Классифицирующие пространства

весна 2022

задачи письменного домашнего экзамена (обновленная версия)

решения присылать на `kazarian@mccme.ru` до конца субботы 18 июня

1. Рассмотрим отображение $f : S^2 \vee S^2 \to \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$, индуцированное вложением каждой из сфер букета в качестве 2-мерного клеточного остова сомножителей. Определите гомологии слоя расслоения, гомотопически эквивалентного отображению f. Вычислите отсюда группу $\pi_3(S^2 \vee S^2)$.

2. Вычислите однородные компоненты до степени 5 абстрактного касса У $v = \mathrm{Sq}^{-1}w$, где $\mathrm{Sq} = 1 + \mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^2 + \dots$ — полный квадрат Стинрода и $w = 1 + w_1 + w_2 + \dots$ — полный класс Штиффеля-Уитни.

3. Найдите все соотношения между числами Штиффеля-Уитни (значений мономов от классов Штиффеля-Уитни касательного расслоения на фундаментальном цикле многообразия) n-мерных многообразий при $n = 1, 2, \dots, 5$, вытекающие из теоремы У. Сколько среди возможных строк характеристических чисел линейно независимых для каждого $n \leqslant 5$?

4. Для каждого из приведенных ниже комплексных трехмерных многообразий вычислите набор всех числел Черна (значений мономов от классов Черна касательного расслоения на функдаментальном классе).

а) поективные пространства и их произведения;

б) $H_{2,2}$ — гиперповерхность бистепени $(1, 1)$ в $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$;

в) гиперповерхность степени d в $\mathbb{C}P^4$;

г) проективизация тавтологического расслоения ранга 2 над $G_{2,3} \simeq \mathbb{C}P^2$;

д) коэффициент при x^2y^2 в формальной группе $F(x, y)$ комплексных кобордизмов.

Выберете набор каких-нибудь из них (или их целочисленных комбинаций) в качестве образующих группы $\Omega_6^{\mathbb{C}}$, и выразите через них остальные. Вычислите индексы при вложении целочисленных решеток

$$\langle \mathbb{C}P^3, \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \subset \Omega_6^{\mathbb{C}} \subset \langle p_3, p_2p_1, p_1^3 \rangle, \quad p_k = \frac{\mathbb{C}P^k}{k+1}.$$

(Тот факт, что приведенные выше многообразия порождают группу $\Omega_6^{\mathbb{C}}$, считать известным).

5. Пользуясь формулой Римана-Роха, найдите соотношения делимости для характеристических чисел трехмерных комплексных многообразий. Сравните ответ с ответом предыдущей задачи.

6. Рассмотрим проективное пространство всех кривых степени d на комплексной проективной плоскости (однородными координатами в этом пространстве служат коэффициенты однородного многочлена степени d от трех переменных, задающего кривую). Определите степень подмногообразия в этом проективном пространстве, образованного

а) особыми кривыми;

б) кривыми с каспами (особенностями типа A_2).

Материалы семинаров по курсу «Кассифицирующие пространства»

1 Алгебра Стинрода

Рассмотрим градуированное кольцо многочленов $\mathbb{Z}_2[t_1,\dots,t_n]$, $\deg t_i = 1$, где $n \gg 0$ — фиксированное натуральное число (это — кольцо Z_2-когомологий пространства $P^\infty \times \dots \times P^\infty$, но в данном контексте это не важно). Обозначим через Sq автоморфизм этого кольца, заданный на образующих равенством $\mathrm{Sq}\, t_i = t_i + t_i^2$. Этот автоморфизм неоднородный. Обозначим через Sq^k соответствующие однородные состовляющие: $\mathrm{Sq} = 1 + \mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^2 + \dots$.

