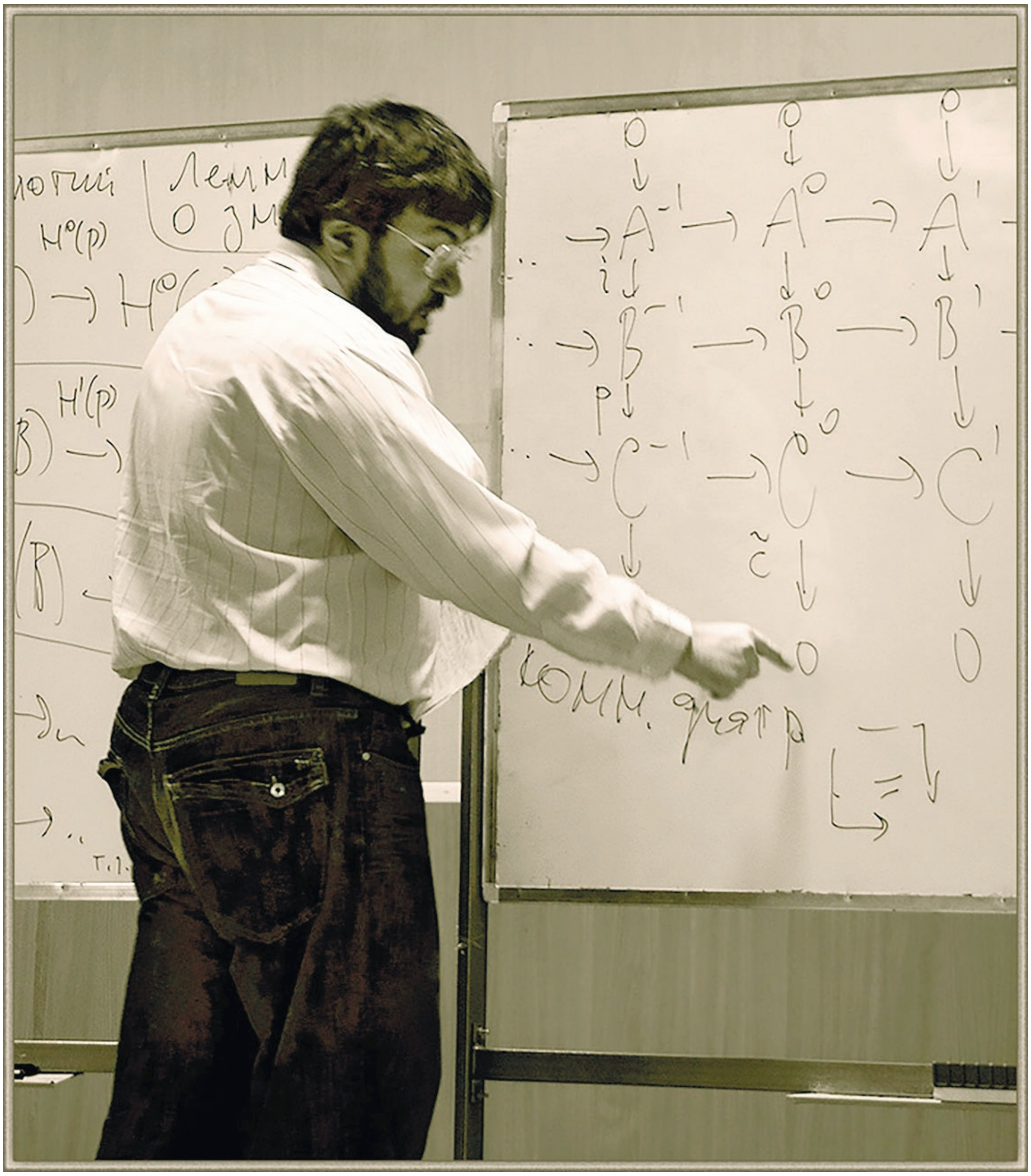
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

КУРСЫ И СЕМИНАРЫ ПО ВЫБОРУ ПРЕДЛАГАЕМЫЕ В 2021/22 УЧЕБНОМ ГОДУ СТУДЕНТАМ ФАКУЛЬТЕТА МАТЕМАТИКИ



МОСКВА

8 ФЕВРАЛЯ 2022 Г.

Содержание

(*primary* and advanced level curses are in *italic* and regular shape respectively)

Курсы на выбор студентов

Все занятия на факультете математики формально делятся на «курсы», «семинары» и «проекты». Деление вызвано имеющимися в НИУ ВШЭ ограничениями на число занятий каждого типа с одной стороны и число студентов на этих занятиях с другой. Уточнять, сколько курсов, семинаров и проектов может быть в Вашем учебном плане, следует в учебной части. Обратите внимание, что формальный статус «курса», «семинара» или «проекта» может не иметь никакого отношения к стилю проведения занятий. О реальном соотношении лекций, упражнений, докладов участников и т. п. и их влиянии на итоговую отметку читайте на странице с аннотацией предмета.

В представленных ниже таблицах **толстым шрифтом** набраны «толстые» предметы с нагрузкой две пары в неделю и оцениваемые в 6 кредитов за семестр[1]. Остальные, «тонкие» предметы идут одну пару в неделю и оцениваются в 3 кредита за семестр. Английское название предмета всегда означает, что он преподаётся на английском языке. У некоторых таких занятий кроме английской аннотации имеется ещё и русская, к ней ведёт отдельная гиперссылка. По уровню предполагаемой от участников предварительной подготовки занятия делятся на *начальные*[2], не слишком опирающиеся на другие курсы, и специальные[3], рассчитанные на тех, кто уже что-то знает в данной области. Пометка типа «2+» означает, что занятия ориентированы[4] на студентов второго года обучения и старше.

Эпитеты «простой» и «трудный» добавлены по просьбам студентов и выражают субъективную оценку[5] усилий, которые придётся приложить для освоения предмета. Эта характеристика не имеет чёткого формального определения и мало коррелирует с тем, на студентов какого года рассчитан курс, а также является ли он начальным или более продвинутым в той или иной линейке курсов. Бывают как «трудные» занятия для начинающих, вполне доступные первокурсникам, так и «простые» спецкурсы, предполагающие владение материалом первых трёх лет бакалавриата.

Эпитеты «дистанционный» и «аудиторный» означают, что вне зависимости от пожеланий участников все занятия и контрольные мероприятия будут проходить только дистанционно (online) или только в аудиториях факультета (offline), если последнее не будет противоречить противоэпидемическим нормам. Отсутствие эпитетов «дистанционный» или «аудиторный» означает, что организаторы занятий в принципе готовы на любую — как дистанционную, так и аудиторную — форму проведения занятий.

Эпитет «межкампусный» означает, что в занятиях могут принимать участие студенты не московских кампусов НИУ ВШЭ. Как это будет реализовано технически, пока не вполне понятно, однако «межкампусность» курса никак не коррелирует с тем, в какой форме — аудиторной или дистанционной — будут проводиться занятия.

[1] Если «толстый» предмет продолжается меньше семестра (например один модуль), то он, как правило, оценивается в 3 кредита, однако возможны исключения — уточняйте это на странице с описанием курса. Обязательные «толстые» семестровые курсы магистратуры, взятые студентами бакалавриата в качестве спецкурсов, дают 5 кредитов.

[2] Названия этих занятий набраны в оглавлении *курсивом*.

[3] Названия таких занятий набраны в оглавлении прямым шрифтом.

[4] По мнению организаторов и академического руководства учебных программ. Это мнение имеет рекомендательный характер и не означает никаких формальных ограничений на выбор данного предмета студентами младших курсов.

[5] Основанную на мнениях студентов прошлых лет, организаторов занятий и академического руководства программ.

Курсы начального уровня

Пререквизиты к этим курсам не выходят за рамки первых двух лет бакалавриата. Они рекомендуются студентам младших курсов[1] как введения в те разделы математики, где планируется дальнейшая специализация, а также старшекурсникам, желающим расширить математический кругозор в областях, выходящих за рамки выбранной специализации. В «Содержании» на стр. 2–5 ссылки на описания курсов начального уровня набраны *курсивом*.

ЗАНЯТИЯ, ДОСТУПНЫЕ ПЕРВОКУРСНИКАМ

ОСЕНЬ

- Основные понятия математики, простой НИС 1[2], Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.
- Проективная алгебраическая геометрия, простой межкампусный дист. НИС 1+, А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин.
- Геометрия и динамика, простой межкампусный НИС 1+, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, В. А. Тиморин.
- **Алгебра в криптографии, простой межкампусный курс 1+, В. А. Кириченко.**
- Графы на поверхностях, простой межкампусный курс 1+, Н. Я. Амбург.
- **Теория Кодирования как введение в Алгебру и Арифметику, простой межкампусный аудит. НИС 1+, В. А. Гриценко.**
- Элементы математической логики, простой межкампусный курс 1+, А. В. Кудинов.
- Наглядная геометрия, простой межкампусный аудит. НИС 1+, М. Б. Скопенков.

ВЕСНА

- Основные понятия математики, простой НИС 1[2], Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.
- Проективная алгебраическая геометрия, простой межкампусный дист. НИС 1+, А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин.
- Геометрия и динамика, простой межкампусный НИС 1+, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, В. А. Тиморин.
- Геометрия и группы, простой аудит. НИС 1+, О. В. Шварцман.
- Математика физических явлений, простой межкампусный аудит. НИС 1+, П. И. Арсеев.
- Избранные главы дискретной математики, простой межкампусный аудит. НИС 1+, И. В. Артамкин, Н. Я. Амбург.

[1] В частности, большинство этих курсов подойдут второкурсникам в качестве «антимайноров».

[2] Этот курс могут брать только студенты первого курса бакалавриата.

ЗАНЯТИЯ, ДОСТУПНЫЕ ВТОРОКУРСНИКАМ, И «АНТИМАЙНОРЫ»

ОСЕНЬ

∘ Множества и модели, простой межкампусный дист. НИС 2+, В. Б. Шехтман.

∘ **Geometric introduction to algebraic geometry, simple inter-campus online RS 2+, A. S. Tikhomirov, описание на русском.**

∘ Введение в теорию пучков, трудный межкампусный аудит. НИС 2+, А. С. Хорошкин.

∘ **Introduction to algebraic number theory, simple inter-campus course 2+, A. B. Kalmynin, описание на русском.**

∘ **Diophantine approximations, fractal geometry of Cantor sets and dynamics, simple inter-campus online course 2+, K. M. S. Santos[1].**

∘ Introduction to Galois theory, simple inter-campus online course 2+, N. S. Markarian, описание на русском.

∘ **Введение в алгебраическую топологию, простой межкампусный курс 2+, М. Э. Казарян.**

∘ **Introduction to Functional Analysis, simple inter-campus offline course 2+, A. Yu. Pirkovskii, описание на русском.**

∘ Комбинаторика, теория представлений и алгебраическая геометрия, трудный проект 2+, Б. Л. Фейгин.

∘ **Линейное программирование, простой межкампусный курс 2+, А. В. Колесников.**

ВЕСНА

∘ Неклассические логики, простой межкампусный НИС 2+, А. В. Кудинов.

∘ **Introduction to commutative algebra, simple inter-campus course 2+, A. B. Pavlov, описание на русском.**

∘ **Introduction to category theory and homological algebra, simple inter-campus course 2+, C. Brav.**

∘ **Введение в дифференциальную геометрию, простой межкампусный курс 2+, П. Е. Пушкарь.**

∘ **Многообразия Дубровина – Фробениуса, простой межкампусный аудит. НИС 2+, А. А. Басалаев, П. И. Дунин–Барковский.**

∘ **Введение в римановы поверхности, простой межкампусный аудит. курс 2+, С. К. Ландо.**

∘ **Критические точки функций и их приложения, простой межкампусный курс 2+, В. А. Васильев.**

∘ Основные приложения математики, простой межкампусный НИС 2+, Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.

∘ Теория кодирования и целочисленные решетки, простой межкампусный дист. проект 2+, В. А. Гриценко.

[1] Learning load: module 1, two classes per week, 3 credits.

Специальные курсы и семинары

Эти занятия предназначены для более глубокого изучения тех разделов, по которым планируется дальнейшая специализация. В «Содержании» на стр. 2–5 они набраны прямым шрифтом.

Годовые студенческие научные семинары

Осень

- Теория представлений, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Б. Л. Фейгин, Л. Г. Рыбников.
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, А. Ю. Пирковский.
- Combinatorics of Vassiliev invariants, advanced inter-campus RS 3+, M. E. Kazarian.
- Динамические системы, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.
- Современные проблемы математической логики, простой межкампусный НИС 3+, Д. С. Шамканов, А. В. Кудинов, В. Б. Шехтман, Л. Д. Беклемишев.
- Геометрия дифференциальных уравнений, простой межкампусный аудит. НИС 3+, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.
- Representations and Probabilities, advanced inter-campus RS 3+, A. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski.
- Stochastic analysis and its applications in economics, advanced inter-campus RS 3+, A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov, описание на русском.

Весна

- Теория представлений, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Б. Л. Фейгин, Л. Г. Рыбников.
- Функциональный анализ и некоммутативная геометрия, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, А. Ю. Пирковский.
- Combinatorics of Vassiliev invariants, advanced inter-campus RS 3+, M. E. Kazarian.
- Динамические системы, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.
- Современные проблемы математической логики, простой межкампусный НИС 3+, Д. С. Шамканов, А. В. Кудинов, В. Б. Шехтман, Л. Д. Беклемишев.
- Геометрия дифференциальных уравнений, простой межкампусный аудит. НИС 3+, И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.
- Representations and Probabilities, advanced inter-campus RS 3+, A. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski.
- Stochastic analysis and its applications in economics, advanced inter-campus RS 3+, A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov, описание на русском.

