17.05.2022 **Механика 2022**

Семинар № 16

Канонические преобразования

Краткое напоминание.

В Лагранжевом формализме любые обратимые точечные преобразования $q^i \to Q^i$: $q^i = f^i(Q,t)$ не меняют структуру уравнений движения: с учетом изменения Лагранжиана $L(q,\dot{q},t) \to \tilde{L}(Q,\dot{Q},t)$ уравнения Эйлера – Лагранжа сохраняют свой функциональный вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^i}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q^i} = 0.$$

В Гамильтоновом формализме не любая обратимая замена координат и импульсов

$$\begin{pmatrix} q^i \\ p_j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q^i \\ P_j \end{pmatrix}$$

сохраняет структуру Га-=2=мильтоновых уравнений движения:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

После произвольной обратимой замены

$$q_i = f_i(Q, P, t)$$
$$p_i = g_i(Q, P, t)$$

может не найтись новая функция Гамильтона $\tilde{H}(Q, P, t)$ такая, что

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}.$$

Канонические преобразования — это подмножество обратимых преобразований, которые сохраняют гамильтоновость динамики в новых переменных. Отсюда очевидно, что относительно композиции преобразований (как операции умножения) канонические преобразования образуют группу.

Различные типы канон. преобр. =3=

удобно вводить с помощью вариационного принципа в Гамильтоновой формулировке:

$\gamma=(q(t),p(t))$

— параметризованная траектория движения, где $q_i(t)$ и $p_i(t)$ — решение динамических уравнений, находится из требования экстремальности функционала действия:

$$(\bigstar) \qquad \delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\big(p_i(t)\dot{q}_i(t) - H(q,p,t)\big)dt\right)=0.$$

$\Rightarrow$ при фиксированных начальном и конечном положении $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$

$$\Rightarrow \quad \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Таким образом, если преобразование к новым координатам и импульсам

$q_i \to Q_i = Q_i(q,p,t)$

$p_i \to P_i = P_i(q,p,t)$ — каноническое, то есть новые уравнения движения сохраняют Гамильтонов вид: $\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}$ $\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}$, то помимо (★) должно выполняться и второе равенство:

$$(\star\star) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(Q,P,t) \right) dt = 0.$$

Это означает, что подынтегральные выражения в (★) и (★★) отличаются на полный дифференциал некоторой ф-ции F, т.к.

$$\int_\gamma dF = F(2) - F(1) \text{ — пропадает при взятии вариации } \delta.$$

Итак, наша основная формула принимает вид:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} p_i \, dq_i - H(p,q,t)\,dt = \sum_{i=1}^{N} P_i \, dQ_i - \tilde{H}(Q,P,t)\,dt + dF.} \quad (\ast)$$

Всего у нас есть $4N$ переменных $\{q, p, Q, P\}$ и $2N$ связей
$$Q_i = Q_i(q, p, t)$$
$$P_i = P_i(q, p, t) \quad 1 \le i \le N,$$
поэтому функция F зависит от каких-то $2N$ независимых переменных из набора $\{q, p, Q, P\}$.

Функция F называется <u>производящей функцией</u> канонического преобразования. Обычно её выбирают в одном из 4 видов: $F_1(q, Q, t)$, $F_2(q, P, t)$, $F_3(p, Q, t)$ и $F_4(p, P, t)$.

A) Если в качестве независимого набора выбраны q_i и Q_i то
$$dF_1(q, Q, t) = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$
и из основной формулы $(*)$ получаем равенства:

$$dF_1 = \sum_i p_i\, dq_i - \sum_i P_i\, dQ_i + (\tilde{H} - H)\, dt.$$

В этом равенстве подразумевается, что p_i и P_i выражены как функции q и Q. Учитывая вид dF_1, получаем равенства:

$$p_i = \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_i}$$

$$\tilde{H} - H = \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Разрешив эти уравнения, можно найти явный вид новых переменных P и Q и нового Гамильтониана $\tilde{H}$.

(Б) Другие формы производящей функции находятся преобразованием Лежандра.

