянутой полуплоскости. По доказанным ранее теоремам в силу формулы обращения получаем выражение для $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty}\Phi(z)e^{zx}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(z)}{1-K(z)}e^{zx}dz. \tag{13.6}$$

Таким образом, решение $\varphi(x)$ уравнения (13.1) дается формулой (13.6). Приведем другую формулу для этого решения. Для этого сначала покажем, что для уравнения (13.1) все повторные ядра зависят от разности $(x - t)$. Согласно определению имеем:

$$K_1(x,t) = K(x-t),$$

$$K_2(x,t) = \int_t^x K_1(x,\tau)K_1(\tau,t)d\tau = \int_t^x K(x-\tau)K(\tau-t)d\tau =$$

$$= \int_0^{x-t} K(x-t-s)K(s)ds = K_2(x-t).$$

Аналогично доказательство и для других повторных ядер:

$$K_n(x,t) = K_n(x-t) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда при $\lambda = 1$ резольвента $R(x,t;\lambda)$ уравнения (13.1) будет зависеть только от разности $x-t$. Введем обозначение:

$$R(x,t;1) = r(x-t). \tag{13.7}$$

Следовательно, решение уравнения (13.1) можно записать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x r(x-t)f(t)dt. \tag{13.8}$$

Применяя к обеим частям этого равенства преобразование Лапласа, учитывая обозначения (13.4) и

$$R(z) = (\mathcal{L}r)(z), \tag{13.9}$$

а также используя формулу свертки, получим

$$\Phi(z) = F(z) + R(z)F(z).$$

Согласно (13.5) выразим $R(z)$:

$$R(z) = \frac{\Phi(z) - F(z)}{F(z)} = \frac{1}{F(z)}\left[\frac{F(z)}{1-K(z)} - F(z)\right] = \frac{K(z)}{1-K(z)}$$

то есть

$$R(z) = \frac{K(z)}{1-K(z)}. \tag{13.10}$$

Обращение формулы (13.10) на основании формулы обращения дает нам резольвенту $r(x)$:

$$r(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{K(z)}{1-K(z)}e^{zx}dz. \tag{13.11}$$

Подставляя это выражение в (13.8), получим решение уравнения (13.1). Указанный метод решения уравнения (13.1) применим и к системам уравнений Вольтерра с разностными ядрами

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=0}^{m}\int_0^x k_{ij}(x-t)\varphi_j(t)dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{13.12}$$

Применяя к обеим частям (13.12) преобразование Лапласа, имеем

$$\Phi_i(z) = F_i(z) + \sum_{j=0}^{m} K_{ij}(z)\Phi_j(z)dz \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{13.13}$$

где

$$\Phi_i(z) = (\mathcal{L}\varphi_i)(z), \qquad F_i(z) = (\mathcal{L}f_i)(z), \qquad K_{ij}(z) = (\mathcal{L}k_ij)(z). \tag{13.14}$$

Решая систему уравнений первой степени (13.13), определим $\Phi_i(z)$ и тогда решение исходной системы (13.12) получится по формуле

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_i(z)e^{xz}dz \qquad (i = 1, \dots, m). \tag{13.15}$$

Пример 13.1. *Рассмотрим уравнение*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt \qquad (x > 0, \lambda > 0). \tag{13.16}$$

Оно является уравнением вида (13.1) с $k(x) = \lambda x$. В данном случае

$$K(z) = \lambda\int\limits_0^\infty e^{-zx}xdx = \frac{\lambda}{z^2}$$

причем вещественная часть z считается положительной. Формула (13.10) дает

$$R(z) = \frac{\lambda}{z^2-\lambda}$$

и в силу (13.11) резольвента $r(x)$ определяется равенством:

$$r(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\lambda e^{zx}}{z^2-\lambda}dz \qquad (x > 0), \tag{13.17}$$

где σ – любое достаточно большое положительное число. Точнее: $\sigma = \sigma_0$, где $\sigma_0 > \sqrt{\lambda}$. Вычисляя интеграл с помощью вычетов, получаем

$$r(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right).$$

Следовательно, решение уравнения (13.16) в силу (13.8) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\int\limits_0^x\left(e^{\sqrt{\lambda}(x-t)} - e^{\sqrt{\lambda}(t-x)}\right)f(t)dt.$$

Литература к лекции 13: М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат “Методы теории функций комплексного переменного”, гл. VI.