Спецкурсы (начало)

Осень

- **Группы и алгебры Ли, простой межкампусный аудит. курс 3+, Л. Г. Рыбников, А. С. Хорошкин.**
- **Introduction to algebriac numbers and class field theory, advanced inter-campus RS 3+, V. S. Zhgoon, описание на русском.**
- Algebraic geometry, Fall Term, advanced inter-campus offline RS 3+, M. V. Finkelberg.
- Derived Categories of Coherent Sheaves , advanced inter-campus offline RS 3+, A. B. Pavlov.
- Introduction to motives, advanced inter-campus offline RS 3+, V. A. Vologodsky.
- Многогранники Ньютона и инварианты алгебраических многообразий, простой межкампусный НИС 3+, С. М. Гусейн-Заде.
- Дополнительные главы римановой геометрии, трудный межкампусный НИС 3+, В. О. Медведев.

Весна

- Poisson Lie Groups, simple inter-campus RS 3+, I. Marshall.
- **Introduction to algebraic groups and invariant theory, advanced inter-campus course 3+, V. S. Zhgoon, описание на русском.**
- **Algebraic geometry, Spring Term, advanced inter-campus offline RS 3+, M. V. Finkelberg.**
- **An introduction to surgery theory and its applications to complex and topological manifolds, advanced inter-campus offline RS 3+, A. G. Gorinov, V. S. Zhgoon, описание на русском.**
- **Hodge theory and topology I, advanced RS 3+, V. A. Lunts, описание на русском.**
- **Hodge theory and topology II, advanced RS 3+, V. A. Lunts, описание на русском.**
- **Классифицирующие пространства, трудный межкампусный аудит. курс 3+, М. Э. Казарян.**
- **Functional Analysis 2 (Operator Theory), advanced inter-campus offline course 3+, A. Yu. Pirkovskii, описание на русском.**

СПЕЦКУРСЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

ОСЕНЬ

∘ **Symplectic Geometry, advanced RS 3+, M. S. Verbitsky[1], описание на русском.**

∘ **Комплексная геометрия, трудный межкампусный аудит. курс 3+, А. В. Пенской.**

∘ **An introduction to cobordism theory, advanced offline RS 3+, S. A. Abramyan, A. G. Gorinov, описание на русском.**

∘ Конформная теория поля и теория представлений, трудный проект 3+, Б. Л. Фейгин.

∘ **Cluster Poisson varieties, simple inter-campus offline project 3+, V. G. Gorbounov, описание на русском.**

∘ Markov Chains, simple inter-campus offline course 3+, A. Dymov, A. S. Skripchenko, описание на русском.

∘ Introduction to Ergodic Theory, simple inter-campus RS 3+, M. L. Blank, описание на русском.

∘ **Введение в методы статистики, простой межкампусный аудит. курс 3+, А. В. Хохлов.**

∘ **Mathematical methods of science, simple inter-campus online RS 3+, A. S. Tikhomirov, 5 credits[3].**

∘ **Прикладные методы анализа, простой межкампусный НИС 3+, А. И. Щёчкин, 5 кредитов[4].**

∘ Elliptic integrals and elliptic functions, simple inter-campus RS 3+, T. Takebe, описание на русском.

∘ **Гамильтонова механика, простой межкампусный аудит. курс 3+, В. А. Побережный.**

ВЕСНА

∘ **Introduction to symplectic geometry, moment maps, localisation, and integrability, advanced inter-campus online course 3+, описание на русском.** A. Yu. Alekseev, I. Marshall

∘ **Analysis of several complex variables, simple inter-campus project 3+, A. A. Glutsyuk, описание на русском.**

∘ **Введение в квантовую теорию, простой межкампусный аудит. НИС 3+, В. В. Лосяков, П. Г. Гавриленко.**

∘ **Introduction to string topology, advanced inter-campus RS 3+, C. Brav, A. G. Gorinov.**

∘ Введение в некоммутативную комбинаторную алгебру, простой межкампусный аудит. НИС 3+, Д. И. Пионтковский.

∘ **Smooth representations of totally disconnected groups, advanced inter-campus offline project 3+, M. Z. Rovinsky.**

∘ **Topological data analysis. Persistent homology , simple inter-campus offline RS 3+, V. G. Gorbounov, описание на русском.**

∘ **Stochastic calculus for finance, simple inter-campus online course 3+, C. Bernardin[2].**

∘ Introduction to the theory of random processes, simple inter-campus RS 3+, M. L. Blank, описание на русском.

∘ **Математика для прагматика, простой межкампусный курс 3+, А. В. Хохлов.**

∘ **Основы вариационного исчисления и теории оптимального управления, простой межкампусный НИС 3+, Е. О. Степанов.**

∘ **Уравнения с частными производными, трудный межкампусный аудит. курс 3+, С. В. Шапошников.**

∘ **Введение в теорию интегральных уравнений, простой межкампусный аудит. НИС 3+, А. К. Погребков.**

∘ **Integrable systems as systems of PDEs with an infinite dimensional algebra of symmetries, advanced inter-campus RS 3+, A. Yu. Buryak, описание на русском.**

---

[1] Курс на русском с учебными материалами на английском, с 4 сентября по 3 ноября, 4 пары в неделю, 5 кредитов. The course in Russian with the printed matter and slides in English. Learning load: from September 4 to November 3, four classes per week, 5 credits.

[2] Learning load: module 4, two classes per week, 3 credits.

[3] This course is required for graduate students in profile «Mathematics». It is called «Mathematical Methods of Science» in the official «РУП» of MSc program. Other students, including the undergraduate, may take this course as a special course contributing 5 credits.

[4] Этот курс обязателен для студентов магистратуры, обучающихся по профилю «математическая физика», и входит в официальный РУП магистратуры под названием «Математические методы естествознания». Все остальные студенты, включая студентов бакалавриата, могут взять этот курс в качестве спецкурса по выбору стоимостью 5 кредитов.

СПЕЦКУРСЫ (ОКОНЧАНИЕ)

ОСЕНЬ

◦ **Математические основы квантовой механики, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, П. А. Сапонов, П. Н. Пятов.**
◦ **Квантовая механика, трудный курс 3+, В. В. Лосяков, А. Г. Семёнов.**
◦ Функциональный интеграл, простой межкампусный аудит. проект 3+, А. Г. Семёнов.

ВЕСНА

◦ **Группа кос, квантовые группы и приложения, простой межкампусный аудит. курс 3+, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов.**
◦ **Элементы стохастической динамики, простой межкампусный аудит. НИС 3+, А. С. Ильин.**
◦ **Квантовая теория поля, трудный межкампусный аудит. НИС 3+, А. Г. Семёнов.**
◦ Математика процессов в ранней вселенной и задачи гравитации., простой межкампусный аудит. проект 3+, К. П. Зыбин.

Нематематические курсы, читаемые на факультете математики

Эти курсы читаются сотрудниками других факультетов и предназначены тем, кто хочет изучить те или иные области за пределами математики. Курсы программирования на Python, эконометрики и машинного обучения не учитываются в ограничении на суммарное число нематематических курсов в ИУП. Все остальные курсы учитываются в этом ограничении наравне с курсами, читаемыми на других факультетах ВШЭ.

КУРСЫ, ЧИТАЕМЫЕ ПРЕДСТАВИТЕЛЯМИ ДРУГИХ ФАКУЛЬТЕТОВ

ОСЕНЬ

◦ **Введение в лингвистику, трудный межкампусный курс 3+, Б. Л. Иомдин.**
◦ **Избранные главы математической экономики, трудный межкампусный НИС 3+, М. И. Левин.**

ВЕСНА

◦ **Основы Эконометрики, трудный межкампусный НИС 3+, И. Б. Воскобойников.**
◦ **Машинное обучение, трудный межкампусный курс 3+, И. В. Щуров.**
◦ Непараметрика и другие сюжеты статистики, трудный курс 3+, Д. С. Шмерлинг.

Курсы для тех, кто увлёкся приложениями математики

Студентам, у которых курсовая или выпускная квалификационная работа посвящена приложениям математики, рекомендуется включить в свой ИУП следующие из перечисленных выше курсов:

КУРСЫ, ОРИЕНТИРОВАННЫЕ НА ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

ОСЕНЬ

◦ **Введение в методы статистики, простой межкампусный аудит. курс 3+, А. В. Хохлов.**

ВЕСНА

◦ **Математика для прагматика, простой межкампусный курс 3+, А. В. Хохлов.**
◦ **Машинное обучение, трудный межкампусный курс 3+, И. В. Щуров.**
◦ **Stochastic calculus for finance, simple intercampus online course 3+, C. Bernardin.**

Физико-математические курсы партнёров факультета

Курсы НОЦ МИАН

В Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН (МИАН) реализуется научно-образовательная программа МЦМУ МИАН (НОЦ МИАН). Её целью является подготовка сильных студентов, желающих заниматься математикой и физикой на профессиональном уровне. Ведущие учёные читают специальные курсы и ведут исследовательские семинары по основным математическим и физическим дисциплинам. Занятия проходят в вечернее время в здании МИАН, как правило, начиная с 18^{00}. Экзамены принимаются после окончания каждого семестра. Студенты и аспиранты математического факультета НИУ ВШЭ могут включать курсы и семинары НОЦ МИАН в свой ИУП. Каждый сданный *курс* НОЦ МИАН оценивается в 5 кредитов, каждый сданный *семинар* — в 4 кредита. Расписание НОЦ МИАН в осеннем семестре 2021/22 учебного года см. на www.mi-ras.ru/index.php?c=noc2122_1, в весеннем семестре — на www.mi-ras.ru/index.php?c=noc2122_2.

Курсы СКОЛТЕХА

Студенты и аспиранты математического факультета НИУ ВШЭ могут включать в свой ИУП курсы магистерской программы «Mathematical and Theoretical Physics» в SkolTech. Каждый из этих курсов оценивается в 3 кредита. Учебный план программы см. на сайте https://crei.skoltech.ru/cas/education/mscprog/curriculum-21-23/, более подробное описание курсов можно посмотреть в docx-файле по ссылке https://www.dropbox.com/s/hfckioypmsbpytk/skoltex4hse-2122.docx?dl=0. Общая информация о программе имеется на сайте https://crei.skoltech.ru/cas/education/mscprog/.

Статистическая информация о курсах

в настоящей момент в книге курсов имеется	осенью	весной
всего	50	52
курсов	16	15
НИСов	29	32
проектов	4	4
толстых	22	30
тонких	28	22
на русском	31	32
на английском	19	20
из них с русским описанием	12	12
для первого курса	7	5
для второго курса	17	14
для третьего курса и старше	33	38
субъективно простых	28	29
субъективно трудных	22	23
межкампусных	44	47
дистанционных	40	42
аудиторных	10	10
нематематических	2	3

Описания курсов на русском

Кроме курсов, читаемых по-русски, в этом разделе имеются русские описания некоторых курсов, читаемых по-английски. Это отмечается сразу под названием курса, следом за указанием его статуса и целевой аудитории.

Алгебра в криптографии
простой межкампусный курс для студентов 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Кириченко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: В современной криптографии, например, в алгоритме Райвеста–Шамира–Адлемана (RSA) или в протоколе Диффи–Хеллмана на эллиптических кривых (ECDH), используются абстрактные алгебраические понятия, которые изначально возникли в связи с задачами чистой математики (главным образом задачами теории чисел и алгебраической геометрии). Одним из таких понятий является понятие делимости, и связанные с ним задачи: поиск наибольшего общего делителя, разложение на простые множители, доказательство однозначности разложения, решение диофантовых уравнений и т.п. Эти задачи выглядят конкретными (хотя и не всегда простыми), когда речь идёт о делимости целых чисел, но если целые числа заменить на более общие числа (например, на числа вида $a + b\sqrt{2}$ или вида $a + bi$, где a и b целые), на многочлены (от одной или нескольких переменных) или на степенные ряды, то возникает потребность абстрагироваться от деталей, чтобы уловить суть. Цель курса — разобраться в конкретных приложениях алгебры в криптографии на математическом, а не на инженерном уровне.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет пререквизитов, курс могут брать студенты, начиная с 1-го курса, если они хорошо знают школьную алгебру (на уровне книги «Алгебра» И. М. Гельфанда и А. Шеня https://www.mccme.ru/shen/algebra.pdf)

ПРОГРАММА:

1. Разложение на множители целых чисел и многочленов. Делимость в кольцах. Степенные ряды и гауссовы целые числа.
2. Алгоритм Евклида для целых чисел и многочленов. Евклидовы и неевклидовы кольца. Основная теорема арифметики. Кольца целых квадратичных числовых полей.
3. Китайская теорема об остатках. Алгоритм RSA. Поиск больших простых чисел, тесты на простоту. Алгоритмы разложения на множители чисел и многочленов.
4. Коники и кубики. Проективные замены координат. Приведение коник и кубик к каноническому виду.
5. Рациональная параметризация коники. Сложение точек на кубике. Метод секущих и решение диофантовых уравнений.
6. Конечные поля. Коники и кубики над конечными полями. Протокол Диффи – Хеллмана на эллиптических кривых.

УЧЕБНИКИ:

[G] J.A. Gallian, «Contemporary Abstract Algebra». https://people.clas.ufl.edu/cmcyr/files/Abstract-Algebra-Text_Gallian-e8.pdf.

[GM] В. А. Острик, М. А. Цфасман, «Алгебраическая геометрия и теория чисел». https://www.mccme.ru/free-books/mmmf-lectures/book.8v2.pdf.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $0.3 \cdot ДЗ + 0.3 \cdot К + 0.4 \cdot Э + 0.1 \cdot С$, где ДЗ — средняя оценка за домашние задания, К — оценка за контрольную в конце 1-го модуля, Э — оценка за письменный экзамен, С — оценка за работу на семинарах. При вычислении итоговой оценки вторая цифра после запятой не учитывается, оценка округляется в большую сторону, например, 9.1 округляется до 10.

