

Задача 1. Пусть гладкая кривая X на вещественной аффинной плоскости \mathbb{A}^2 задана своими параметрическими уравнениями $x = p(t)$, $y = q(t)$, где $p(t)$ и $q(t)$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции. Рассмотрим полярное отображение $f : X \rightarrow \check{X} \subset \check{\mathbb{A}}^2$.

- 1) Прямым вычислением с производными докажите принцип двойственности, утверждающий, что $\check{\check{X}} = X$.
- 2) Попробуйте дать геометрическое (т.е. не содержащее вычислений) доказательство принципа двойственности.

Задача 2. Обыкновенным острием на кривой X называется особая точка $a \in X$, в окрестности которой в подходящих аффинных координатах (x, y) уравнение кривой X имеет вид

$$y^2 = bx^3 + [4], \quad b \in \mathbf{k}^*, \quad (1)$$

где $[4]$ означает члены порядка ≥ 4 по x, y . При этом $l = \{y = 0\}$ - единственная прямая через точку a , для которой кратность пересечения с X в точке a равна 3. Эту прямую назовем *выделенной касательной* к X в острие a .

Гладкая точка $a \in X$ называется *точкой простого перегиба*, если кратность пересечения X с касательной $T_a X$ в точке a равна 3.

- 1) Докажите, что образ на двойственной кривой \check{X} точки простого перегиба на X является обыкновенным острием.
- 2) Докажите обратное утверждение: образ на двойственной кривой \check{X} обыкновенного острия на кривой X с уравнением (1) является точкой простого перегиба.

Задача 3. Пусть X - кривая в \mathbb{P}^2 , имеющая обыкновенную двойную точку b . Как мы знаем, для любой точки $a \in \mathbb{P}^2$ поляра $P_a(X)$ проходит через точку b .

- 1) Докажите, что для общей точки $a \in \mathbb{P}^2$ кратность пересечения в точке b кривых X и $P_a(X)$ равна 2.
- 2) Пусть X не имеет других особенностей, кроме δ обыкновенных двойных точек. Выведите из утверждения 1), что степень двойственной кривой \check{X} равна $\deg \check{X} = d(d-1) - 2\delta$.

Задача 4. Пусть X не имеет других особенностей, кроме δ обыкновенных двойных точек и τ обыкновенных острий. Докажите, что степень двойственной кривой \check{X} равна $\deg \check{X} = d(d-1) - 2\delta - 3\tau$ (формула Плюккера).

Задача 5. 1) Пусть $a \in X$ - обыкновенная двойная точка. Что ей "соответствует" на двойственной кривой \check{X} ?

2) Пусть $a \in X$ - обыкновенное острие. Что ему "соответствует" на двойственной кривой \check{X} ?