14. Лекция.

14.1. **Некоторые типы сингулярных интегральных уравнений.** Материал, излагаемый в этой последней главе, носит фрагментарный характер; это вызвано как существом вопроса, так и тем обстоятельством, что мы рассматриваем теории, пока еще находящиеся в процессе образования. Однако уже сейчас должно отметить две различные цели исследований в этой области:

(I) установить, верны ли теоремы Фредгольма (особенно теорема об альтернативе) для некоторых классов интегральных уравнений в том случае, когда ядро не принадлежит классу L^2;

(II) изучить типичные классы интегральных уравнений, которые по своим свойствам резко отличаются от уравнений Фредгольма.

Рассмотрим некоторые примеры изучения вопросов второго рода. В теории уравнений, не подчиняющихся теоремам Фредгольма, часто встречаются три новых явления:

1) наличие конечных предельных точек спектра собственных значений или даже непрерывного спектра, т.е. собственных значений, заполняющих целый интервал A оси, или даже целую ось A;

2) наличие собственных значений бесконечной кратности, т.е. собственных значений, которым соответствует бесконечное число линейно независимых собственных функций;

3) наличие точек бифуркации(в вещественном нелинейном случае), т.е. точек λ-оси, при переходе через которые число решений уравнения меняется, оставаясь, однако, конечным.

Эти явления наблюдаются уже для простейших интегральных уравнений, которые не удовлетворяют условиям предыдущих глав. В качестве примера уравнения с непрерывным спектром мы рассмотрим уравнение Лалеско–Пикара

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)dy = f(x), \tag{14.1}$$

ядро которого обладает бесконечной нормой, ибо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-y|}dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-2x}[e^{2y}]_{-\infty}^{x} + e^{2x}[e^{-2y}]_{+\infty}^{x}\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx.$$

Если обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дважды дифференцируемы, то наше уравнение

$$\varphi(x) - \lambda\left[e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\varphi(y)dy + e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-y}\varphi(y)dy\right] = f(x),$$

по существу эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\varphi''(x) + 2\lambda\varphi(x) - [\varphi(x) - f(x)] = f''(x),$$

т.е. уравнению

$$\varphi''(x) + (2\lambda - 1)\varphi(x) = f''(x) - f(x).$$

Поэтому в том случае, когда $f(x) \equiv 0$, мы имеем

$$\varphi(x) = Ae^{\mu x} - Be^{-\mu x}, \tag{14.2}$$

где A и B – произвольные постоянные и

$$\mu = \sqrt{1 - 2\lambda},$$

если только интеграл в левой части уравнения (14.1) существует, т.е. если $|\operatorname{Re}\mu| < 1$ (для вещественных λ это означает, что должно быть $\lambda > 0$).

Это показывает, что в области вещественных чисел спектр уравнения (14.1) заполняет бесконечный интервал $0 < A < \infty$. Каждая точка этого интервала представляет собой собственное значение кратности 2 для нашего уравнения. Однако соответствующие собственные функции (14.2) не принадлежат классу L^2 на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Более общие уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(x-y)\varphi(y)dy = 0,$$

[или аналогичные уравнения, когда областью интегрирования служит полупрямая $[0, \infty]$], где $k(t)$ экспоненциально стремится к нулю при $|t| \to \infty$, изучались Винером и Хопфом.