Алгебра, порожденная эндоморфизмами Sq^k, называется *алгеброй Стинрода* $A^* = A^0 \oplus A^1 \oplus A^2 \oplus \dots$. Более точно, образующими в этой (ассоциативной некоммутативной) алгебре над $\mathbb{Z}_2$ служат символы $\mathrm{Sq}^1, \mathrm{Sq}^2, \dots$, а соотношениями служат те выражения от образующих, которые задают тривиальные эндоморфизмы кольца многочленов $\mathbb{Z}_2[t_1,\dots,t_n]$ для всех n.

Задача. Положим $u = \omega_n = t_1 \dots t_n$. Покажите, что всякий многочлен вида $a\,u$ делится на u, где $a \in A^*$. Покажите, что A^*u порождено многочленами вида $\mathrm{Sym}\,(t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n})\,u$, где для каждый из показателей k_i имеет вид $2^p - 1$. Выведите отсюда, что в качестве $\mathbb{Z}_2$-базиса в A^* можно взять итерированные операции вида $\mathrm{Sq}^{i_k}\dots\mathrm{Sq}^{i_1}$, где $i_k \geqslant 2i_{k-1}, \dots, i_2 \geqslant 2i_1$.

Мономы от Sq^k такого вида, как в задаче, называются *допустимыми*. Из задачи вытекает, что всякое произведение вида $\mathrm{Sq}^a\mathrm{Sq}^b$ при $a < 2b$ выражается через допустимые. Чтобы сделать это, можно воспользоваться *соотношениями Адема*:

$$\mathrm{Sq}^a\mathrm{Sq}^b = \sum_{c=0}^{\frac{a+b}{3}} C_{b-c-1}^{a-2c}\mathrm{Sq}^{a+b-c}\mathrm{Sq}^c, \qquad a < 2b.$$

Задача. а) Выпишите соотношения Адема для $a+b \leqslant 5$ и докажите их напрямую. b)* Докажите соотношения Адема для произвольных a и b.

Задача. Обозначим $\mathrm{Sq} = 1 + \alpha$. Выразите через допустимые мономы однородные составляющие до степени 5 ряда $(\mathrm{Sq})^{-1} = 1 - \alpha + \alpha\,\alpha - \alpha\,\alpha\,\alpha + \dots$.

Задача. Покажите, что A^* сохраняет подкольцо симметрических многочленов и вычислите $\mathrm{Sq}^k\omega_m$, где ω_m — m-я элементарная симметрическая функция от переменных $t_1,\dots,t_n$. А именно, докажите:

$$\mathrm{Sq}^k\omega_m = \sum_{j=0}^{k} C_{m-k+j-1}^{j}\omega_{k-j}\omega_{m+j}$$

Задача. Вычислите однородные составляющие до степени 5 абстрактного *класса У* $v = \mathrm{Sq}^{-1}\omega$, где $\omega = 1 + \omega_1 + \omega_2 + \dots$.

Обозначим $\mathcal{M} = \mathcal{M}^0 \oplus \mathcal{M}^1 \oplus \dots = \lim\limits_{N} \overline{H}^{N+*}(MO(N), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\omega_1, \omega_2, \dots]\,u$. Пространство $\mathcal{M}$ можно рассматривать как модуль над кольцом $H^*(BO) = \mathbb{Z}_2[\omega_1, \omega_2, \dots]$, где образующей u служит класс Тома. Квадраты Стинрода действуют в $\mathcal{M}$ по правилу

$$\mathrm{Sq}^k\omega_m = \sum_{i=0}^{k} C_{m-k+j-1}^{j}\omega_{k-i}\omega_{m+i}, \qquad \mathrm{Sq}^k u = \omega_k u.$$

Задача. Докажите, что алгебра Стинрода действует свободно в $\mathcal{M}$; укажите какую-нибудь систему свободных образующих этого действия.

Вычисления последней задачи являются центральными для определения гомотопических групп пространств $MO(N)$, а следовательно, для вычисления групп кобордизмов Ω_n. А именно, образующие A^*-модуля $\mathcal{M}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $\mathbb{Z}_2$-образующими групп $\Omega_* = \pi_{N+*}(MO(N))$, $N \to \infty$.