Введение в алгебраические группы и их инварианты
трудный межкампусный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. С. Жгун.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Геометрическая и классическая теории инвариантов алгебраических групп — очень важные разделы современной математики. С первыми примерами инвариантов линейных преобразований, такими как определитель, след, характеристический многочлен каждый встречается уже на первом курсе линейной алгебры. Классическая теория инвариантов посвящена описанию алгебры инвариантов классических групп, таких как полная линейная группа, ортогональная и симплектическая группа. В свою очередь, геометрическая теория инвариантов, которая берет свое начало в работах Гильберта и Мамфорда, посвящена исследованию геометрических свойств инвариантов, например, построению и исследованию геометрии различных фактор пространств, и является основным инструментом для построения пространств модулей (кривых, векторных пространств и других объектов). В курсе мы затронем как классическую теорию инвариантов так и геометрическую. Также мы изучим эквивариантные вложения однородных пространств.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Требуется знание линейной алгебры и теории представлений конечных групп, последнее требуется, чтобы используемые конструкции не вызывали удивления. Полезно знание групп и алгебр Ли и основ алгебраической геометрии.

ПРОГРАММА:

- Алгебраические группы и их алгебры Ли.
- Действия алгебраических групп. Орбиты стабилизаторы однородные пространства. Теорема Шевалле.
- Многообразия флагов. Действие разрешимых групп на полных многообразиях. Теорема Бореля (Ли – Колчина) о неподвижной точке.
- Сопряженность борелевских подгрупп, максимальных торов, картановских подгрупп.
- Структурная теория полупростых алгебраических групп.
- Действие редуктивных групп на аффинных многообразиях. Конечная порожденность алгебры инвариантов (Теорема Гильберта).
- Категорный фактор. Геометрический фактор. Существование категорного фактора для действия редуктивных групп на аффинных многообразиях.
- Теорема Нетер о степенях образующих алгебры инвариантов.
- Теория инвариантов классических групп.
- Действие редуктивных групп. Линеаризация обратимого пучка. Группа G-линеаризованных линейных расслоений.
- Полустабильные и стабильные точки. Фактор Мамфорда.
- Численный критерий стабильности.
- Критерий Гильберта – Мамфорда.

Дополнительные темы.

- Критерий Попова стабильности действия на аффинном многообразии.
- Теорема Луны о слайсе. Стратификация и разрешение особенностей нуль-конуса.
- Отображение моментов. Замкнутость орбит, критерий Кемпфа – Несс.
- Стратификация Хесселинка множества нестабильных точек.
- Пространства модулей кривых.
- Вариация фактора Мамфорда при изменении обильного обратимого пучка.
- Свойства U-инвариантов, деформация к орисферическому многообразию.

УЧЕБНИКИ:

- D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, Geometric invariant theory, 3rd. edition, Ergebnisse Math. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994
- I.V.Dolgachev, Introduction to Geometric Invariant Theory, Lect. Notes Series, 25, Seoul Nat. Univ., 1994.
- Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, Итоги науки и техн. ВИНИТИ, Совр. пробл. мат., Фунд. направл., т. 55, 1989, с. 137–309.
- J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Graduate Texts in Math., no. 21, Springer, 1975. (Пер. на русск.: Д. Хамфри. Линейные алгебраические группы. - М.: Наука, 1980.)
- Х.Крафт, Геометрические методы в теории инвариантов, Москва: Мир, 1987.
- F.Knop, H.Kraft, T.Vust, The Picard group of a G-variety. Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie (H. Kraft, P. Slodowy, T. Springer eds.) DMV-Seminar **13**, Birkhauser, 1989, 77–88.
- D. A. Timashev, Homogeneous spaces and equivariant embeddings. In: Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups VIII (R. V. Gamkrelidze, V. L. Popov, eds.), Encyclopædia Math. Sci., vol. 138, Springer, 2011.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.3$*$grade for exercise sheet $+$0.7$*$final exam grade

Введение в алгебраическую теорию чисел
простой межкампусный курс на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Б. Калмынин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Многие классические и современные задачи теории чисел могут быть интерпретированы в терминах свойств алгебраических объектов, таких как числовые поля, их кольца целых и порядки в этих кольцах, группы классов идеалов и группы единиц. В данном курсе мы изучим основные понятия алгебраической теории чисел и свяжем их с некоторыми из наиболее классических задач и теорем, например, с теоремой Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях, проблемой десятого дискриминанта и Великой теоремой Ферма. Кроме того, мы обсудим свойства аналитических и топологических объектов, соответствующих числовым полям, таких как дзета-функция Дедекинда и кольцо аделей.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: базовые курсы алгебры и анализа.

ПРОГРАММА:

1. Теория Галуа, конечные поля, квадратичный закон взаимности. Локальные поля, теорема Островского.
2. Теория квадратичных форм, характеры Дирихле. Теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях. $*$ Дзета-функция Римана и асимптотический закон распределения простых чисел.
3. Поля алгебраических чисел. След и норма, дифферента и дискриминант. Дедекиндовы кольца. $*$ Группа Галуа типичного многочлена.
4. Циклотомические поля, Великая теорема Ферма, $*$ регулярные и иррегулярные простые числа.
5. Единицы и классы идеалов. Теорема Дирихле о единицах. Группа классов идеалов, граница Минковского. $*$ Аналитическая формула для числа классов.
6. Адели и идели, сильная аппроксимация. Дзета-функция Дедекинда и её функциональное уравнение. $*$ Расширенная гипотеза Римана и теорема Чеботарёва о плотности.

УЧЕБНИКИ:

- Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел
- Вейль А. Основы теории чисел
- Ленг С. Алгебраические числа
- Серр Ж.-П. Курс арифметики

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: min(10, 0.4$*$(листки (max 10 pts)) + 0.6$*$(домашний экзамен (max 12 pts))

Введение в алгебраическую топологию
простой межкампусный курс для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. Э. Казарян.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Одна из наиболее ярких черт, отличающих математику XX века от всей предшествующей — появление и развитие алгебраической топологии. В настоящее время использование алгебро-топологического инструментария стало непременным атрибутом значительной части математических исследований. Сочетание геометрических идей с формализованными алгебраическими алгоритмами для вычисления топологических инвариантов привели к эффективному средству изучения многих математических структур, в том числе, и не связанных напрямую с топологией. Эта область математики породила, например, такие направления как гомологическая алгебра и теория алгебр Хопфа. В курсе предлагается значительное количество задач на вычисление алгебро-топологических характеристик различных топологических пространств.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии)

ПРОГРАММА:

- Топологические пространства и операции над ними.
- Цепной комплекс, циклы, границы, гомологическая эквивалентность.
- Симплициальные, сингулярные, клеточные гомологии.
- Длинная точная последовательность.
- Гомологии многообразий. Двойственность Пуанкаре.
- Индекс пересечения и степень отображения.
- Умножение в когомологиях и пересечения циклов.
- Теория Морса. Неравенства Морса.

УЧЕБНИКИ:

- Васильев В. А. Введение в топологию. — М.: Фазис, 1997
- Прасолов В. В. Элементы теории гомологий. — М.: МЦНМО,2006
- Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989
- Hatcher A. Algebraic Topology

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.4 (контрольная) + 0.6 (экзамен), округление вверх по 10-балльной шкале.

Введение в дифференциальную геометрию
простой межкампусный курс для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: П. Е. Пушкарь.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Курс служит введением в основные темы дифференциальной геометрии: симплектическую и контактную геометрии, теорию аффинных связностей на многообразиях, римановы многообразия, геодезические.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: стандартные курсы линейной алгебры, дифференциальных уравнений и анализа на многообразиях.

ПРОГРАММА:

- Симплектические и контактные структуры. Теоремы Дарбу.
- Симплектические и контактные многообразия. Примеры. Лагранжевы и лежандровы многообразия.
- Гамильтоновы поля и их контактные аналоги. Редукции.
- Лагранжев грассманиан, индекс Маслова и теоремы Штурма.
- Гипотеза Арнольда.
- Связности.
- Параллельный перенос. Кривизна.
- Аффинные связности.
- Введение в характеристические классы.
- Римановы многообразия, связность Леви – Чевита.
- Тензор кривизны Римана.
- Геодезические. Теорема Хопфа – Ринова.
- Формулы первой и второй вариации. Якобиевы поля и сопряженные точки.

УЧЕБНИКИ:

[AG] В.И. Арнольд, А.Б. Гивенталь «Симплектическая геометрия»

[M] Дж. Милнор «Теория Морса»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $0.5 *$ листки с задачами $+ \ 0.5 *$ экзамен

КОММЕНТАРИЙ: Ассистентом на курсе будет В. Медведев.

Введение в квантовую теорию
простой межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. В. Лосяков, П. Г. Гавриленко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: На примере электромагнитной волны вводятся основные постулаты квантовой теории (пространство состояний, наблюдаемые, вопрос об измерениях и динамика), ее структура и математический аппарат. Обсуждается взаимоотношение классической и квантовой теорий. Пользуясь введенными понятиями изучаются важнейшие примеры квантовых систем — гармонический осциллятор, частица в кулоновском (ньютоновском) поле, свободная релятивистская частица. Курс предполагает существенную самостоятельную работу по решению задач.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии), школьный курс физики.

ПРОГРАММА:

1. Классическая теория на примере электромагнитной волны. Электромагнитная волна — набор гармонических осцилляторов. Гамильтонов подход. Gedanken эксперименты со светом — прохождение через поляризатор и фотоэффект. Вывод: наш мир не классический. Соотношения неопределенности.

2. Состояния физической системы в квантовой теории. Собственные состояния. Принцип суперпозиции. Вероятность перехода из одного состояния в другое (амплитуда перехода). Пространство состояний — гильбертово пространство.

3. Наблюдаемые в квантовой теории — операторы на гильбертовом пространстве. Действие оператора на собственные состояния. Требование самосопряженности оператора. Измерение наблюдаемой как задача на собственные значения.

4. Соотношение неопределенности и одновременная измеримость физических величин. Канонические коммутационные соотношения. Каноническое квантование в квантовой теории. Полный набор наблюдаемых.

5. Динамика в квантовой теории. Уравнение Шредингера. Гамильтониан как наблюдаемая, определяющая динамику в квантовой теории. Сохраняющиеся наблюдаемые.

6. Квантование гармонического осциллятора. Операторы рождения и уничтожения. Энергетический спектр и собственные состояния.

7. Когерентные состояния. Когерентные состояния как минимизирующие соотношение неопределенности. Динамика когерентного состояния. Разложение единицы для когерентных состояний. Предельный переход к классической теории.

8. Измерения координаты и импульса. Непрерывный спектр. Спектральная теорема.

9. Измерение момента импульса. Квантовая теория частицы в центральном потенциале. Атом водорода.

10. Релятивистская теория Дирака, спин. Физическая несостоятельность одночастичной квантовой теории: необходимость квантовой теории поля.

УЧЕБНИКИ:

1. П. Дирак, Принципы квантовой механики, 1979
2. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэнд, Фейнмановские лекции по физике
3. Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский, Лекции по квантовой механике для студентов-математиков, 1980

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка равна результату трёх контрольных и одного коллоквиума. Точный смысл этой формулы глубок и неопределён, как квантовая теория.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Введение в коммутативную алгебру
простой межкампусный курс на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Б. Павлов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Коммутативная алгебра имеет многочисленные приложения в самых разных областях математики. Все эти приложения невозможно охватить в семестровом курсе, но мы постараемся подробно обсудить кольца полиномов, особенно важные для алгебраической геометрии, целые расширения колец целых чисел и целых p-адических чисел, используемые в теории алгебраических чисел, и кольца формальных степенных рядов, играющие важную роль в теории особенностей. Когда это возможно, мы будем интерпретировать получаемые алгебраические результаты с точки зрения аффинной алгебраической геометрии. Мы изучим фундаментальные конструкции коммутативной алгебры, такие как радикалы колец и модулей, условия обрыва цепочек (артиновость и нетеровость), точные последовательности, локализации, примарные разложения, целые расширения, пополнения и теорию размерности.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Кольца, области главных идеалов, факториальные кольца, максимальные и простые идеалы, модули, фактор модули, теоремы об изоморфизмах для колец и модулей, тензорное произведение модулей.

ПРОГРАММА:

1. Максимальные идеалы. Простые идеалы. Лемма об избегании простых. Нильрадикал и радикал Джекобсона. Спектр кольца.
2. Прямые суммы и произведения модулей. Радикал модуля. Лемма Накаямы. Точные последовательности. Проективные и плоские модули.
3. Условия обрыва цепочек. Модули конечной длины. Нетеровы кольца. Теорема Гильберта и базисе. Артиновы кольца. Теорема Акизуки – Хопкинса.
4. Локализация колец и модулей. Носитель модуля. Локальные свойства.
5. Ассоциированные простые и носитель. Существование и единственность примарного разложения. Примерное разложение идеалов.
6. Плоские и строго плоские модули и морфизмы.
7. Целые расширения. Свойства подъема и спуска. Приложения к целым замыканиям к конечных сепарабельных расширениях.
8. Афинные алгебры. Теорма Гильберта о нулях в нескольких формах. Лемма Нётер о нормализации.
9. Пополнения колец и модулей. Лемма Гензеля.
10. Градуированные кольца и фильтрованные кольца и модули. Лемма Артина – Риса. Теорема Крулля о пересечении. Полином Гильберта. Теорема о размерности. Регулярные локальные кольца.
11. Кольца дискретного нормирования и дедекиндовы области.

УЧЕБНИКИ: Атья М.Ф., Макдональд И.Г. Введение в коммутативную алгебру, 1972. Айзенбад Д. Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию, 2017

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $0.1S + 0.2Q + 0.3M + 0.4F$, где S — оценка за решение задач на семинаре, Q — оценка за 4 одночасовые контрольные, M — оценка за промежуточный экзамен, F — оценка за экзамен.