Важным примером интегрального уравнения с собственными значениями бесконечной кратности является уравнение с «ядром Ганкеля»

$$\varphi(t) - \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} J_\nu[2\sqrt{t}u]\varphi(u)du = f(t), \tag{14.3}$$

где $J_\nu(z)$ – бесселева функция первого рода порядка ν. В частности, было показано, что если $\nu > -1$ и если преобразование Лапласа

$$\psi(x) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{\ xt} t^{\nu/2}\varphi(t)dt \tag{14.4}$$

существует, то после умножения обеих частей уравнения (14.3) на $t^{\nu/2}$ и применения к обеим частям (14.4), можно изменить порядок интегрирования по бесконечному интервалу в двойном интеграле. Тогда мы получим

$$\psi(x) - \lambda \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(y)dy \int\limits_{0}^{\infty} J_\nu[2\sqrt{t}y]dt = g(z)$$

где

$$g(x) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{\ xt} t^{\nu/2} f(t)dt. \tag{14.5}$$

В силу хорошо известной формулы для преобразования Лапласа, имеем

$$\int_0^\infty \varphi(y)dy \int_0^\infty e^{-xt}t^{\nu/2}J_\nu[2\sqrt{t}y]dt = x^{-(\nu+1)} \int_0^\infty e^{-y/x}y^{\nu/2}\varphi(y)dy = \\ = x^{-(\nu+1)}\psi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Поэтому данное уравнение приобретает «алгебраическую» форму

$$\psi(x) - \lambda x^{-(\nu+1)}\psi\left(\frac{1}{x}\right) = g(x). \tag{14.6}$$

В однородном случае $f(x) = g(x) = 0$ можно положить

$$x = e^\xi, \qquad \psi(e^\xi) = \Psi(t) \tag{14.7}$$

и получить соотношение

$$\lambda\Psi(-\xi) = e^{(\nu+1)\xi}\Psi(\xi). \tag{14.8}$$

Применив эту формулу дважды, получим

$$\Psi(\xi) = \lambda^2\Psi(\xi),$$

т.е. $\lambda^2 = 1$. Это показывает, что единственными возможными собственными значениями являются $\lambda = \pm 1$.

Каждое из этих значений имеет бесконечную кратность, так как при $\lambda = \pm 1$ уравнению (14.8) удовлетворяет функция

$$\Psi(\xi) = \frac{E(\xi)}{1 + \lambda e^{(\nu+1)\xi}}, \tag{14.9}$$

где $E(x)$ обозначает произвольную четную (аналитическую) функцию x.

Например, если $\nu = 0$, $\lambda = 1$, $E(x) \equiv 1$, мы получаем

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{1 + e^\xi}, \qquad \psi(x) = \frac{1}{1 + e^x}, \qquad \varphi(x) = e^{-x},$$

а если $E(x) = 2\sqrt{\pi}\cosh(x/2)$, имеем

$$\Psi(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\xi/2}, \qquad \psi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Более того, при $\nu = \pm 1/2$ мы можем легко определить этим путем все функции, переходящие в себя при sin- и cos-преобразованиях Фурье.

Наконец, чтобы дать пример точки бифуркации, рассмотрим простейшее нелинейное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi^2(y)dy = 1. \tag{14.10}$$

Положим

$$\int_0^1 \varphi^2(y)dy = \xi$$

Тогда

$$\varphi(x) = 1 + \lambda\xi. \tag{14.11}$$

и уравнение (14.10) эквивалентно алгебраическому уравнению второй степени

$$\xi = (1 + \lambda\xi)^2.$$

Отсюда получаем

$$\xi = \frac{1 - 2\lambda \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda^2}$$

и

$$\varphi(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda}. \tag{14.12}$$

Таким образом, наше уравнение допускает вещественные решения тогда и только тогда, когда $\lambda \leq 1/4$. Оно имеет в точности два решения, исключая случай $\lambda = 1/2$, когда оно имеет решение (кратности 2) $\varphi(x) \equiv 2$. При $\lambda = 0$ одно решение имеет вид $\varphi(x) = 1$, а второе бесконечно. Точка $\lambda = 1/4$ – это точка бифуркации, а точка $\lambda = 0$ – особая точка уравнения.

Соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^1 \varphi^2(y)dy = 0. \tag{14.13}$$

всегда допускает нетривиальное решение

$$\varphi(x) = \frac{1}{\lambda}. \tag{14.14}$$

Это, однако, не означает, что уравнение (14.10) имеет бесконечное число решений, ибо сейчас из существования решений (14.14) не следует существование бесконечного числа решений «неоднородного» уравнения.