Обозначим через $\mathcal{M}_+ = A^{>0}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ подпространство, порожденное элементами, получаемыми нетривиальными комбинациями квадратов Стинрода. Тогда утверждение предыдущей задачи можно переформулировать следующим образом: *пусть $e_1, e_2, \dots$ — базис над $\mathbb{Z}_2$ векторного пространства $\mathcal{M}/\mathcal{M}_+$. Тогда эти же элементы e_i могут служить свободной системой образующих A^*-модуля $\mathcal{M}$.*

Обозначим через y_i многочлены $\sum t^i$ (выраженные через элементарные симметрические ω_k). Выберем те из них, для которых $i+1$ *не являются степенью двойки.*

Задача. Докажите изоморфизм $\mathcal{M}/\mathcal{M}_+ \cong \mathbb{Z}_2[y_2, y_4, y_5, y_6, y_8, \dots]u$. Таким образом, в качестве системы свободных образующих A^*-модуля $\mathcal{M}$ можно взять всевозможные мономы от y_i.

Квадраты Стинрода Sq^k действуют в $\mathbb{Z}_2$-когомологиях произвольного топологического пространства как стабильные когомологические операции. Через них выражаются классы Штифеля-Уитни векторных расслоений.

Задача. Пусть $E \to X$ — векторное расслоение ранга n. Докажите, что при изоморфизме Тома $t : H^k(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^{n+k}(TE, \mathbb{Z}_2)$ класс Штиффеля-Уитни $\omega_k(E)$ переходит в k-й квадрат Стинрода класса Тома $u = t(1)$,

$$\omega_k(E) \cdot u = \mathrm{Sq}^k u \in H^{k+n}(X, \mathbb{Z}_2).$$

Обратно, квадраты Стинрода выражаются через классы Штифеля-Уитни (в когомологиях многообразий).

Задача. Пусть M — гладкое многообразие. Предположим, что сингулярный цикл, двойственный по Пуанкаре данному классу когомологий $\alpha \in H^*(M, \mathbb{Z}_2)$, представлен гладким собственным отображением $f : N \to M$, $\deg \alpha = \dim M - \dim N$ (т.е. $\alpha = f_* 1$). Докажите, что тогда

$$\mathrm{Sq}^k \alpha = f_* \omega_k(f),$$

где относительные классы Штиффеля-Уитни $\omega_k(f) \in H^*(N, \mathbb{Z}_2)$ отображения f задаются формальным равенством $\omega(f) = \omega(f^*TM - TN) = \frac{f^*\omega(TM)}{\omega(TN)}$. (Указание: рассмотрите сперва случай, когда $N \subset M$ — подмногообразие и f — вложение.)

Классом У $v = 1 + v_1 + v_2 + \dots$ многообразия M называется класс $v = \mathrm{Sq}^{-1}\omega(TM)$. Очевидно, классы Штифеля-Уитни многообразия $\omega_k(TM)$ выражаются через классы У v_i при помощи квадратов Стинрода.

Теорема (формула У). *Пусть M — гладкое компактное многообразие размерности n. Тогда для всякого k гомоморфизм $\mathrm{Sq}^k : H^{n-k}(M, \mathbb{Z}_2) \to H^n(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ совпадает с гомоморфизмом, задаваемым умножением на v_k.*

Формулу У можно применять, в частности, к мономам от классов Штиффеля-Уитни многообразия. Поскольку действие Sq^k на классы Штифеля-Уитни нам известно, из формулы У вытекают универсальные соотношения между характеристическими числами многообразий:

$$(\mathrm{Sq}^k \alpha - v_k \alpha, [M]) = 0$$

для произвольного монома α от классов Штиффеля-Уитни. Например, для всякого 2-мерного многообразия выполняется равенство $\omega_1^2(M) = \omega_2(M)$.

Задача. Найдите соотношения между характеристическими числами n-мерных многообразий при $n = 3, 4, 5$.