Если независимый набор переменных выбран в виде (q, P), то в формуле (*) надо преобразовать слагаемое $\sum_i P_i dQ_i$:

$$\sum_i P_i dQ_i \equiv d\left(\sum_i P_i Q_i\right) - \sum_i Q_i dP_i$$

и (*) примет вид:

$$dF_2(q,P) = \sum p_i dq_i + \sum_i Q_i dP_i + (\tilde{H} - H)dt,$$

где $F_2 = F_1 + \sum_i P_i Q_i$ (преобр. Лежандра к новым переменным с учетом

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \Rightarrow Q_i = \Phi_i(q,P,t) \text{ и } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2 = F_2(q,P,t)).$$

Таким образом, получаем уравнение перехода для производящей ф-ции $F_2(q,P,t)$:

$$p_i = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P_i}$$

$$\tilde{H} - H = \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Если в (*) преобразовать слагаемое $\sum p_i dq_i = d\left(\sum p_i q_i\right) - \sum q_i dp_i$, то придём к функции $F_3(p, Q, t)$:

$$q_i = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial p_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial Q_i}$$

$$\tilde{H} - H = \frac{\partial F_3}{\partial t},$$

и, наконец, преобразуя <u>оба</u> слагаемых $\sum P_i dQ_i$ и $\sum p_i dq_i$ получим формулы канонического преобразования для $F_4(p, P, t)$:

$$q_i = -\frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial p_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial P_i}$$

$$\tilde{H} - H = \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

Рассмотрим примеры. Мы будем работать в основном с <u>одномерными</u> системами ($N = 1$), так как в этом можно придумать примеры с явными ответами.

Пример 1

От канонических переменных q и p выполнено преобразование к новым переменным Q и P по формулам:

$$Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p^{\alpha}\right)$$

$$P = q^{\beta}\operatorname{ctg} p^{\alpha},$$

α и β – числовые параметры.

а) При каких α и β это каноническое преобразование?

б) Найдите производящую функцию $F_1(q, Q, t)$ канонического преобразования.

Решение:

а) Воспользуемся критерием каноничности преобразования:

$$\{Q, P\}_{(q,p)} = 1.$$

Для вычисления скобки Пуассона удобно представить:

$$Q = \ln(\sin p^\alpha) - \ln q.$$

Теперь получаем:

$$\{Q, P\}_{(q,p)} = \{\ln(\sin p^\alpha) - \ln q, q^\beta \operatorname{ctg} p^\alpha\} =$$

$$= \frac{\cos p^\alpha}{\sin p^\alpha}(\alpha p^{\alpha-1})\{p, q\}\beta q^{\beta-1}\operatorname{ctg} p^\alpha +$$

$$+ \frac{1}{q}\{q, p\} q^\beta \frac{\alpha p^{\alpha-1}}{\sin^2 p^\alpha} =$$

$$= \alpha p^{\alpha-1} q^{\beta-1}\left(\frac{1}{\sin^2 p^\alpha} - \beta \operatorname{ctg}^2 p^\alpha\right).$$

Для каноничности скобки этоб должно равняться 1. $\Rightarrow$ $\boxed{\beta = 1}$ (иначе будет зависимость от q) и после этого всё упростится до $\{Q, P\} = \alpha \underbrace{p^{\alpha-1}}_{1} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$.

Итак, замена каноническая при $\alpha = \beta = 1$:

$$\boxed{Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right), \quad P = q \operatorname{ctg} p}$$

б) Поскольку $F_1 = F_1(q, Q, t)$

и $p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$ $P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$,

нужно прежде всего выразить p и P в виде функций от q и Q:

$$q e^{Q} = \sin p \Rightarrow p = \arcsin(q e^{Q})$$

$$P = q \operatorname{ctg} p = q \frac{\sqrt{1-\sin^2 p}}{\sin p} = e^{-Q}\sqrt{1-q^2 e^{2Q}}$$

Дальше решаем уравнение на F_1:

$$\frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q} = p = \arcsin(q e^{Q})$$

$$F_1 = \underset{\text{произвольная пока функция}}{\Phi(Q)} + \underbrace{\int \arcsin(q e^{Q})\, dq}_{y = q e^{Q} \text{ и } \int \text{ по частям}} =$$

$$= \Phi(Q) + q \arcsin(q e^{Q}) + e^{-Q}\sqrt{1-q^2 e^{2Q}}$$

Надо подобрать произвольную $\Phi(Q)$

так, чтобы выполнялось равенство для P:

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P = -e^{-Q}\sqrt{1-q^2e^{2Q}}.$$

Дифференцируя выражение для F_1 находим $\frac{d\Phi(Q)}{dQ} = 0 \Rightarrow \Phi(Q) = const$.

Константу можно взять $=0$, т.к. от её значения <u>ничего не зависит</u>.