14.2. **Уравнения, содержащие интегралы в смысле главного значения по Коши, и преобразование Гильберта.** Мы рассмотрели выше интегральные уравнения Фредгольма с ядрами вида

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1, H \text{ ограничено}).$$

При этом весьма существенно предположение, что $\alpha < 1$. В важном же случае $\alpha = 1$ (тогда интеграл в уравнении следует понимать в смысле главного значения по Коши), интегральное уравнение коренным образом отличается от уравнений, рассматривавшихся ранее.

Один из самых первых результатов в этой области представляют собой две формулы взаимности, выведенные Д. Гильбертом из интеграла Пуассона. Им показано, что если $\Phi(z) = u + iv$ – аналитическая функция, регулярная в круге $|z| < 1$, а $u(\theta)$ и $v(\theta)$ – соответственно вещественная и мнимая части функции $\Phi(z)$ на окружности $|z| = 1$, то

$$\begin{cases} u(\theta) = \dfrac{1}{2\pi} \text{p.v.}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} v(\varphi) d\varphi, \\ v(\theta) = \dfrac{-1}{2\pi} \text{p.v.}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} u(\varphi) d\varphi, \end{cases} \tag{14.15}$$

если только

$$\text{p.v.}\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)d\varphi = \text{p.v.}\int_{-\pi}^{\pi} v(\varphi)d\varphi = 0. \tag{14.16}$$

Здесь мы ввели специальное обозначение для интеграла в смысле главного значения по Коши от функции $f(x)$, которая обращается в бесконечность во внутренней точке $x = x_0$ интервала интегрирования (a, b). Это предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{a}^{x_0-\varepsilon} + \int_{x_0+\varepsilon}^{b}\right) f(x)dx,$$

где

$$0 < \varepsilon \le \min(x_0 - a, b - x_0).$$

Мы будем использовать для обозначения главного значения значок p.v. перед обычным знаком интеграла.

Если $f(x) = g(x)/(x - x_0)$, где $g(x)$ – любая интегрируемая (по Лебегу) функция, то указанный предел существует и конечен для почти всех x_0 из интервала (a, b); если $g(x)$ принадлежит классу L^p при $p > 1$, то главное значение интеграла также принадлежит L^p. Например, при $\Phi(z) = z^n$ $(n = 1, 2, \dots)$ имеют место формулы

$$\begin{cases} \cos(n\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\text{p.v.}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}\sin(n\varphi)d\varphi, \\ \sin(n\theta) = \dfrac{-1}{2\pi}\text{p.v.}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}\cos(n\varphi)d\varphi, \end{cases}, \tag{14.17}$$

которые часто полезны при преобразовании ряда по синусам в ряд по косинусам и обратно. Вместо того чтобы рассматривать точные условия справедливости формул (14.15), мы будем изучать по существу эквивалентный вопрос о значениях, принимаемых на вещественной оси аналитической функцией $\Phi(z)$, регулярной в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. В этом случае интеграл Пуассона для гармонической функции

$$f(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2}d\xi$$

приводит, если выполнены соответствующие условия, к более простым формулам взаимности

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{\pi}\text{p.v.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{t-x}dt, \\ v(x) = \dfrac{-1}{\pi}\text{p.v.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)}{t-x}dt, \end{cases}, \tag{14.18}$$

между вещественной частью $u(x)$ и мнимой частью $v(x)$ граничных значений $\Phi(x + i0)$ функции $\Phi(z)$ при $\operatorname{Im} z = 0$.

Другими словами, (v, u) и $(u, -v)$ – это две пары функций, «сопряженных» относительно преобразования Гильберта

$$f(x) = H_x[\varphi(y)] \equiv \frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x}dy, \tag{14.19}$$

в том смысле, что вторая пара есть преобразование Гильберта первой пары. Это преобразование изучалось Титчмаршем, который доказал следующие три основные теоремы. Мы приводим их здесь без доказательства.