Другим способом соотношения между характеристическими числами можно получить следующим способом. Пусть χ — многочлен взвешенной степени n от образующих ω_i. Для всякого замкнутого n-мерного многообразия M обозначим через $\chi_\nu(M)$ соответствующее характеристическое число, в котором в качестве ω_i берутся не касательные, а *нормальные классы Штиффеля-Уитни* $\omega_i(\nu_M)$, определяемые равенством $\omega(\nu_M)\omega(M) = 1$.

Задача. Пусть $\chi\, u \in \mathcal{M}_+$. Докажите, что тогда $\chi_\nu(M) = 0$ для всякого замкнутого многообразия M.

Задача. Докажите, что модуль соотношений между характеристическими числами многообразий, описанный в предыдущей задаче, совпадает с модулем соотношений, вытекаемых из формулы У.

2 Комплексные кобордизмы

Всякий класс комплексных кобордизмов $\Omega_*^{\mathbb{C}}$ представляется целочисленной линейной комбинацией гладких проективных комплексных многообразий.

Два комплексных многообразия представляют один и тот же класс комплексных кобордизмов, если и только если у них совпадают все характеристические числа — значения мономов от классов Черна касательного расслоения на фундаментальном классе. Обратное утверждение верно с точностью до множителя: для всякого вектора значений характеристических чисел некоторое целое кратное этого вектора представляется классом комплексных кообрдизмов.

Для вычисления классов Черна часто бывает удобно пользоваться формулами присоединения:

1) Если $M = \mathbb{C}P^n$, то
$$c(T\mathbb{C}P^n) = (1+t)^{n+1}, \quad t = c_1(O(1)).$$

2) Если $V \subset M$ — гладкая гиперповерхность, заданная как множество нулей сечения линейного расслоения ξ, то
$$c(TV) = \frac{c(TM)}{1+c_1(\xi)}\Big|_V .$$

Например, если $V \subset \mathbb{C}P^n$ — гладкая гиперповерхность степени d, то $c(TV) = \frac{(1+t)^{n+1}}{1+d\,t}$.

Имеется следующий удобный способ собрать вместе и вычислить за одно действие весь набор характеристических числел. Определим *универсальный мультипликативный характеристический класс* M векторного расслоения E следующим образом. Если E ранга 1 с первым классом Черна $t = c_1(E)$, то мы полагаем $M(E) = \xi(t)$, где
$$\xi(u) = 1 + b_1u + b_2u^2 + \dots .$$

Это формальный бесконечный ряд, коэффициенты b_i в котором — независимые переменные. Если же E имеет произвольный ранг n, то мы, в соответствии с принципом расщепления, записываем формально $c(E) = \prod_{i=1}^n (1+t_i)$ и полагаем
$$M(E) = \prod_{i=1}^n \xi(t_i).$$

где однородные слагаемые правой части равенства выражены как многочлены от элементарных симметрических функций $c_k = c_k(E) = \sigma_k(t_1, \dots, t_n)$:
$$M(E) = 1 + b_1c_1 + b_2c_2 + (b_1^2 - 2b_2)c_2 \\ + b_3c_3 + (b_1b_2 - 3b_3)c_1c_2 + (b_1^3 - 3b_1b_2 + 3b_3)c_3 + \dots .$$

Это формальный бесконечный ряд от $c_1, c_2, \dots$, коэффициенты которого лежат в кольце
$$\Omega_*^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[b_1, b_2, \dots]$$

мгогочленов от формальных независимых образующих b_i. Для произвольного компактного комплексного многообразия X мы полагаем
$$\mathrm{Ch}(X) = \int_X M(-TX) \in \Omega_*^{\mathbb{Z}}.$$

Как видно из определения, соответствие Ch (называемое *характером Черна-Дольда*) — это ни что иное, как просто удобный способ сгруппировать характеристические числа для всех возможных мономов степени $n = \dim X$ от классов Черна касательного (или минус касательного) расслоения. Таким образом, Ch задает изоморфизм кольца $\Omega_*^{\mathbb{Z}}$ с подкольцом в $\Omega_*^{\mathbb{C}} \otimes \mathbb{Q}$, порожденным линейными комбинациями классов комплексных кобордизмов с рациональными коэффициентами, у которых все характеристические числа целые (откуда и произошло обозначение для этого кольца). Имея ввиду этот изоморфизм, мы в дльнейшем будем часто отождествлять классы кобордизмов комплексных многообразий и их образы в $\Omega_*^{\mathbb{Z}}$.