Введение в лингвистику
трудный межкампусный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Б. Л. Иомдин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Лингвистика изучает устройство человеческого языка. Именно на человеческом языке — на разных языках — мы получаем большую часть информации о мире, ещё большую часть этой информации мы на человеческом языке обрабатываем, и практически все результаты этой обработки мы на человеческом языке обсуждаем. Поэтому очень важно понимать, как устроен человеческий язык в целом и конкретные языки в частности. Цель курса — рассказ о том, как современная лингвистика представляет себе устройство языка. На лекциях приводятся примеры из десятков языков мира, а на семинарах и в домашних заданиях студенты самостоятельно анализируют материал тех языков, которые *не* обсуждались на лекциях, в основном решая самодостаточные лингвистические задачи. Решение этих задач не требует никаких предварительных знаний, а рассчитано на умение логически мыслить; в результате мы будем узнавать много нового о том, как разнообразны языки, и обсуждать, как справляться с этим многообразием. Помимо лингвистических задач, некоторые домашние задания связаны с самостоятельным анализом языковых данных, полученных в интернете.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

1. Вводная часть: язык как система. Когда появилась лингвистика. Что изучает лингвистика. Синхрония и диахрония. Семиотика. Свойства языковых знаков. Омонимия и многозначность. Многозначность на разных уровнях языка.

2. Происхождение, функционирование и развитие естественных языков. Происхождение языка. От языка животных к языку людей. Избыточность языкового знака. Свойства естественного языка. Функции языка. Социальные формы существования языка. Диалектный континуум. Основные понятия лингвистической компаративистики. Регулярные фонетические соответствия. Глоттохронология. Языковая систематика. Генеалогическая классификация языков.

3. Языки мира. Обзор языков мира. Основные графические системы.

4. Грамматика и лексика. Лексическое и грамматическое значение. Свойства грамматических значений. Грамматикализация и деграмматикализация. Грамматические категории. Интегральное описание языка.

5. Фонетика. Фонетика: основные понятия. Артикуляционная классификация звуков. Акустическая классификация звуков. Фонология.

6. Морфология. Морфема и морфемика. Основные типы аффиксов. Словообразование и словоизменение. Основа и флексия. Грамматические средства языка. Типологическая классификация языков. Историческая морфология.

7. Синтаксис. Предложение и высказывание. Синтаксические структуры. непосредственно составляющие. деревья зависимостей. гибридные структуры. Типы синтаксических отношений в модели «Смысл⇔Текст». Синтаксически размеченный корпус SynTagRus. Свойства синтаксических отношений. Свойства синтаксических структур. Синтаксические признаки. Гипотеза глубины.

8. Лексическая семантика. История семантики. Идеи современной семантики. Омонимия и синонимия. Омонимия и полисемия. Типы полисемии. Мышление и язык. Языковая картина мира.

9. Лексикография. История лексикографии. Толковые словари. Принципы системной лексикографии. Естественные метаязыки. Natural Semantic Metalanguage. Московская семантическая школа.

10. Корпусная лингвистика. Лингвистика в докомпьютерную эпоху. «Революция в лингвистике». Корпус текстов.

УЧЕБНИКИ:

1. С. А. Бурлак, С. А. Старостин. Сравнительно-историческое языкознание. М., 2005.

2. М. А. Кронгауз. Семантика. М., 2005.

3. М. Копотев. Введение в корпусную лингвистику. Электронное издание . Прага, 2014.

4. Дж. Лайонз. Язык и лингвистика: Вводный курс. М., 2004.

5. В. А. Плунгян. Общая морфология: Введение в проблематику. М., 2012.

6. Я. Г. Тестелец. Введение в общий синтаксис. М., 2001.

7. А. Я. Шайкевич. Введение в лингвистику. М., 2010.

8. A. Akmajian, R. A. Demers, A. K. Farmer, R. M. Harnish. Linguistics. An Introduction to Language and Communication. MIT Press, 2010.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка ставится по результатам выполнения трёх домашних заданий.

Введение в методы статистики
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. В. Хохлов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: 2-й модуль 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Стартующее с самых азов изложение основных статистических методов и понятий вместе с минимально необходимыми сведениями из теории вероятностей. Быстрое введение в статистические методы работы с данными, в котором максимально явно и аккуратно разделены формализм строгой математической теории и общепринятые допущения об используемых на практике моделях данных.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Предполагаются уверенное владение стандартным курсом математического анализа (включая комплексные переменные) и основные сведения из теории меры. Необходимым элементом является также умение написать несложный скрипт на одном из программных языков-интерпретаторов типа R, Python, MatLab или Octave.

ПРОГРАММА:

1. Основные понятия и терминология в математической статистике: данные, параметрические и непараметрические модели, функционалы оценок, гипотезы, тесты.
2. Основные методы непараметрического подхода, теорема Гливенко, популярные тесты Колмогорова – Смирнова и Адельсона – Дарлинга.
3. Параметрическая статистика в гауссовском и общем случаях. Постановка задач и методы их решения.
4. Формальные описания: определения и основные теоремы: выборки, сравнение оценок, точность, вероятность, информация. Определения и основные теоремы.
5. Практика: модели линейной и логистической регрессии, оценки и примеры.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: В курсе будет указан список тем, по каждой из которых предлагается ответить письменно на два теоретических вопроса и сделать одну вычислительную задачу — сответственно каждая тема оценивается в диапазоне от нуля до трех баллов, тема зачитывается, если оценка за нее не менее 2. Процентная доля зачтенных тем (с округлением до десятков процентов) определит итоговую десятибальную оценку

Введение в некоммутативую комбинаторную алгебру
простой межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Д. И. Пионтковский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Центральный объект курса — некоммутативные грудуированные алгебры — связывает задачи комбинаторики последовательностей, теории колец, гомологической алгебры и некоммутативной геометрии. Отталкиваясь от естественных вопросах о росте и гомологиях градуированных алгебр, изложение начинается с комбинаторных задач и включает мягкое введение в классическую гомологическую алгебру, теорию формальных языков, базисы Грёбнера и Грёбнера – Ширшова, некоммутативную проективную геометрию и теорию операд. Открытые вопросы теории будут предложены для исследований слушателям. Хотя курс не требует предварительных знаний за пределами стандартного курса алгебры, слушатели, теснее знакомые с гомологической алгеброй и алгебраической геометрией смогут, вероятно, дальше продвинуться этих исследованиях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Линейная алгебра и теория колец в объёме обязательного курса алгебры. Знакомство с основами гомологической алгебры поможет лучше понять связи между различными задачами.

ПРОГРАММА:

1. Алгебры над полем. Фильтрации и градуировки. $\mathbb{Z}$-градуированные алгебры и модули, ряды Гильберта. Алгебры путей колчанов, связные алгебры. Ассоциированные мономиальные алгебры.
2. Базисы Грёбнера (и Ширшова), компьютерные вычисления в некоммутативных алгебрах. Теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта.
3. Ряд Гильберта и рост. Ряд Гильберта коммутативных алгебр. Типы роста, размерность Гельфанда – Кириллова. Проблемы рациональности ряда Гильберта.
4. Формальные языки и мономиальные алгебры. Регулярные языки, автоматные алгебры. Рациональность рядов Гильберта и теорема Хомского – Шютценберже.
5. Начала классической гомологической алгебры. Свободные резольвенты градуированных модулей, градуированные Tor и Ext. Ряд Пуанкаре. Гипотеза Серра. Дифференциально градуированные резольвенты, бар-конструкция.
6. Рост и алгебраические свойства градуированных алгебр. Теорема Голода – Шафаревича и проблемы бернсайдовского типа.
7. Регулярные последовательности и полные пересечения. Комплекс Козюля, критерий полных пересечений. Алгебры глобальной размерности два как некоммутативные полные пересечения.
8. Гомологии и резольвенты мономиальных алгебр. Резольвента Аника.
9. Козюлевы (= кошулевы) алгебры, основы теории козюлевой двойственности. Обобщения козюлевых алгебр.
10. Абелевы категории модулей над градуированными алгебрами. Нетеровы и когерентные алгебры. Рост нетеровых алгебр. Когерентность мономиальных алгебр.
11. Основы некоммутативной проективной геометрии. Теорема Серра и некоммутативные схемы в смысле Веревкина и в смысле Артина – Зяня. Некоммутативные горенштейновы и регулярные кольца. Регулярные алгебры Артина – Шелтера. Алгебры Калаби – Яу. Примеры некоммутативных многообразий.

12. Множества рядов Гильберта конечно определенных алгебр, условия конечности. Ряды Гильберта козюлевых алгебр. Классификации рядов Гильберта для алгебр с небольшим числом порождающих. Алгебры линейного роста.

13. Многообразия (мультиоператорных алгебр), теорема Биркгофа, относительно свободные алгебры. Линеаризация тождеств. Операда, ассоциированная с многообразием. Формальное определение операды.

14. Алгебраические операды как обобщения градуированных алгебр. Порождающие, соотношения, представления операд. Дифференциально градуированные операды и ко-операды, гомологические конструкции. Козюлевы операды.

15. Несимметричные и шаффл-операды, теория базисов Грёбнера для операд. Мономиальные операды. Гомологи Квиллена, резольвенты и дифференциально градуированные модели операд.

УЧЕБНИКИ:

- **[У90]** Уфнаровский, В. А., «Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре. Итоги науки и техники», Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления», 1990, 57, pp. 5–177.

- **[R14]** D. Rogalski, «An introduction to Noncommutative Projective Geometry», https://arxiv.org/abs/1403.3065.

- **[LV12]** Loday J. L., and Vallette B. «Algebraic operads», Springer Science & Business Media, 2012, vol. 346.

- **[BD16]** Bremner, Murray R., and Vladimir Dotsenko. «Algebraic operads: an algorithmic companion», CRC Press, 2016.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка вычисляется как $(К1+К2)/2 + $ (Bonus scores), где К1 и К2 оценки за контрольную по материалу 3 модуля и за итоговую контрольную соответственно, а дополнительные Bonus scores начисляются за активность во время занятий.

Введение в римановы поверхности
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. К. Ландо.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Основы теории римановых поверхностей были заложены во второй половине XIX века. В ней сошлись передовые на тот момент разработки анализа, алгебры и еще не созданной топологии. На протяжении всего XX века теория римановых поверхностей, объединившись с теорией комплексных алгебраических кривых, не раз выходила на передний план развития математики. Она позволила объяснить многие трудности, возникающие при интегрировании различных функций, и разработать эффективные методы взятия интегралов, прояснила теорию Галуа и привела к новому пониманию арифметики, стала полигоном для теории комплексных многообразий и теории функциональных классов. В последние десятилетия века римановы поверхности оказались востребованы как один из наиболее эффективных инструментов исследования интегрируемых систем и связанных с ними моделей математической физики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии); курс комплексного анализа (функции одной переменной)

ПРОГРАММА:

- Предварительные сведения.
- Определения. Компактная риманова поверхность, ассоциированная с алгебраическим уравнением на плоскости.
- Род гладкой плоской кривой.
- Мероморфные функции на римановой поверхности.
- Дифференциальные 1-формы и векторные поля на римановых поверхностях. Вычеты.
- Дивизоры.
- Формула Римана – Роха и её приложения.
- Канонические кривые.
- Точки Вейерштрасса
- Теорема Абеля.

УЧЕБНИКИ:

[KLP] М. Э. Казарян, С. К. Ландо, В. В. Прасолов, «Алгебраические кривые: по направлению к пространствам модулей», М., МЦНМО, 2019, https://math.hse.ru/courses_math/spec-ak-pm.

[Ga] R. C. Gunning. «Lectures on Riemann Surfaces».

[GHr] Ph. Griffiths, J. Harris. «Principles of Algebraic Geometry», Chapter 2.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Контрольная 3. Работа на семинаре 4. Экзамен 7. Если суммарная оценка превышает 10, то результат уменьшается до 10.

Введение в симплектическую геометрию, отображения моментов, локализацию и интегрируемость

трудный межкампусный дистанционный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше

(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. Ю. Алексеев, Й. Маршалл.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Мы начнём с базисных понятий симплектической геометрии включая лемму Мозера и теорему Дарбу. Основной сюжет курса — это ситуация когда компактная группа Ли действует на симплектическом многообразии и действия сохраняет симплектическую структуру. Такое действие часто может быть определено с помощью функции на многообразии, которая называется гамильтонианом или отображением момента. Отображения моментов обладают удивительными свойствами. Следующие важные результаты будут обсуждаться в курсе: теорема Марсдена – Вейнстейна о симплектической редукции, теорема Атьи – Гилмана – Стернберга о выпуклости и теорема Дюстермата – Хекмана о локализации. Мы также рассмотрим различные приложения этих результатов, в зависимости от интересов группы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: анализ на многообразиях и введение в дифференциальную геометрию, включающее векторные поля, дифференциальные формы, внешний дифференциал и когомологии де Рама. Краткое введение в теорию Ли для унитарной группы U_n будет включено в курс.

ПРОГРАММА:

1. Симплектические структуры: определения и примеры.
2. Симплектическая линейная алгебра.
3. Гамилтоновы векторные поле. Скобки Пуассон. Форма Лиувилля.
4. Лемма Мозера и теорема Дарбу.
5. Краткое введение в теорию Ли для групп S^1 и U_n: экспоненциальное отображение, формы Маурера – Картана.
6. Действия компактных групп на симплектических многообразиях. Примеры: коприсоединенные орбиты, кокасательные расслоения групп Ли.
7. Краткое введение в теорию главных расслоений: связность и кривизна.
8. Гамильтоновы действия, отображения моментов. Теорема Марсдена – Вейнстейна о симплектической редукции.
9. Теорема выпуклости Атьи – Гилмана – Стернберга (АГС).
10. Приложения теоремы АГС: торические многообразия и теорема Дельзана.
11. Эквивариантные когомологии: модели Картана и Вейля.
12. Теорема локализации Берлин – Вернь – Атьи – Ботта.

