

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2022
ЛИСТОК 14

1. Докажите, что $\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\alpha}{2^k} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$. Подсказка: сначала докажите тождество

$$\sin \alpha = 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}.$$

2. Докажите, что

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \dots = \frac{\pi}{2}.$$

3. Докажите следующие разложения в бесконечные произведения:

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right), \quad \cos z = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

4. Докажите равенства

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} = \frac{1}{4}.$$

5. Докажите равенство

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(это равенство называется формулой Валлиса).