Теорема 14.1 (Теорема обращения.)**.** *Если функция $\varphi(x)$ принадлежит классу L_p $(p > 1)$ на основном интервале $(-\infty, +\infty)$, то формула (14.19) определяет почти всюду некоторую функцию $f(x)$, также принадлежащую L_p, преобразование Гильберта $H[f]$ которой почти всюду совпадает с $-\varphi(x)$.*

Это означает, что для любой L_p-функции

$$H\{H[\varphi]\} = -\varphi. \tag{14.20}$$

Теорема 14.2 (Обобщенная теорема Парсеваля.)**.** *Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ принадлежат классам L_{p_1} и L_{p_2} соответственно. Если*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1, \tag{14.21}$$

то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_x[\varphi_1(y)]H_x[\varphi_2(y)]dx. \tag{14.22}$$

Теорема 14.3. *Пусть $\Phi(x + iy)$ – аналитическая функция, регулярная для $y > 0$ и для всех значений y удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^p dx < K \quad (p > 1), \tag{14.23}$$

где K – положительная постоянная. Тогда при $y \to +0$ $\Phi(x + iy)$ стремится почти всюду к предельной функции

$$\Phi(x + i0) = u(x) + iv(x),$$

вещественная и мнимая части которой принадлежат L_p и связаны формулами обращения (14.18).

Поэтому, в частности, почти всюду имеет место равенство

$$\operatorname{Re}\Phi(x + i0) = H_\xi[\operatorname{Im}\Phi(x + i0))]. \tag{14.24}$$

Обратно, если задана вещественная функция $v(x)$ класса L_p и если мы полагаем

$$u(x) = H_x[v(y)], \tag{14.25}$$

то аналитическую функцию $\Phi(z)$, отвечающую паре (u, v), можно вычислить по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t) + iv(t)}{t - z}dt \quad (\operatorname{Im} z > 0); \tag{14.26}$$

эта функция удовлетворяет условию (14.23).

Поэтому мы можем утверждать, что аналитическая функция $\Phi(z)$, регулярная для $\operatorname{Im} z > 0$, удовлетворяет условию (14.23), если только ее граничные значения $\Phi(x+i0) = u(x) + iv(x)$ на вещественной оси существуют почти всюду и функции $u(x)$ и $v(x)$ обе принадлежат классу L_p при $p > 1$. Другими словами, в принятых предположениях не нужно заранее требовать, чтобы u и v были связаны уравнениями (14.18).

К этим трем теоремам мы прибавим еще одну, роль которой аналогична роли теоремы о свертке в теории преобразования Лапласа.

Теорема 14.4. *Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ принадлежат классам L_{p_1} и L_{p_2} соответственно. Если*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1, \tag{14.27}$$

т.е. если $p_1 + p_2 < p_1 p_2$, то

$$H\{\varphi_1 H[\varphi_2]\} + H\{\varphi_2 H[\varphi_1]\} = H[\varphi_1]H[\varphi_2] - \varphi_1\varphi_2 \tag{14.28}$$

почти всюду.

15. Лекция.

15.1. **Уравнения, содержащие интегралы в смысле главного значения по Коши, и преобразование Гильберта (продолжение).** Для доказательства положим

$$\varphi_1 = v_1, \qquad H[\varphi_1] = u_1, \qquad \varphi_2 = v_2, \qquad H[\varphi_2] = u_2.$$

Тогда две аналитические функции

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u_1(t) + iv_1(t)}{t - z}dt$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u_2(t) + iv_2(t)}{t - z}dt$$

регулярны для $\operatorname{Im} z > 0$ и удовлетворяют для всех значений y условиям

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_1(x+iy)|^{p_1} < K_1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_2(x+iy)|^{p_2} < K_2,$$

где K_1 и K_2 – соответствующие положительные постоянные. Поэтому, если положить $\Phi_1(z)\Phi_2(z) = \Phi(z)$ и (в соответствии с условием (14.27))

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r} \quad r > 1,$$

то в силу неравенства Гельдера получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x+iy)|^{r} < K_1^{r/p_1} K_2^{r/p_2}.$$

Следовательно, функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (14.23) при $p = r > 1$. Из формулы (14.24) (т.е. из теоремы III) вытекает, что

$$u_1u_2 - v_1v_2 = \operatorname{Re}\Phi(x+i0) = H[\operatorname{Im}\Phi(x+i0)] = H(u_1v_2 + v_1u_2),$$

а это и есть иначе записанная теорема о свертке (14.28).