Дополнительные темы:

1. Коприсоединенные орбиты и системы Гельфанда – Цетлина.
2. Принцип «Квантование коммутитует с редукцией» Гилмана – Стернберга.
3. Примеры интегрируемых систем: цепочка Тоды и система Калоджеро – Мозера.
4. Гиперкэлеровы многообразия и гиперкэлерова редукция.

УЧЕБНИКИ:

1. Ana Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*.
   https://people.math.ethz.ch/$\sim$acannas/Papers/lsg.pdf

2. Eckhard Meinrenken, *Symplectic Geometry* (lecture notes, University of Toronto).
   https://www.math.toronto.edu/mein/teaching/LectureNotes/sympl.pdf

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 25% за домашние задания, 25% за промежуточную контрольную в середине семестра и 50% за итоговый экзамен.

Введение в теорию алгебраических чисел и полей классов
трудный межкампусный НИС на английском языке для 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. С. Жгун.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Алгебраическая теория чисел — классическая область математики, сформировавшаяся в ходе исследования решений диофантовых уравнений, а также благодаря попыткам доказать теорему Ферма. Сейчас это обширная классическая область лежащая в основании Арифметической геометрии. Этот курс является продолжением базового курса по теории чисел. Мы изучим фильтрацию группы Галуа: а именно подгруппу разложения, инерции а также высшие группы ветвления и их норменные отображения. Мы узнаем о когомологиях Галуа полей, а также о локальной и глобальной теории полей классов. Если позволит время, мы обсудим алгебро-геометрический аналог этой теории позволяющий описывать абелевы накрытия кривых в терминах их якобианов. Также мы расскажем о геометрии Аракелова позволяющей построить «компактификацию» кривой над кольцом целых алгебраических чисел.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Теория Галуа, начальный курс по алгебраической теории чисел

ПРОГРАММА:

1. Адели и идели.
2. Адельная интерпретация теоремы Дирихле о единицах и теоремы о конечности группы классов идеалов.
3. Когомологии Галуа. Теорема Гильберта 90.
4. Неабелевы когомологии и торсеры.
5. Лемма Шапиро. Теорема Тейта – Накаямы.
6. Группа Брауэра. Центральные простые алгебры.
7. Фильтрация группы Галуа подгруппами ветвления.
8. Норменное отображение.
9. Локальная теория полей классов.
10. Локальные символы. Законы взаимности.
11. Глобальная теория полей классов.

УЧЕБНИКИ: 1. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. «Теория чисел». - М.: Наука, 1985. 2. Вейль А. Основы теории чисел. - М.: Едиториал УРСС, 2004. 3. Ленг С. «Алгебра». - М.: Мир, 1968. 4. Ленг С. «Алгебраические числа». - М.: Мир, 1972. 5. Манин Ю. И., Панчишкин А. А. «Введение в современную теорию чисел». - М.: МЦНМО, 2009. 6. Серр Ж.-П. «Курс арифметики». - М.: Мир, 1972. 7. Касселс Д., Фрелих А. (ред.), Алгебраическая теория чисел. – 1969. 8. Serre J. P. Local fields. – Springer, 2013.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.3 (grade for exersice sheet) + 0.7(grade for final exam)

Введение в теорию Галуа

простой межкампусный дистанционный курс на английском языке для студентов 2-го курса и старше

(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Н. С. Маркарян.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Теория Галуа изучает корни полиномов и их симметрии в терминах групп Галуа. Будучи алгебраическим аналогом фундаментальной группы, теория Галуа лежит в основании таких дисциплин как алгебраическая геометрия и теории чисел.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Основы алгебры: группы, кольца, линейная алгебра.

ПРОГРАММА: Кольца полиномов и более общие кольца главных идеалов. Поля, алгебраические и трансцендетныерасширения. Поля разложения полиномов и группы Галуа. Основная теорема теории Галуа. Вычисление групп Галуа. Приложения теории Галуа.

УЧЕБНИКИ: J. S. Milne, Fields and Galois Theory, https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ft.html.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 40% контрольная, 60% экзамен. Оценка: округление результата/10 до ближайшего целого.

КОММЕНТАРИЙ: курс основан на видеолекциях Е. Америк

Введение в теорию интегральных уравнений
простой межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. К. Погребков.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Теория интегральных уравнений — важный раздел современной математики, имеющий многочисленные приложения в теории дифференциальных уравнений, математической физике, классической и квантовой механике. Владение методами этой теории — необходимый аппарат для каждого математика.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Математический анализ, теория дифференциальных уравнений, комплексный анализ, линейная алгебра

ПРОГРАММА: Сведение начальных задач и задач Коши дифференциальных уравнений к интегральным уравнениям, простейшие примерам и классификации линейных интегральных уравнений, теоремы Фредгольма, теория интегральных уравнений с вырожденными ядрами и близким к ним, интегральные уравнения с равномерно непрерывными ядрами и особые интегральные уравнения, теория уравнений Вольтерра, теория интегральных уравнений с действительными симметрическими ядрами и существование собственных функций у таких уравнений, теорема Гильберта – Шмидта и теорема о разложении ядер, классификация ядер, теорема Дини и ее приложения.

УЧЕБНИКИ: И. Г. Петровский, Лекции по теории интегральных уравнений.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Для получения оценки 10 достаточно решить 75% обязательных домашних и 75% обязательных экзаменационных задач. При наборе меньшей суммы оценка уменьшается линейно и вычисляется по стандартным правилам округления.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика». Курс читается на русском

Введение в теорию кобордизмов
трудный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. А. Абрамян, А. Г. Горинов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Теория кобордизмов начинается с вопроса, является ли данное гладкое многообразие границей другого гладкого многообразия. На этот и другие похожие вопросы можно ответить с помощью теории гомотопий. В свою очередь, некоторые из наиболее сильных на данный момент результатов теории гомотопий получаются с помощью той или иной версии теории кобордизмов.

Для начала мы изучим общую конструкцию Понтрягина – Тома, которая сводит различные варианты изначального вопроса выше (ориентированный, неориентированный, оснащенный и т. д.) к вычислениям гомотопических групп соответствующего спектра Тома. Затем мы рассмотрим классические применения теории. В частности, мы поймем, что гладкое многообразие является границей другого гладкого многообразия тогда и только тогда, когда его числа Штифеля – Уитни равны 0. После этого мы сконцентрируемся на комплексном кобордизме и применениях к теории гомотопий.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Гладкие многообразия о объеме обязательного курса; гомологии и когомологии в объёме курса по выбору «Алгебраическая топология 1» (или первых 3 глав Хатчера).

ПРОГРАММА:

1. Примеры бордизмов: ориентированные, неориентированные, комплексные и оснащенные бордизмы.
2. Теорема Понтрягина – Тома.
3. Спектры и их гомотопические группы (напоминание). Спектры Тома.
4. Спектральная последовательность Адамса.
5. Применения спектральной последовательности Адамса к вычислению групп бордизмов.
6. Гомоморфизм Гуревича.
7. Ориентация векторных расслоений относительно мультипликативных теорий когомологий. Комплексно-ориентированные теории.
8. Формальные групповые законы и теорема Квиллена.
9. Когомологические операции и теорема Ландвебера – Новикова.
10. (*) Спектры Брауна – Петерсона.
11. (*) Теорема Ландвебера о точном функторе.
12. (*) Эллиптические когомологии. Топологические модулярные формы.
13. (*) Хроматическая спектральная последовательность и K – теории Моравы.

УЧЕБНИКИ: Haynes Miller, Notes on cobordism (online notes).

Haynes Miller, Vector fields on spheres etc. (online notes).

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 100% домашний экзамен

Введение в теорию перестроек и её применения к комплексным и топологическим многообразиям

трудный межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше

(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: С. А. Абрамян, А. Г. Горинов, В. С. Жгун.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Пусть имеется гладкая функция и риманова метрика на компактном многообразии без границы. Если функция и метрика достаточно общие, то с их помощью можно разложить многообразие на простые куски (ручки). Отправной точкой теории перестроек является тот факт, что при общей деформации пары (функция, метрика) разложение на ручки меняется контролируемым образом. У этого факта есть много применений в геометрии и топологии, и цель семинара в том, чтобы изучить некоторые из них.

Мы начнем с обзора теории Морса и рассмотрим несколько простых приложений, такие как неравенства Морса и теорема об h-кобордизме. Затем мы рассмотрим задачу классификации гладких многообразий в данном гомотопическом типе, и изучим нужную для этого технику. После этого рассмотрим применения к комплескным аналитическим и кэлеровым многообразиям. В конце мы поймем, как перенести идеи и методы классификации многообразий в гомотопическом типе с гладкого случая на PL- и топологический, и получим частичную информацию о кольцах PL- и топологических бордизмов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Гладкие многообразия о объеме обязательного курса; гомологии и когомологии в объёме курса «Введение алгебраическую топологию» (или первых 3 глав Хатчера). Если нужно, мы повторим часть пререквизитов или все.

ПРОГРАММА:

1. Обзор теории Морса; ручки и комплексы Морса. Разложения Хегора 3-мерных многообразий.
2. Теорема об h-кобордизме. Трюк Уитни.
3. Обзор двойственности Пуанкаре. Двойственности Спеньера – Уайтхеда и Атии. Нормальное расслоение Спивака.
4. Нормальные отображения и нормальные бордизмы.
5. Классификация гладких многообразий в данном гомотопическом типе.
6. Обзор теории гладких кобордизмов. Конструкцию Понтрягина-Тома и гомотопические группы спектров Тома.
7. Представление классов гомологий многообразиями.
8. Комплексные гиперповерхности и расслоение Милнора. Числа Милнора и Тюриной.
9. Обзор теории Ходжа. Вариации структур Ходжа и связность Гаусса – Манина.
10. Пучки Лефшеца и исчезающие циклы Применения теории Морса к топологии комплексных многообразий.
11. Разложение лефшеца для кэлеровых многообразий. Примитивные классы и исчезающие циклы.
12. Редукция структурной группы расслоения. Классификация PL-многообразий в гомотопическом типе; топологический случай (набросок).
13. Кольца PL- и топологических бордизмов (если хватит времени).

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 100% доклад + записки

Введение в теорию пучков
трудный межкампусный аудиторный НИС для 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. С. Хорошкин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Пучки являются центральным объектом во многих областях математики. Знакомство с теорией пучков необходимо для изучения алгебраической геометрии, топологии и других дисциплин. Целью курса является знакомство с основными определениями теории пучков, примерами пучков, а также с необходимыми инструментами из теории категорий и гомологической алгебры.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Необходимо владение первыми тремя семестрами обязательных курсов алгебры, анализа, геометрии и топологии. Очень желательно знакомство с основами коммутативной алгебры и началами гомологической алгебры.

ПРОГРАММА:

- Пучки на топологических пространствах
- Экскурс в гомологическую алгебру и теорию категорий
- (Квази)когерентные пучки на афинных схемах
- Когомологии Чеха
- Вялые, тонкие и мягкие пучки, вылые резольвенты
- Спектральные последовательности, теорема ДеРама

УЧЕБНИКИ:

- Stacks project: https://stacks.math.columbia.edu/
- Хартсхорн «Алгебраическая геометрия»
- Маклейн «Категория для работающего математика»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: вычисляется по формуле $\min(100, 0.5H + 0.6E)/10$, где H – процентные доли решенных домашних задач и коротких контрольных, проводимых на семинаре, и E – письменного домашнего экзамена.

Введение в теорию случайных процессов
простой межкампусный НИС на английском языке для 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. Л. Бланк.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Курс является продолжением стандартного курса по теории вероятностей (связанного в основном с комбинаторикой) и предназначен для первоначального ознакомления с теорией случайных процессов. Уделяется особое внимание связи этой теории с функциональным анализом и общей теорией меры. Курс ориентирован на бакалавров 2 – 4 курса, магистрантов и аспирантов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: курсы анализа и теории вероятностей

ПРОГРАММА:

- Понятие случайного процесса.
- Элементы случайного анализа.
- Корреляционная теория случайных процессов.
- Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем.
- Винеровский и пуассоновский процессы.
- Стохастический интеграл. Формула Ито.
- (Суб/супер)мартингалы.
- Инфинитезимальный оператор полугруппы.
- Стохастическая устойчивость динамических систем.
- Большие уклонения в марковских процессах и хаотической динамике.
- Нелинейные марковские процессы.

УЧЕБНИКИ:

- D. Stirzaker. Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.
- А. Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. М.: Наука. Физматлит, 1996
- N. V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS. V.43, 2002.
- Б. Оксендаль. Стохастические дифференциальные уравнения, Москва, 2003.
- А. Н. Ширяев. Вероятность, 2 т. МЦНМО, 2007.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.4 (Накопленная оценка) + 0.6 (Экзамен), накопленная оценка определяется контрольными, сдачей листков и работой на лекциях и семинарах. Округление в большую сторону.

Введение в функциональный анализ
простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 2-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Ю. Пирковский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Функциональный анализ изучает бесконечномерные векторные пространства, снабженные нормой (или, более общим образом, топологией), операторы между такими пространствами и представления алгебраических структур в таких пространствах. Классические разделы функционального анализа — спектральная теория линейных операторов, геометрия банаховых пространств, теория обобщенных функций, теория операторных алгебр и др. К более новым его направлениям относятся некоммутативная геометрия в смысле А. Конна, теория операторных пространств (известная также как «квантовый функциональный анализ») и локально компактные квантовые группы. Функциональный анализ имеет многочисленные приложения в теории дифференциальных уравнений, гармоническим анализе, теории представлений, геометрии, топологии, вариационном исчислении, оптимизации, квантовой физике и т.д. В этом вводном курсе мы планируем осветить лишь самые базовые вещи из функционального анализа («неприводимый минимум»).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Анализ, линейная алгебра, метрические пространства, интеграл Лебега. Курс доступен студентам начиная со 2 курса.