Задача. Докажите, что $\mathrm{Ch}(X_1 \sqcup X_2) = \mathrm{Ch}(X_1) + \mathrm{Ch}(X_2)$, $\mathrm{Ch}(X_1 \times X_2) = \mathrm{Ch}(X_1)\mathrm{Ch}(X_2)$, иными словами $\mathrm{Ch} : \Omega_*^{\mathbb{C}} \to \Omega_*^{\mathbb{Z}}$ — кольцевой гомоморфизм.

Утверждение. *Для всякого n все характеристические числа проективного пространства $\mathbb{C}P^n$ делятся на $n+1$. Более того, классы $p_k = \frac{[\mathbb{C}P^k]}{k+1}$ свободно порождают кольцо $\Omega_*^{\mathbb{Z}}$. А именно, соответствие между наборами образующих $b_1, b_1, \ldots$ и $p_1, p_2, \ldots$ задается следующим условием: ряды*

$$u\,\xi(u) = u + b_1u^2 + b_2u^3 + \ldots$$

и

$$g(x) = x + p_1x^2 + p_2x^3 + \ldots$$

формально обратны друг другу: $x = u\,\xi(u) \Leftrightarrow u = g(x)$.

Доказательство состоит в следующей несложной выкладке, осованной на свойстве инвариантности вычета мероморфной 1-формы. Из равенства $c(T\mathbb{C}P^n) = (1+u)^{n+1}$, где $u = c_1(O(1))$, мы находим $M(-T\mathbb{C}P^n) = \frac{1}{\xi(t)^{n+1}}$, и поэтому

$$\mathrm{Ch}(\mathbb{C}P^n) = \int_{\mathbb{C}P^n} M(-T\mathbb{C}P^n) = [u^n]\frac{1}{\xi(u)^{n+1}} = \operatorname*{res}_{u=0} \frac{du}{(u\,\xi(u))^{n+1}}$$
$$= \operatorname*{res}_{x=0} \frac{g'(x)dx}{x^{n+1}} = [x^n]g'(x).$$

Следовательно, $g'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}P^n x^n$, и значит, $g(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{C}P^n}{n+1} x^{n+1}$.

Пусть $H_{k,l}$ — гладкая гиперповерхность бистепени $(1,1)$ в $\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^l$.

Задача. Пользуясь трюком с инвариантностью вычета, выразите $H_{k,l}$ через проективные пространства в кольце $\Omega_*^{\mathbb{Z}}$. (Ответ:

$$\sum_{k,l} H_{k,l}x^ky^l = g^{-1}(g(x)+g(y))\ g'(x)\ g'(y),$$

где $g^{-1}(u) = u\,\xi(u)$ — ряд, формально обратный к ряду $g(x)$.)

Формальный ряд из ответа предыдущей задачи

$$F(x,y) = g^{-1}(g(x)+g(y)) = \frac{\sum_{k,l=0}^{\infty} H_{k,l}x^ky^l}{(1+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{C}P^kx^k)(1+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{C}P^ky^k)}$$

называется *формальной группой комплексных кобордизмов*, а ряд $g(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{C}P^n}{n+1}x^n$ — *логарифмом* этой формальной группы. $F(x,y)$ — это бесконечный формальный ряд от переменных x и y, коэффициенты которого рассматриваются как элементы кольца $\Omega_*^{\mathbb{Z}}$. Как видно из второго равенства, коэффициенты этого ряда представлены, в действительности, классами настоящих многообразий, т.е. лежат в меньшем кольце $\Omega_*^{\mathbb{C}} \subset \Omega_*^{\mathbb{Z}}$.