«Косо-взаимный характер» преобразования Гильберта (14.20) позволяет нам записать формулу Парсеваля (14.22) в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x) H_x[\varphi_2(y)]dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x) H_x[\varphi_1(y)]dx. \tag{15.1}$$

После умножения на π эта формула может быть записана следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi_1(x) \text{p.v.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\varphi_2(y)}{y-x} = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi_2(x) \text{p.v.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\varphi_1(y)}{y-x},$$

или (если поменять местами x и y в правой части)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\varphi_1(x)\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\frac{\varphi_2(y)}{y-x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\varphi_2(y)\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{\varphi_1(x)}{y-x}, \tag{15.2}$$

Итак, мы видим, что при соответствующих условиях можно менять местами интеграл в смысле главного значения и обычный интеграл. Если функции φ_1 и φ_2 равны нулю вне некоторого интервала (a, b), то предыдущая формула имеет вид

$$\int\limits_a^b dx\varphi_1(x)\text{p.v.}\int\limits_a^b dy\frac{\varphi_2(y)}{y-x} = \int\limits_a^b dy\varphi_2(y)\text{p.v.}\int\limits_a^b dx\frac{\varphi_1(x)}{y-x}; \tag{15.3}$$

равенство (15.3) справедливо, если φ_1 и φ_2 принадлежат классам L_{p_1} и L_{p_2} соответственно и

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1. \tag{15.4}$$

Если основной интервал (a, b) конечен, то условие (15.4) можно заменить условием

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1, \tag{15.5}$$

ибо на таком интервале каждая L_p-функция принадлежит также классу $L_{p'}$ для $p' < p$; поэтому вместо пары p_1, p_2, удовлетворяющей условию (15.4), мы можем подставить пару $p_1' \leq p_1$, $p_2' \leq p_2$, удовлетворяющую условию (15.5). Более общо, рассматривая вместо произведения $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ функцию $\Phi(x, y)$, мы можем написать

$$\int\limits_a^b dx\,\text{p.v.}\int\limits_a^b dy\frac{\Phi(x,y)}{y-x} = \int\limits_a^b dy\,\text{p.v.}\int\limits_a^b dx\frac{\Phi(x,y)}{y-x}; \tag{15.6}$$

если только функция $\Phi(x, x)$ принадлежит классу L_p при $p > 1$ и двойной интеграл

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b \frac{\Phi(x,y)-\Phi(x,x)}{y-x}dxdy \tag{15.7}$$

существует в обыкновенном смысле, так что к нему можно применить классическую теорему Фубини.

Аналогичным образом последняя теорема приводит к наиболее употребительному частному случаю формулы перемены интегрирования для двух интегралов в смысле главного значения. Общую формулу перемены порядка интегрирования для двух интегралов в смысле главного значения по Коши можно записать в виде

$$\text{p.v.}\int\limits_a^b \frac{dz}{z-x}\,\text{p.v.}\int\limits_a^b dy\frac{F(x,y,z)}{y-z} =$$

$$= \text{p.v.}\int\limits_a^b dy\,\text{p.v.}\int\limits_a^b dz\frac{F(x,y,z)}{(z-x)(y-z)} - \pi^2 F(x,x,x),$$

как показал Харди (1908г.).

В самом деле, так как

$$
\begin{aligned}
&\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{\varphi_1(x)}{x-x_0}\,\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\frac{\varphi_2(y)}{y-x}-\\
&\quad-\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\varphi_2(y)\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{\varphi_1(x)}{(x-x_0)(y-x)}=\\
&\quad=\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{\varphi_1(x)}{x-x_0}\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\frac{\varphi_2(y)}{y-x}-\\
&\quad-\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\frac{\varphi_2(y)}{y-x_0}\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\left(\frac{1}{x-x_0}-\frac{1}{x-y}\right)\varphi_1(x)=\\
&\quad=\pi^2H_{x_0}\{\varphi_1(x)H_x[\varphi_2(y)]\}-\pi^2H_{x_0}\{\varphi_2(y)H_x[\varphi_1(x)]\}+\\
&\quad+\pi^2H_{x_0}\{\varphi_2(y)H_y[\varphi_1(x)]\}=\\
&\quad=\pi^2H_{x_0}\{\varphi_1(x)H_x[\varphi_2(y)]\}+\varphi_2(x)H_x[\varphi_1(y)]-\\
&\quad-\pi^2H_{x_0}[\varphi_1(y)]H_{x_0}[\varphi_2(y)],
\end{aligned}
$$