ПРОГРАММА:

УЧЕБНИКИ:

- A. Ya. Helemskii. *Lectures in Functional Analysis*. MCCME, 2004 (in Russian). English transl.: AMS, 2006.
- V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov. *Real and Functional Analysis*. RCD, 2011 (in Russian). English transl.: Springer, 2020.
- A. A. Kirillov and A. D. Gvishiani. *Theorems and problems in Functional Analysis*. Moscow, Nauka, 1979 (in Russian). English transl.: Springer, 1982.
- B. Simon. *Real Analysis. (A comprehensive course in Analysis, Part 1)*. AMS, 2015.
- B. Simon. *Operator Theory. (A comprehensive course in Analysis, Part 4)*. AMS, 2015.
- M. Reed, B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis.* Academic Press, 1972. Russian transl.: Mir, 1977.
- V. M. Kadets. *A course in functional analysis*. Khar'kov. Nats. Univ. im. V. N. Karazina, Kharkiv, 2006 (in Russian). English transl.: Springer, 2018.
- W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill, 1991. Russian transl.: Lan', 2005.
- J. B. Conway. *A course in Functional Analysis.* Springer, 1990.
- A. Yu. Pirkovskii. *Spectral theory and functional calculi for linear operators*. MCCME, 2010 (in Russian). https://www.mccme.ru/free-books/pirkovsky/pirkovsky-spectral.pdf.
- A. Yu. Pirkovskii. *Lecture notes in functional analysis*. Unfinished and unpublished lecture notes (HSE, 2011/2012, in Russian). http://vyshka.math.ru/1112/funcan.html.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:

- The final grade is calculated by the formula

$$\text{final grade} = 0.7 \times (\text{cumulative grade}) + 0.3 \times (\text{exam grade}).$$

- The cumulative grade is calculated by the formula

$$\text{cumulative grade} = 0.5 \times (\text{midterm grade}) + 0.5 \times (\text{exercise sheets grade}).$$

- The oral exam will be at the end of December and will include only the material of the 2nd module.
- The midterm exam (also oral) will be at the end of October (or at the beginning of November) and will include only the material of the 1st module.
- To get the maximum grade for the exercise sheets, you should solve 75% of all the exercises. If you solve more, you will earn bonus points.
- You can also earn bonus points for working actively at the exercise classes and for solving «bonus exercises» (marked as «**B**» in the sheets).

Введение в эргодическую теорию
простой межкампусный НИС на английском языке для 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. Л. Бланк.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Можно ли отличить детерминированную хаотическую динамику от чисто случайной и имеет ли этот вопрос смысл? Влияет ли необратимость динамики на качественные характеристики процесса? Эргодическая теория изучает эти и другие статистические свойства динамических систем. Интерес к этой проблематике связан с тем, что «типичные» детерминированные динамические системы (например, дифференциальные уравнения) демонстрируют хаотическое поведение: их траектории выглядят как реализации случайных процессов. Мы начнем с классических результатов Пуанкаре, Биркгофа, Хинчина, Колмогорова и дойдем до современных постановок (в том числе и нерешенных) задач. Курс является вводным и ориентирован на бакалавров 2 – 4 курса, магистрантов и аспирантов. Естественным его продолжением является сколковский курс «Динамика и эргодическая теория».

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: стандартный двухгодовой курс математического анализа.

ПРОГРАММА:

1. Динамические системы: траектории, инвариантные множества, простые и странные аттракторы и их классификация, хаотичность.
2. Топологические свойства измеримой динамики.
3. Действие в пространстве мер, понятие трансфер-оператора, инвариантные меры. Сравнение со случайными марковскими процессами.
4. Эргодичность, теорема Биркгофа, перемешивание, ЦПТ. Меры Синая – Боуэна – Рюэлля и естественные/наблюдаемые меры.
5. Основные эргодические конструкции: прямые и косые произведения, производное и интегральное отображения, естественное расширение и проблема необратимости.
6. Эргодический подход к задачам теории чисел.
7. Энтропия: метрический и топологический подходы.
8. Операторный формализм. Спектральная теория динамических систем. Банаховы пространства мер, случайные возмущения.
9. Многокомпонентные системы: синхронизация и фазовые переходы.
10. Математические основания численного моделирования хаотической динамики.

УЧЕБНИКИ:

1. М. Бланк. «Устойчивость и локализация в хаотической динамике», МЦНМО, Москва, 2001.
2. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. «Эргодическая теория», Наука, Москва, 1980.
3. A. Katok, B. Hasselblatt. «Introduction to the modern theory of dynamical systems», 1995.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.4 (Накопленная оценка) + 0.6 (Экзамен). Накопленная оценка определяется контрольными, сдачей листков и работой на лекциях и семинарах. Округление в большую сторону.

Гамильтонова механика
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Побережный.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Курс гамильтоновой механики относится к базовым фундаментальным теоретико-физическим курсам и направлен на знакомство слушателей с современным взглядом на основы теории интегрируемых систем и математической физики. Курс рассчитан на старших студентов бакалавриата и студентов магистратуры, освоение его программы даёт возможность в дальнейшем изучать более продвинутые курсы связанные с математической физикой. Математический аппарат современной теории гамильтоновых систем включает в себя методы теории дифференциальных уравнений и динамических систем, групп и алгебр Ли и их представлений, симплектической и пуассоновой геометрии, анализа на многобразиях и многих других. Приобретение практических навыков применения методов и конструкций этих разделов математики, умение их сочетать для решения задач механики является одной из целей данного курса. Курс может быть рекомендован не только студентам собирающимся продолжить свою обучение на программе «Математика и математическая физика», но и планирующим специализироваться в чистой математике или её приложениях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Два года бакалавриата (стандартные курсы анализа, анализа на многообразиях, дифференциальных уравнений). Физического бэкграунда не требуется.

ПРОГРАММА:

- Ньютонов формализм: напоминание, симметрии, геометрия
- Лагранжев формализм: принцип наименьшего действия, уравнения Эйлера – Лагранжа, симметрии, законы сохранения
- Гамильтонов формализм: интегрируемость по Лиувилю – Арнольду, канонические преобразования, уравнения Гамильтона – Якоби, симметрии
- Симплектические и пуассоновы структуры: теорема Дарбу, алгебры Ли и орбиты коприсоединённого действия, скобка Кириллова – Костанта, отображение момента.
- Разделение переменных, представление Лакса

УЧЕБНИКИ:

- В. И. Арнольд «Математические методы классической механики», 3-е изд. М. : Наука, 1989
- А. М. Переломов, «Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли» М. : Наука, 1990
- Д. тер Хаар, «Основы гамильтоновой механики» М. : Наука, 1974

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле (сумма оценок за две контрольные)/4+(оценка за экзамен
с округлением до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

КОММЕНТАРИЙ: Курс повторяет прошлогодний.

Геометрическое введение в алгебраическую геометрию

простой межкампусный дистанционный НИС на английском языке для 2-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. С. Тихомиров.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Алгебраическая геометрия изучает фигуры, локально устроенные как множество решений системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве, и служит мостом между точным, но скудным языком алгебраических формул и бесконечно богатым, но трудно выражаемым в словах миром геометрических образов. Поэтому алгебраическая геометрия занимает центральное место в самых разных областях математики и математической физики, являясь наиболее эффективным и красивым инструментом для установления нетривиальных связей между кажущимися далёкими друг от друга явлениями. Настоящий курс является геометрическим введением в предмет и знакомит слушателей с фундаментальными геометрическими фигурами и конструкциями, а также современной алгеброй, которая за ними стоит.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (алгебра, анализ, геометрия, топология).

ПРОГРАММА:

- Проективные пространства и проективные квадрики. Пространства квадрик. Прямые, коники, $\mathrm{PGL}(2)$, кривые Веронезе, рациональные кривые. Плоские кубические кривые.
- Многообразия Грассмана, Веронезе и Сегре. Проективные морфизмы, связанные с тензорной алгеброй.
- Доза коммутативной алгебры: целые элементы в расширениях колец, строение конечно порождённых алгебр над полем, базисы трансцендентности, теоремы Гильберта о нулях и базисе идеала.
- Словарик «Коммутативная алгебра – Аффинная алгебраическая геометрия». Спектры, гомоморфизмы поднятия, топология Зарисского, геометрические свойства гомоморфизмов алгебр.
- Алгебраические многообразия. Отделимость. Свойства проективных многообразий, собственность. Рациональные функции и рациональные морфизмы.
- Размерность. Размерности подмногообразий и слоёв морфизмов. Вычисление размерностей проективных многообразий.
- Векторные расслоения и пучки их сечений. Векторные расслоения на проективной прямой. Линейные системы, обратимые пучки и дивизоры, группа Пикара.
- Если позволит время: (ко)касательные и (ко)нормальные пространства и конусы, гладкость, раздутие. Точная последовательность Эйлера на грассманиане.

УЧЕБНИКИ:

- А. Л. Городенцев, Алгебра – 2.
  http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.
- А. Л. Городенцев. Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.
  http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/giag_ru/giag.pdf.

- А. Л. Городенцев. Algebraic Geometry. A Start Up Course, М., МЦНМО, 2006, http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/projgeom/tot-2006.ps.gz
- Дж. Харрис, Алгебраическая геометрия. Начальный курс, «МЦНМО».
- И. Р. Шафаревич, Основы алгебраической геометрии. МЦНМО, 2007.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка = 5·(доля решенных задач из листков) + 5·(доля решенных задач из итогового письменного экзамена)

Геометрия дифференциальных уравнений
простой межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: И. В. Вьюгин, В. А. Побережный.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Мы рассмотрим подход к работе с дифференциальными уравнениями, в том числе нелинейными, многомерными и с частными производными основанный на геометрическом языке распределений, симметрий, расслоений, связностей и калибровочных преобразований. Знания и умения полученные на этом курсе в дальнейшем будут полезны при изучении дифференциальной, симплектической и пуассоновой геометрии, уравнений в частных производных, гамильтоновой механики, теории интегрируемых систем и теории поля.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: стандартные курсы матанализа, комплексного анализа и анализа на многообразиях

ПРОГРАММА:

1. Существование и единственность решений аналитического дифференциального уравнения.
2. Особые точки дифференциальных уравнений.
3. Монодромия, асимптотики, инварианты, соотношение Фукса.
4. Фуксовы и регулярные уравнения и системы. Левелевское разложение.
5. Гипергеометрическое уравнение.
6. Расслоения и связности на римановых поверхностях.
7. Логарифмические связности.
8. Стабильность расслоений и пар.
9. Проблема Римана – Гильберта.

УЧЕБНИКИ:

- Болибрух А.А. «Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения.?? М., МЦНМО, 2000.
- Lychagin, V.V. «Lectures on geometry of differential equations 1», La Sapienza, Rome, 1993

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $(H + E)/2$ где H оценка за домашние задания и E щенка за экзамен

КОММЕНТАРИЙ: Матфизика

Геометрия и группы
простой аудиторный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: О. В. Шварцман.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Этот традиционный НИС , в основном рассчитанный на первокурсников, будет посвящен избранным вопросам геометрии и арифметики бинарных квадратичных форм с рациональными коэффициентами. В первую очередь, нас будут интересовать глубокие и красивые связи теории бинарных квадратичных форм с арифметикой и геометрией квадратичных полей $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $m \in \mathbb{Z}$.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первые полгода бакалавриата (курсы алгебры и геометрии)

ПРОГРАММА:

- Бинарные формы над полем рациональных чисел, эквивалентность бинарных форм.
- Бинарные формы с целыми коэффициентами. Представление чисел бинарными квадратичными формами. Группа целочисленных автоморфизмов бинарной формы с целыми коэффициентами.Теория приведения бинарных квадратичных форм и цепные дроби.
- Квадратичные поля. Кольцо целых квадратичного поля. Группа единиц и теорема Дирихле.Решетки, идеалы, порядки. Соответствие между решетками и квадратичными формами. Группа классов идеалов и группа классов бинарных квадратичных форм.

УЧЕБНИКИ:

- Э. Б. Винберг. Курс алгебры.
- З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. Теория чисел.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Планируется провести две контрольные и итоговый экзамен. Накопленная оценка равна полусумме оценок за две контрольные. Итоговая оценка равна полусумме накопленной оценки и оценки за экзамен. Округление происходит по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

Геометрия и динамика
простой межкампусный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский, В. А. Тиморин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Мы предполагаем рассказать слушателям о понятиях, методах и результатах из различных разделов геометрии, динамики и смежных областей. При этом нередко соображения из одной области будут использоваться в работе с объектами другой природы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Семинар рассчитан на студентов 1–2 курса бакалавриата.

ПРОГРАММА: нис состоит из почти независимых блоков в 1–3 занятия. Вот некоторые из тем, запланированные на этот год:

- символическое кодирование: связь отображения $x \mapsto \{2x\}$ на единичном отрезке с подбрасыванием монетки; как построить обратимую непрерывную динамическую систему с похожим поведением?
- энтропия динамической системы: как измерить «случайность» поведения системы?
- диффеоморфизмы окружности: классификация с точностью до сопряжения, инвариант классификации (число вращения), достаточность его для классификации, поведение числа вращения в семействах
- математические бильярды: все динамические системы от параболических до гиперболических в одной задаче
- цепные дроби: как динамика помогает теории чисел и причем тут геодезические?
- динамика рациональных отображений: фракталы, множества Жюлиа и другие звери
- геометрия классических групп
- элементы алгебраической комбинаторики.

УЧЕБНИКИ:

- А. Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений.М.:МЦНМО,2005.
- С. Табачников. Геометрия и биллиарды. Библиотека журнала «Реальная и хаотическая динамика», М.-Ижевск, 2011.
- Э. Артин. Геометрическая алгебра. М.: «Наука», 1969.
- Дж. Милнор. Комплексная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: В течение семестра проводятся 2–3 небольшие проверочные работы по изученному материалу, в конце семестра — устный экзамен в виде обсуждения решений заранее выданных на дом задач, объединённых в блоки по темам проверочных работ. Итоговая оценка определяется по сумме оценок O_k за каждый из блоков. Успешно написанная проверочная работа за k-ю тему даёт студенту максимально возможное значение O_k и освобождает его от решения k-го блока задач экзамена. По согласованию с руководителями семинара студент может сделать доклад, за который студенту может быть досрочно выставлена итоговая оценка (как правило, «отлично»).