Теорема. *Кольцо $\Omega_*^{\mathbb{C}}$ комплексных кобордизмов порождается коэффициентами формальной группы $F(x,y)$. Оно изоморфно кольцу многочленов с одной образующей в каждой четной размерности.*

Таким образом, образующие кольца $\Omega_*^{\mathbb{C}}$ можно выбирать из числа проективных пространств и многообразий вида $H_{k,l}$. Группа $\Omega_{2n}^{\mathbb{C}}$ — целочисленная решетка (свободная абелева группа), ранг которой равен числу разбиений числа n, и имеют место включения

$$\mathbb{Z}[\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^2, \dots] \subset \Omega_*^{\mathbb{C}} \subset \Omega_*^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[\tfrac{\mathbb{C}P^1}{2}, \tfrac{\mathbb{C}P^2}{3}, \dots].$$

Оба включения строгие. В частности, у характеристических чисел комплексных многообразий имеется большое количество соотношений типа делимости. Последняя теорема позволяет находить эти соотношения и определить, какие из линейных комбинаций мономов от $p_k = \frac{\mathbb{C}P^k}{k+1}$ представляются несвязными объединениями настоящих комплексных многообразий (со знаками).

Еще один источник соотношений делимости для характеристических чисел комплексных многообразий — формула Хирцебруха-Римана-Роха, частный случай формулировки которой мы приведём без подробных комментариев и объяснений. Пусть задано комплексное расслоение ранга n с корнями Черна $t_1, \dots, t_n$, то есть мы положили формально $c(E) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i)$.

Определение. *Характером Черна* $\mathrm{ch}(E)$ и *классом Тодда* $\mathrm{td}(E)$ расслоения E называются характеристический классы, выраженные следующими симметрическими функциями от корней Черна:

$$\mathrm{ch}(E) = \sum_{i=1}^n e_i^t = n + c_1 + (c_1^2 - 2c_2)/2 + (c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3)/6 + \dots$$
$$\mathrm{td}(E) = \prod_{i=1}^n \frac{t_i}{1 - e^{-t_i}} = 1 + c_1/2 + (c_1^2 + c_2)/12 + c_1c_2/24 + \dots$$

Однородные компоненты обоих классов выражены многочленами от классов Черна $c_k = c_k(E)$ и лежат в когомологиях базы расслоения с рациональными коэффициентами.

Теорема(одно из следствий теоремы Римана-Роха). *Для всякого комплексного мнообразия X и всякого комплексного векторного расслоения E на нем величина*

$$\chi(E) = \int_M \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{td}(TM)$$

является целым числом.

Выбирая в качестве E различные тензорные расслоениия, ассоциированные с касательным, мы получаем большое количество соотношений делимости. Запас соотношений делимости, вытекающих из формулы Римана-Роха, совпадает с запасом соотношений делимости, вытекающих из структуры формальной группы.

3 Многочлены Тома

Критическая точка гладкого отображения многообразий — это точка, в которой ранг дифференциала не является максимально возможным. Критические точки классифицируются по их локальным типам. Многочлен Тома — это универсальный характеристический класс, представленный как многочлен от классов Черна (в комплексной ситуации) или Штиффеля-Уитни (в вещественной ситуации) отображаемых многообразий, и выражающий класс когомологий, двойственный множеству точек, в которых отображение имеет тот или иной тип. Имеется несколько возможностейдля классификации критических точек по типам. В самом грубом определении, тип особенности — это подмножествао пространства k-струй отображений, инвариантное относительно действия группы Ли k-струй замен переменных в прообразе и образе. Мы будем рассматривать, для определенности, голоморфные отображения комплексных многообразий, а типы особенностей считать заданными алгебраическими условиями. В этом случае подмножество точек данного типа имеет естественный фундаментальный класс и двойственный ему класс когомологий корректно определен.