Итог:

$$F_1(q,Q) = q\arcsin(qe^Q) + \\ + e^{-Q}\sqrt{1-q^2e^{2Q}}.$$

<u>Пример 2</u> (бонусная задача)

Производящая функция имеет вид $F_1(q,Q) = \exp(q+Q)$.

а) Найти явные выражения новой координаты Q и импульса P в терминах q и p.

б) Найти $F_2(q,P)$, генерирующую это же канонич. преобраз.

Решение:

а) $p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = e^{q+Q} \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} Q = -q + \ln p \\ P = -p \end{array}}$

$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -e^{q+Q} \Rightarrow$

б) $F_2(q, P) \Rightarrow$ нужно выразить p и Q (дополнительный набор к независимым q и P) в виде функций от q и P:

$$\begin{cases} p = -P = \frac{\partial F_2}{\partial q} \\ Q = -q + \ln(-P) = \frac{\partial F_2}{\partial P} \end{cases}$$

Из первого равенства:

$$F_2 = -Pq + \Phi(P)$$

произвольная ф-ция.

Подставляем это во второе равенство.

$$-q + \ln(-P) = \frac{\partial F_2}{\partial P} = -q + \frac{d\Phi}{dP}$$

$$\frac{d\Phi}{dP} = \ln(-P) \Rightarrow \Phi(P) = P(1 + \ln(-P)).$$

Таким образом, производящая функция $F_2(q, P)$ имеет вид:

$$F_2(q, P) = -Pq + P(1 + \ln(-P)).$$

Пример 3.

Особенно полезны канонические преобразования, если они позволяют упростить уравнения движения. Самый радикальный вариант это добиться того, чтобы новый Гамильтониан $\tilde{H}$ зависел бы только от импульсов P_i (или только от координат Q_i). Тогда в новых переменных все Гамильтоновы уравнения решаются точно: если $\tilde{H} = \tilde{H}(P)$:

$$\begin{cases} \dot{P}_i = \{P_i, \tilde{H}\} = 0 \qquad \Rightarrow P_i = C_i = \mathrm{Const} \\ \dot{Q}_i = \{Q, \tilde{H}\} = -\dfrac{\partial \tilde{H}(P)}{\partial P_i} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_i = \omega_i t + Q_i^{(0)}, \quad \omega_i = \frac{\partial \tilde{H}(C)}{\partial P_i} = \mathrm{Const}.$$

Но подобрать такое преобразование <u>очень не просто</u>.

Рассмотрим ~~а~~ одномерный гармонический осциллятор:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

$$\{q,p\} = 1$$

а) Совершите каноническое преобразование с $F_1(q,Q) = \frac{m\omega q^2}{2}\,\mathrm{Ctg}\,Q$, найдите явные выражения для канонической замены $q = q(Q,P)$

$p = p(Q,P)$

и постройте Гамильтониан $\tilde{H}(Q,P)$

б). Решите Гамильтоновы уравнения для P и Q и получите решение для исходных переменных q и p.

в) Найдите производящую функцию $F_3(p,Q)$ для этого канонич. преобр.

Решение:

а) $p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q.$$

Поскольку $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$ в данном примере, то $\tilde{H}$ получается из H простой подстановкой выражений q и p через P и Q:

$$\tilde{H}(Q,P) = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P$$

$\Rightarrow \quad \dot{P} = 0 \quad P = \frac{E}{\omega}$ (E - значение энергии на выбранном решении)

б)

$\dot{Q} = \omega \Rightarrow Q = \omega t + \varphi$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) \\ p(t) &= \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}}$$

в) Для поиска $F_3(p, Q)$, выразим q и P через p и Q:

$$\begin{cases} P = \dfrac{p^2}{2m\omega\cos^2 Q} = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q} \\ q = \sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}}\sin Q = \dfrac{p}{m\omega}\,\mathrm{tg}\,Q = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p} \end{cases}$$

Из 1го равенства:

$$F_3 = -\frac{p^2}{2m\omega}\,\mathrm{tg}\,Q + \Phi(p)$$

Подставляем во второе:

$$-\frac{\partial F_3}{\partial p} = \frac{p}{m\omega}\,\mathrm{tg}\,Q - \frac{d\Phi}{dp} = \frac{p}{m\omega}\,\mathrm{tg}\,Q \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Phi(p) = \mathrm{Const} \Rightarrow \Phi(p) = 0$ можно брать.

Итог: $$\boxed{F_3(p, Q) = -\frac{p^2\,\mathrm{tg}\,Q}{2m\omega}}$$