КОММЕНТАРИЙ: нис для младшекурсников, читается по-русски.

Графы на поверхностях
простой межкампусный курс для студентов 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Н. Я. Амбург.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Александр Гротендик образно и поэтично называл специальные графы на двумерных поверхностях *детскими рисунками*[1]. Изучение детских рисунков, с одной стороны, не требует никакой специальной подготовки и позволяет легко познакомиться с фундаментальными топологическими инвариантами графов и поверхностей, такими как род и эйлерова характеристика, а с другой стороны быстро приводит к задачам и понятиям, лежащим в самом сердце алгебраической геометрии, теории чисел и математической физики. Именно в работе с такими понятными каждому школьнику объектами, как детские рисунки, Гротендик[2] видел способ преодоления барьера чрезмерной сложности и техничности, отпугивающего талантливых молодых людей от изучения современной математики. В этом курсе мы начнём с самых с азов маломерной комбинаторной топологии и с разных точек зрения обсудим несколько красивых и наглядных задач, находящихся в центре самого пристального внимания математиков и физиков.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет

ПРОГРАММА:

- Классификация двумерных компактных связных поверхностей без края.
- Детские рисунки Гротендика. Формула Эйлера.
- Группа вращения ребер. Автоморфизмы детского рисунка.
- Математические бильярды. Намотки тора.
- Математический бильярд как Риманова поверхность.
- Многочлены Чебышева.
- Функции Белого.
- Гауссов интеграл и формула Вика.
- Матричные модели и ленточные графы.

УЧЕБНИКИ:

- Мищенко А.С., Фоменко А.Т., Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.
- Звонкин А.К., Ландо С.К., Графы на поверхностях и их приложения.
- Гальперин Г.А., Земляков А.Н., Математические бильярды.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка складывается из баллов за решение домашних задач по формуле min(10, сумма баллов за домашние задачи).

КОММЕНТАРИЙ: этот курс повторяет прошлогодний курс «Графы на поверхностях».

---

[1] По французски *dessins d'enfant*.

[2] См. Grothendieck A., «Esquisse d'un programme», где намечено сразу несколько маршрутов, способных сократить путь от простого к сложному.

Группа кос, квантовые группы и приложения
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: П. Н. Пятов, П. А. Сапонов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Мы обсудим несколько связанных с R-матрицами сюжетов из теории групп кос и теории квантовых групп. R-матрица (в узком понимании этого термина) — это решение (кубического матричного) уравнения Янга – Бакстера. Сферы применения R-матриц очень разнообразны — от точно решаемых моделей квантовой механики, статистической физики и теории стохастических процессов до инвариантов узлов и квантовых матричных алгебр. Мы познакомим слушателей с алгебраическими структурами, порождающими R-матрицы, и используем R-матрицы для построения квантовых матричных алгебр и изучения их структурных свойств и представлений. В отличие от прежних лет, мы планируем уделить значительное время применению R-матриц для построения и исследования интегрируемых моделей квантовых спиновых цепочек Гейзенберга, а также моделей стохастических процессов диффузии и аннигиляции.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Основы алгебры, теории групп и теории представлений в объёме первых двух курсов бакалавриата. Все необходимые сведения по теории представлений, теории групп и алгебр Ли, а также алгебр Хопфа будут напоминаться в процессе занятий. Курс рассчитан на студентов 3 – 4 курса бакалавриата и магистрантов, но подойдёт и сильным второкурсникам.

ПРОГРАММА:

- Группа кос B_n, ее геометрическое и алгебраическое представления. Конечномерная фактор алгебра $\mathbb{C}[B_n]$ — алгебра Гекке, классификация ее неприводимых представления в духе Вершика – Окунькова.
- R-матричные представления группы кос, R-след, и их применения в построении инвариантов узлов и зацеплений.
- Коммутативная алгебра с пуассоновой структурой и ее квантование. Квантование алгебр функций на линейных группах Ли — RTT-алгебры. Приложение этих алгебр в построении трансфер-матриц и изучении интегралов движения квантовых спиновых цепочек Гейзенберга.
- Стохастические R-матрицы и их применение в описании марковских стохастических процессов диффузии и аннигиляции.
- Квантование алгебры функций на двойственном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n)$ — универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{gl}(n))$. Квадратичная скобка Пуассона на алгебре функций на $\mathfrak{gl}(n)^*$ и ее квантование — алгебра уравнения отражений. Структурные свойства квантовых матриц: их спектр и квантовая версия теоремы Гамильтона – Кэли. Конечномерные разложимые представления алгебры уравнения отражений.

УЧЕБНИКИ:

- O. Ogievetsky, P. Pyatov, «Lecture on Hecke algebras». Preprint CPT-2000/P.40762.
- J. S. Birman and T. E. Brendle, «Braids: a Survey», `arXiv:math/0409205[math.RT]`. In: «Handbook of Knot Theory», edited by: W. Menasco and M. Thistlethwaite, Elsevier B. V. 20053.
- Кассель К., «Квантовые группы», Фазис, 1999.
- A. Klimyk, K. Schmuedgen, «Quantum groups and their representations», Springer, 1997.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: По каждой теме курса будут выдаваться листки с задачами. Задания листков оцениваются по 10-балльной шкале. Для получения оценки 10 достаточно решить примерно 80% задач листка. Накопленная оценка $O_{\text{накоп}}$ — среднее арифметическое оценок за все листки. Если $O_{\text{накоп}} \geq 8$, итоговая оценка $O_{\text{итог}}$ получается округлением $O_{\text{накоп}}$ до целого по обычному правилу. В случае, если $O_{\text{накоп}} < 8$, студент обязан сдать экзамен, и тогда $O_{\text{итог}} = 0.5(O_{\text{накоп}} + O_{\text{экз}})$.

Группы и алгебры Ли
простой межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Л. Г. Рыбников, А. С. Хорошкин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Группы и алгебры Ли и их представления являются важнейшим инструментом в таких, казалось бы далеких друг от друга областях математики как алгебраическая топология, алгебраическая и дифференциальная геометрия, динамические системы и математическая физика. Данный курс является вводным курсом групп и алгебр Ли, начиная с базовых определений и примеров. Курс преследует двоякую цель: во-первых, овладение основными понятиями и общими конструкциями теории Ли, и, во-вторых, разбор первой конкретной содержательной задачи теории групп и алгебр Ли — классификации конечномерных представлений унитарной (а также полной линейной) группы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Необходимо хорошее владение линейной алгеброй и анализом на многообразиях, а также начальными понятиями топологии (включая понятия фундаментальной группы и локально-тривиального расслоения). Желательно (но не обязательно) знание теории представлений конечных групп (теорема Машке и ортогональность характеров).

ПРОГРАММА:

- Определение и примеры групп Ли. Действие группы Ли на многообразии. Замкнутые подгруппы и однородные пространства. Связные группы Ли и группа компонент.
- Определение и примеры алгебр Ли. Алгебра Ли группы Ли. Формальная группа Ли. Инвариантные векторные поля. Экспоненциальное отображение.
- Гомоморфизмы групп Ли. Касательный гомоморфизм алгебр Ли. Теорема существования и единственности гомоморфизма. Односвязные группы Ли. Теорема существования (без доказательства) и единственности связной односвязной группы Ли с данной алгеброй Ли.
- Представления групп и алгебр Ли. Универсальная обертывающая алгебра. Теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта. Коумножение в универсальной обертывающей алгебре и тензорное произведение представлений.
- Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Оператор Казимира.
- Мера Хаара. Представления компактных групп Ли: полная приводимость и ортогональность характеров. Представления группы Ли SU_2.
- Гармонический анализ на двумерной и трехмерной сфере.
- Представления унитарной (полной линейной) группы: старшие веса.
- Представления унитарной (полной линейной) группы: формула Вейля для характера.
- Формула Вейля для размерности. Тождества с полиномами Шура. Полустандартные таблицы Юнга.

УЧЕБНИКИ:

[K] Alexander Kirillov Jr, «Introduction to Lie Groups and Lie Algebras».

[VO] Э.Б.Винберг, А.Л.Онищик, «Семинар по группам Ли и алгебраическим группам».

[FH] Уильям Фултон, Джо Харрис, «Теория представлений. Начальный курс».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле $\min(10,\ 0.4\,E + 0.4\,H + 0.2\,C + 0.2\,M)$, где E — оценка за письменный экзамен в конце семестра, H — средняя оценка за домашние задания, C — оценка за устный коллоквиум в середине семестра, M — оценка за письменную контрольную работу в середине семестра (все оценки по 10-балльной шкале).

КОММЕНТАРИЙ: Лекции читает Л. Г. Рыбников, семинарские занятия ведёт А. С. Хорошкин. Данный курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Динамические системы
трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Ю. С. Ильяшенко, И. С. Шилин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар посвящён теории динамических систем в ее разных аспектах: многомерные динамические системы и хаос, теория аттракторов, дифференциальные уравнения на плоскости, комплексные дифференциальные уравнения, теория бифуркаций. Семинар преследует две цели: научить младших участников азам перечисленных теорий; вовлечь всех участников в современные исследования.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Математический анализ и дифференциальные уравнения.

ПРОГРАММА: Мозаика из перечисленных выше теорий.

УЧЕБНИКИ:

- Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.
- Арнольд В. Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений.
- Ильяшенко Ю., Ли Вейгу. Нелокальные бифуркации.
- Ильяшенко Ю., Яковенко С. Аналитическая теория дифференциальных уравнений.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 40% за посещение, 20% за активность, 40% за один доклад в году.

Избранные главы дискретной математики
простой межкампусный аудиторный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: И. В. Артамкин, Н. Я. Амбург.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Под дискретной математикой в нашей стране обычно понимают собрание разрозненных математических сюжетов, оказавшихся полезными в информатике или смежных прикладных областях. Некоторые из этих сюжетов входят в обязательные курсы математической логики и дискретной математики, читаемые в бакалавриате. На нашем семинаре обсуждаются не вошедшие в эти курсы конструкции, имеющие, тем не менее, заметное значение как в математике, так и в приложениях.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

- Булевы функции и теорема Поста о функциональной полноте. Эта теорема даёт эффективный ответ на следующий вопрос: можно ли любую булеву функцию (от любого числа переменных) выразить с помощью операции композиции через заданный набор функций. Удивительно, что на такой вопрос имеется простой и содержательный ответ, позволяющий, например, придумать функцию от двух переменных, через которую можно выразить любую функцию.

- Конечные поля. Теорема о том, что мультипликативная группа конечного поля является циклической, позволяет строить длинные периодические последовательности, повсеместно используемые в радиолокации, системах опознавания «свой-чужой» и т.д.

- Теорема Форда – Фалкерсона о максимальном потоке в транспортной сети. Речь идет о такой задаче: имеется некоторая сеть дорог (трубопроводов), соединяющих пункты А и Б. У каждой дороги (трубы) есть своя максимальная пропускная способность — наибольшее число автомобилей (баррелей нефти) которые могут пройти по этой дороге (трубе) за час. Требуется организовать движение (перекачку нефти) таким образом, чтобы общее число автомобилей (баррелей нефти), попадающее за час из А в Б, было максимально возможным. Оказывается, многие важные результаты и алгоритмы теории графов, как прикладные, так и чисто математические, связаны с этим кругом идей.

УЧЕБНИКИ:

1. Ф. Харири. Теория графов. М.: УРСС, 2003.

2. В. В. Белов, Е. М. Воробьев, В. Е. Шаталов. Теория графов. М.: Высш. школа, 1976.

3. М. Свами, К. Тхулалираман. Графы, сети и алгоритмы. М: Мир, 1984.

4. А. И. Кострикин. Основы алгебры.

5. Барти, Биркгоф. Современная прикладная алгебра. М. 1976.

6. А. И. Сирота, Ю. И. Худак. Основы дискретной математики. Ч. 1. М. 2010.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка совпадает с накопленной. Основу накопленной оценки составляет индивидуальное письменное домашнее задание, оцениваемое от 0 до 7; оценка 6 или 7 за вовремя сданное задание может быть повышена за счет дополнительных баллов, начисляемых за рассказ решений задач на семинаре (от 0,5 до 1 балла за задачу в зависимости от ее сложности) и за аудиторную контрольную работу.

Избранные главы математической экономики
трудный межкампусный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. И. Левин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Курс ориентирован на студентов 3 – 4 курса бакалавриата, студентов магистратуры и аспирантов, а также всех интересующихся современными проблемами экономической теории и применением математических моделей для исследования социально-экономических систем. Предполагается ознакомить студентов с основными концепциями современной экономической теории и обсудить актуальные вопросы конструирования и использования математических моделей для принятия экономических и политических, индивидуальных и коллективных решений в условиях ограниченной рациональности, асимметрии информации и рентоориентированного поведения. Наряду с теоретическими моделями будут рассмотрены прикладные социально-экономические модели и элементы поведенческой и цифровой экономик. Одна из задач курса — научить пользоваться математическим инструментарием для разработки и исследования социально-экономических и политэкономических явлений. Курс основывается на современных исследованиях, в том числе, на работах лектора.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: базовые курсы первых двух лет бакалавриата.

ПРОГРАММА:

- Введение в науку экономику. «Экономика — это интересно!». Примеры экономических «парадоксов», иллюзий и ошибочных решений.
- Модели экономического равновесия и неравновесия. Экономика дефицита, очередей и привилегий.
- Элементы теории игр. Ассимметричная и неполная информация.
- Неопределенность и риск. Равновесие на финансовых рынках.
- Экономика общественного сектора, семьи и «сект».
- Теневые рынки, «экономика джунглей», модели аддиктивного поведения.
- Математические модели экономики коррупции и борьбы за ренту.
- Экономика институтов. Нормы, традиции и мораль.
- Модели международной торговли и международной политики.
- Эволюционная экономика. Диффузия инноваций и «созидательное разрушение».
- Модели экономического роста и развития.
- Экономика знаний и интернет-экономика.