Пример. Простейшими примерами типов особенностей являются складки и сборки. Пусть имеется голоморфное отображение $f : X \to Y$, $m = \dim X \geqslant n = \dim Y$. *Складкой* отображения f (в других обозначениях, A_1) называется множество критических точек, т.е. подмногобразие точек в

X, в которых производная имеет немаксимальный ранг. *Сборкой* отображения f (в других обозначениях, A_2) называется множество критических точек ограничения отображения f на поверхность сборки.

Теорема. *Многочлены Тома для складок и сборок в случае* $m = n$ *равны*

$$[A_1] = c_1, \qquad [A_2] = c_1^2 + c_2.$$

Многочлены Тома для складок и сборок в случае $m = n + 1$ *равны*

$$[A_1] = c_1^2 - c_2, \qquad [A_2] = 2\,c_1(c_1^2 - c_2),$$

соответственно. В обоих случаях c_k — *относительные классы Черна,* $c_k = c_k(f^*TX - TY)$.

Задача. Пусть $S \subset \mathbb{C}P^3$ — поверхность степени d общего положения. Определите степень параболической кривой на ней.

Решение. Тип точки на поверхности в прективной дифференциальной геометрии задается типом особенности кривой, высекаемой на поверхности касательной плоскостью. В общей точке этот тип — нодальная особенность (A_1), трансверсальное пересечение двух гладких ветвей. В параболических точках эта особенность — полукубический касп (A_2). В другой интерпретации можно определить параболическую кривую как особенность сборки отображения $X^4 \to Y^3$, определенного ниже. А именно, многообразие X образовано парами (точка на поверхности, плоскость в $\mathbb{C}P^3$, проходящая через эту точку), а Y — двойственное проективное пространство $\check{\mathbb{C}P}^3$, образованное гиперплоскостями в $\mathbb{C}P^3$. Отображение f состоит в забывании точки у пары.

По построению, X, как подмногообразие в $\mathbb{C}P^3 \times \check{\mathbb{C}P}^3$, задается двумя условиями: «точка лежит на поверхности» и «точка инцидентна гиперплоскости». Поэтому

$$c(TX) = \tfrac{(1+t)^4(1+h)^4}{(1+d\,t)(1+t+h)}, \qquad c(TY) = (1+h)^4,$$

где $t = c_1(O_{\mathbb{C}P^3}(1))$, $h = c_1(O_{\check{\mathbb{C}P}^3}(1))$. Отсюда находим относительныые классы Черна отображения:

$$c(f) = c(TY - TX) = \tfrac{(1+d\,t)(1+t+h)}{(1+t)^4} = 1 + (d-3)t + h + (d-4)ht - 3(d-2)t^2 + \cdots .$$

Однородные классы в этом разложении — это и есть те самые классы c_k, которые нужно подставлять в многочлен Тома. Находим

$$\begin{aligned}[A_2] &= 2c_1(c_1^2 - c_2) \\ &= 2\left(2d^2 - 8d + 9\right)ht^2 + 2(d-3)\left(d^2 - 3d + 3\right)t^3 + 2(2d-5)h^2t + 2h^3.\end{aligned}$$

Мы определили класс кривой параболических точек как подмногообразия в X. Нам же нужен класс образа этой кривой при композиции отображений $X \hookrightarrow \mathbb{C}P^3 \times \check{\mathbb{C}P}^3 \to \mathbb{C}P^3$. Поэтому класс параболической кривой, как подмногообразия в $\mathbb{C}P^3$, равен коэффициенту при h^3 в классе образа этой кривой в $\mathbb{C}P^3 \times \check{\mathbb{C}P}^3$, то есть

$$[h^3]\,dt\,(t+h)\,2c_1(c_1^2 - c_2) = 4d(d-2)t.$$

Таким образом, степень параболической кривой равна $4d(d-2)$.