

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО 2022  
ЛИСТОК 12

Пусть задан параметр  $\tau \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im } \tau > 0$ ; определим эллиптическую кривую  $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$  и тэта-функцию с характеристиками  $a, b$  рядом

$$\theta_{a,b}(u) = \theta_{a,b}(u, \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{(k+a)^2} e^{2\pi i(k+a)(u+b)}, \quad q = e^{i\pi\tau},$$

а также введем тэта-функции Якоби

$$\theta_1(u) = -\theta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(u), \quad \theta_2(u) = \theta_{\frac{1}{2}, 0}(u), \quad \theta_3(u) = \theta_{0, 0}(u), \quad \theta_4(u) = \theta_{0, \frac{1}{2}}(u).$$

**1.** Докажите, что ряд абсолютно сходится на  $\mathbb{C}$ , и тэта-функции являются целыми функциями, причем  $\theta_1$  – нечетная, а  $\theta_2, \theta_3, \theta_4$  – четные функции.

**2.** Докажите, что  $\theta_2(u) = \theta_1(u + \frac{1}{2})$ ,  $\theta_3(u) = e^{\pi i(u+\tau/4)}\theta_1(u + \frac{\tau+1}{2})$ ,  $\theta_4(u) = -ie^{\pi i(u+\tau/4)}\theta_1(u + \frac{\tau}{2})$ .

**3.** Докажите следующие свойства тэта-функции при сдвигах на векторы решетки  $1, \tau$ :

$$\begin{cases} \theta_1(u+1) = -\theta_1(u) \\ \theta_1(u+\tau) = -q^{-1}e^{-2\pi iu}\theta_1(u). \end{cases}$$

**4.** Найдите нули функций  $\theta_1(u), \theta_2(u), \theta_3(u), \theta_4(u)$  и покажите, что они простые.

**5.** Докажите, что тэта-функции удовлетворяют “уравнению теплопроводности”  $4\pi i \partial_\tau \theta = \partial_u^2 \theta$ .

**6.** Покажите, что если для набора  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  выполняется  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ , то при любых  $a_i \in E_\tau$

$$f(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial_u \theta_1(u - a_i)}{\theta_1(u - a_i)}$$

является эллиптической (т.е. двойкопериодической) функцией на  $\mathbb{C}$  с периодами  $1, \tau$ .

**7.** Покажите, что  $P(u) = \partial_u^2 \log \theta_1(u)$  является эллиптической функцией на  $\mathbb{C}$  с периодами  $1, \tau$  и найдите ее полюса.

**8.** Докажите тождество

$$\begin{aligned} \theta_1(a+b)\theta_1(a-b)\theta_1(u+c)\theta_1(u-c) + \theta_1(b+c)\theta_1(b-c)\theta_1(u+a)\theta_1(u-a) \\ + \theta_1(c+a)\theta_1(c-a)\theta_1(u+b)\theta_1(u-b) = 0. \end{aligned}$$

9. Докажите тождество

$$P(u) - P(v) = (\theta_1'(0))^2 \frac{\theta_1(u-v)\theta_1(v+u)}{\theta_1^2(u)\theta_1^2(v)}.$$

10. Докажите следующие представления тэта-функций в виде бесконечных произведений:

$$\theta_1(u) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin(\pi u) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n}e^{2\pi i u})(1 - q^{2n}e^{-2\pi i u}),$$

$$\theta_2(u) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos(\pi u) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n}e^{2\pi i u})(1 + q^{2n}e^{-2\pi i u}),$$

$$\theta_3(u) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}e^{2\pi i u})(1 + q^{2n-1}e^{-2\pi i u}),$$

$$\theta_4(u) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1}e^{2\pi i u})(1 - q^{2n-1}e^{-2\pi i u}).$$

11. Докажите тождество  $\theta_1'(0) = \pi\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)$ .

12. Докажите формулы модулярного преобразования  $\tau \rightarrow -1/\tau$ :

$$\theta_1(u/\tau, -1/\tau) = -i\sqrt{-i\tau}e^{\pi i u^2/\tau}\theta_1(u, \tau),$$

$$\theta_2(u/\tau, -1/\tau) = \sqrt{-i\tau}e^{\pi i u^2/\tau}\theta_4(u, \tau),$$

$$\theta_3(u/\tau, -1/\tau) = \sqrt{-i\tau}e^{\pi i u^2/\tau}\theta_3(u, \tau),$$

$$\theta_4(u/\tau, -1/\tau) = \sqrt{-i\tau}e^{\pi i u^2/\tau}\theta_2(u, \tau).$$