то из формулы (14.28),

$$
H\{\varphi_1H[\varphi_2]\}+H\{\varphi_2H[\varphi_1]\}=H[\varphi_1]H[\varphi_2]-\varphi_1\varphi_2,
$$

следует, что почти всюду

$$
\begin{aligned}
&\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{\varphi_1(x)}{x-x_0}\,\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\frac{\varphi_2(y)}{y-x}=\\
&\quad=\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\varphi_2(y)\,\text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\frac{\varphi_1(x)}{(x-x_0)(y-x)}-\\
&\quad-\pi^2\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0),
\end{aligned}
\tag{15.8}
$$

если только φ_1 и φ_2 принадлежат классам L_{p_1} и L_{p_2} соответственно и, кроме того, имеет место неравенство (14.27).

В частности, если φ_1 и φ_2 тождественно равны нулю вне интервала (a,b), то

$$
\begin{aligned}
&\text{p.v.}\int\limits_{a}^{b} dx\frac{\varphi_1(x)}{x-x_0}\,\text{p.v.}\int\limits_{a}^{b} dy\frac{\varphi_2(y)}{y-x}=\\
&\quad=\text{p.v.}\int\limits_{a}^{b} dy\varphi_2(y)\,\text{p.v.}\int\limits_{a}^{b} dx\frac{\varphi_1(x)}{(x-x_0)(y-x)}-\\
&\quad-\pi^2\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0).\qquad (a<x_0<b)
\end{aligned}
\tag{15.9}
$$

Эти соображения позволяют нам рассматривать в пространстве L_p интегральные уравнения указанного в начале настоящего параграфа вида, даже если основной интервал совпадает со всей вещественной осью $(-\infty, +\infty)$. Действительно, рассмотрим сначала уравнение второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \text{p.v.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\varphi(y)}{y-x} = f(x), \tag{15.10}$$

или символически

$$\varphi(x) - \lambda\pi H_x[\varphi(y)] = f(x).$$

Применяя преобразование Гильберта к обеим частям этого уравнения и используя соотношение (14.22),

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_x[\varphi_1(y)]H_x[\varphi_2(y)]dx,$$

получаем

$$H_x[\varphi(y)] + \lambda\pi\varphi(x) = H_x[f(y)].$$

Поэтому

$$(1+\lambda^2\pi^2)\varphi(x) = f(x) + \lambda\pi H_x[f(y)],$$

или в развернутом виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\left[f(x) + \lambda \text{p.v.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{y-x}\right]. \tag{15.11}$$

Более того, если ядро имеет вид $K(x,y) = \dfrac{1}{y-x} + K^*(x,y)$, где функция K^* ограничена, то

$$\begin{aligned}(1+\lambda^2\pi^2)\varphi(x) = f(x) + \lambda \text{p.v.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{y-x} + \\ + \lambda \text{p.v.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy K^*(x,y)\varphi(y) + \\ + \lambda \text{p.v.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{z-x} \text{p.v.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy K^*(x,y)\varphi(y),\end{aligned}$$

хотя в силу предыдущих рассуждений ей достаточно быть по крайней мере интегрируемой.

Если в последнем члене можно менять порядок интегрирования, то это обыкновенное уравнение Фредгольма второго рода с ядром

$$K^*(x,y) + \lambda \text{p.v.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{K^*(z,y)}{z-x}.$$

Говоря “обыкновенное” уравнение, мы имеем в виду, что присутствующие в нем интегралы понимаются в обычном смысле, а не в смысле главного значения по Коши; однако основной интервал остается неограниченным.