УЧЕБНИКИ:

1. А. Мас – Коллелл, М. Уинстон, Дж. Грин. Микроэкономическая теория. М.: Дело, 2016.
2. А. Хилман. Государство и экономическая политика. Возможности и ограничения управления. М.: Изд. Дом ГУ ВШЭ, 2009.
3. М. И. Левин, В.Л. Макаров, А. М. Рубинов. Математические модели экономического взаимодействия. М.: Физматлит, 1993.

А также статьи, актуальные на момент чтения спецкурса.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: форма контроля — реферат, оценивающийся по 10-бальной шкале и по шкале «плохо, удовлетворительно, хорошо, отлично».

Дополнительные главы римановой геометрии
трудный межкампусный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. О. Медведев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Риманова геометрия является одной из фундаментальных математических дисциплин. Обычно изложение её основ входит в курс по дифференциальной геометрии. При этом множество важных и красивых результатов, таких как теоремы сравнения и теорема о четверть-зажатой сфере, совсем не обсуждается. Целью курса является восполнение этого пробела.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Топология (гомеоморфизмы, диффеоморфизмы, гомотопии, фундаментальная группа, гомологии), анализ (непрерывные и гладкие отображения), дифференциальная геометрия (гладкое многообразие, касательное пространство, производная Ли, риманова метрика, связность Леви-Чивиты, тензор Римана)

ПРОГРАММА:

1. Теория геодезических в римановом многообразии.
2. Полные римановы многообразия.
3. Римановы многообразия неположительной кривизны.
4. Теоремы сравнения.
5. Теорема о сфере.
6. Элементы теории минимальных подмногообразий (если позволит время).
7. Элементы спектральной геометрии (если позволит время).

УЧЕБНИКИ:

- М. до Кармо, «Риманова геометрия».
- Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, «Ведение в риманову геометрию».
- S.-T. Yau, R. Schoen, «Lectures on Differential Geometry».

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка вычисляется по формуле $0,4M + 0,6F$, где $M-$ процент решённых задач на промежуточном экзамене и $F-$ процент решённых задач на финальном экзамене.

КОММЕНТАРИЙ: Курс может быть прочитан как на русском языке, так и на английском или французском языках

Интегрируемые системы как системы УрЧП с бесконечномерной алгеброй симметрий

трудный межкампусный НИС на английском языке для 3-го курса и старше

(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Ю. Буряк.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Понятие интегрируемой системы допускает различные толкования. В нашем курсе мы в основном сконцентрируемся на подходе, определяющем интегрируемую систему как систему уравнений в частных производных, обладающую бесконечномерной алгеброй инфинитезимальных симметрий. Что касается класса уравнений в частных производных, мы будем рассматривать системы эволюционных уравнений в частных производных с одной пространственной переменной. Мы обсудим классические примеры таких интегрируемых систем, приложения в перечислительной геометрии и вопросы классификации.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Линейная алгебра Математический анализ функций многих переменных Анализ на многообразиях Дифференциальная геометрия

ПРОГРАММА: 1. Уравнение Кортевега - де Фриза (КдФ), конструкции решений. 2. Алгебра псевдодифференциальных операторов, конструкция иерархии КдФ и, более общо, иерахии Кадомцева - Петвиашвили (иерахии КП). 3. Геометрический подход к построению решений иерахии КП с помощью бесконечномерного грассманиана. 4. Приложение иерархии КП к перечислительной геометрии: числа Гурвица. 5. Понятие гамильтоновой структуры, скобки Пуассона, скобка Схоутена. 6. Бигамильтонова структура иерархии КдФ и иерахий Гельфанда - Дикого. 7. Многообразия Дубровина - Фробениуса, системы гидродинамического типа, их дисперсионные деформации. 8*. Теорема о классификации скобок Пуассона гидродинамического типа.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Письменный домашний экзамен в конце курса

Квантовая механика
трудный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. В. Лосяков, А. Г. Семёнов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Продвинутый курс квантовой механики, в котором основные принципы квантовой теории дополняются и применяются для изучения конкретных физических систем. Предлагаются современные методы исследования квантовых систем - построение интегрируемых потенциалов, интеграл по траекториям, вводятся концепции матрицы плотности и эффективного действия. Курс предполагает переход к рассмотрению свободных полевых теорий, их каноническому квантованию, обсуждению отличия квантовой механики от квантовой теории поля.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Курс «Введение в квантовую теорию» или сданный в бакалавриате хорошего университета курс «Квантовая механика».

ПРОГРАММА:

1. Введение. Основные принципы квантовой теории.
2. Движение электрона во внешних электромагнитных полях. Уравнение Паули. Квантование электрона в однородном и постоянном магнитном поле. Уровни Ландау. Атом водорода во внешнем поле. Теория возмущений.
3. Солитонные потенциалы, их построение и свойства. Связь с интегрируемыми системами.
4. Движение частицы в периодическом потенциале. Зонная структура.
5. Системы тождественных частиц. Бозоны и фермионы. Фоковские пространства фермионов и бозонов.
6. Квантовая система в окружении. Концепция матрицы плотности, ее вычисление интегралом по траекториям. Формула Фейнмана – Каца.
7. Динамика квантовой теории и метод функционального интеграла.
8. Модель трения Калдейры – Легетта. Эффективное действие. Квазиклассическое приближение.
9. Квантование свободного электромагнитного поля как калибровочной теории. Излучение абсолютно черного тела.

УЧЕБНИКИ: П. Дирак, Принципы квантовой механики, 1979; Р. Фейнман, Статистическая механика; П. В. Елютин, В. Д. Кривченков, Квантовая механика с задачами.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка = накопленная = результат трех контрольных и одного коллоквиума

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Квантовая теория поля
трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Г. Семёнов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: В настоящее время квантовая теория поля является основным средством описания явлений происходящих в микромире: взаимодействия элементарных частиц, строение адронов и т. п. Её методы широко используются и в других областях теоретической физики: конденсированное состояние вещества, статистическая механика, теория турбулентности и др. Помимо этого, квантовая теория поля служит важнейшим стимулом для развития множества современных математических исследований. Курс посвящён изучению основных идей и методов квантовой теории поля, а также обсуждению применения её подходов к различным областям современной теоретической и математической физики. Будет рассказано о квантовании скалярных и калибровочный теорий, методе функционального интегрирования, построении теории возмущений и диаграммах Фейнмана, $(1+1)$-мерных точно решаемых теориях, а так же о применении этих подходов в различных областях современной науки.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Гамильтонова механика, Уравнения с частными производными, Группы и алгебры Ли, Классическая теория поля, Квантовая механика.

ПРОГРАММА:

- Теория поля, симметрии, физические реализации.
- Скалярное поле и его квантование (операторный подход).
- Наблюдаемые и S-матрица.
- Метод функционального интегрирования.
- Ряд теории возмущений и построение Фейнмановских диаграмм.
- Калибровочные поля и особенности их квантования.
- Абелевы и неабелевы теории, трюк Фаддеева – Попова.
- Фермионы в квантовой теории поля.
- Бесконечности в квантовой теории поля и методы работы с ними.
- Физические эффекты в КЭД и модельных системах.
- $(1+1)$-мерные системы.
- Применение методов квантовой теории поля в смежных областях.
- Интересные непертурбативные явления в модельных системах (при наличии времени).

УЧЕБНИКИ:

1. М. Пескин, Д. Шредер. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001.
2. K. Huang. Quantum Field Theory. WILLEY-VCH, 2010.
3. A. M. Tsvelik. Quantum Filed Theory in Condensed Matter Physics. CUP, 2003.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: оценка равна $0.4\,H + 0.6\,E$, где H — средняя оценка по всем домашним контрольным в семестре, а E — оценка за экзамен. Округление в меньшую сторону, но на экзамене есть возможность для повышения оценки путём обсуждения и решения задач.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика». Детальное содержание курса будет зависеть от состава и уровня слушателей.

Классифицирующие пространства
трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. Э. Казарян.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Идея классифицирующих пространств, или, говоря современным языком, спектров — одна из главных идей современного взгляда на всю алгебраическую топологию. Классифицирующие пространства — такие пространства, гомотопические классы непрерывных отображений в которые классифицируют большинство известных гомотопических инвариантов. Это пространства Эйленберга-Маклейна для когомологий, грассманианы для К-теории, пространства Тома для кобордизмов, и многие другие. Соответственно, исследование связей гомотопиеских инвариантов и операций над ними сводится к исследованию конкретных пространств.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Требуется знакомство с теорией гомологий и когомологий (клеточные гомологии, гомологии с коэффициентами, умножение в когомологиях). Знакомство с элементами гомологической алгебры полезно, но не является строго обязательным

ПРОГРАММА:

1. Гомологическая спектральная последовательность фильтрации и расслоения. Умножение в когомологической спектральной последовательсности расслоения.
2. Грассманианы как классифицирующие пространства векторных расслоений. Характеристические классы. Классы Черна, Штиффеля-Уитни, и Эйлера-Понтрягина
3. Расслоения Серра и связанные с ними спектральные последовательности. Стабильная эквивалентность длинной точной последовательности и спектральной последовательсности. Трансгрессия.
4. Пространства $K(\mathbb{Z}_2, n)$ как классифицирующие пространства $\mathbb{Z}_2$-когомологий. Операции. Квадраты Стинрода и алгебра Стинрода.
5. Кобордизмы и конструкция Тома. Характеристические числа и характер Черна-Дольда.
6. Формула У, гомотопическая инвариантность классов Штифффеля-Уитни и соотношения между характеристическими числами вещественных многообразий.
7. Применения спектральной последовательности Серра для вычисления гомотопических групп сфер (первые нетривиальные примеры)

УЧЕБНИКИ:

[ФФ] Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии.

[S] Свитцер Роберт М. Алгебраическая топология - гомотопии и гомологии

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: вычисляется по формуле $(0.5M+0.7E)/10$, где M – процентная доля решенных задач промежуточной контрольной работы и E – письменного экзамена.

Кластерные Пуассоновы многообразия
простой межкампусный аудиторный проект на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. Г. Горбунов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Кластерные многообразия, введенные Фоминым и Зелевинским, представляют собой коммутативные кольца с единицей и без делителей нуля, снабженные выделенным семейством образующих (кластерных переменных), сгруппированных в подмножества (кластеры) одинаковой мощности, связанные специального вида преобразованиями (кластерными преобразованиями). Первоначально они были введены в попытке создать алгебраическую и комбинаторную основу для изучения полной положительности в полупростых группах. В случае GL_n понятие полной положительности совпадает с классическим, впервые введенным Гантмахером и Крейном. С тех пор теория кластерных алгебр стала свидетелем впечатляющего роста из-за множества обнаруженных связей с широким кругом дисциплин, включая теорию представлений колчанов, конечномерные алгебры и категоризацию; дискретные динамические системы; пространства Тейхмюллера и высшие пространства Тейхмюллера; комбинаторика и изучение комбинаторных многогранников; коммутативная и некоммутативная алгебраическая геометрия; проективные конфигурации и их тропические аналоги; изучение условий устойчивости в смысле Бриджеланда, инвариантов Дональдсона – Томаса; Пуассонова геометрия и теория интегрируемых систем. Цель курса — дать введение в теорию кластерных многообразий Пуассона.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Курсы алгебры и топологии.

ПРОГРАММА:

1. Идея положительного объекта в математике. Положительные матрицы как основной пример. Теорема Уитни о конусе положительных матриц.
2. Положительность в смысле Люстига. Положительность в группе унипотентных матриц как основной пример. Клетки Брюа.
3. Кластерные координаты на кольце рациональных функций на унипотентной группе и координаты Плюккера. Определение кластерного многообразия.
4. Структура кластерного многообразия на кольце функций на многообразии Грассмана.
5. Пуассоновы структуры совместимые со структурой кластерного многообразия.
6. Пуассонова кластерная структура на многообразии Грассмана.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Экзамен будет состоять из доклада на тему связанную с темой курса

Комбинаторика, теория представлений и алгебраическая геометрия
трудный проект для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Б. Л. Фейгин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Комбинаторика — важная и интересная часть математики. В комбинаторике много собственных содержательных проблем и она ими успешно занимается. Однако комбинаторные задачи возникают и в других областях математики. Происходит это по понятной причине. Например, алгебраическая геометрия — это наука, оперирующая с понятиями и идеями. Но всё-таки математика это только частично философия, а потому появляется и желание и необходимость что-то сосчитать. Тут-то и появляются комбинаторные задачи. Взаимодействие какой-нибудь области с комбинаторикой приводит часто к очень интересным последствиям. Возникают новые задачи, а иногда очень неожиданный взгляд на старые классические комбинаторные проблемы. Проект — это разбор серии проблем такого типа. Среди них есть простые, доступные первокурсникам, а есть более сложные, где алгебраическая геометрия или теория представлений или и то и другое присутствуют в явном виде. Проект в сильной степени перекликается с проектом «Конформная теория поля и теория представлений».

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

1. Биномиальные коэффициенты и q-биномиальные коэффициенты. q-треугольник Паскаля. Многочлены Гаусса и унимодальное свойство. Грассманианы над конечными полями. Разбиения грассманианов на клетки Шуберта.

2. Диаграммы Юнга. Полубесконечные формы и комбинаторное доказательство тождества Якоби. Тождества Гаусса и Эйлера.

3. Тождество Эйлера и его финитизация. Альтернированные суммы q-биномиальных коэффициентов. Обобщённые тругольники Паскаля и альтернированные суммы элементов в строчках. Обобщения тождества Эйлера и финитизаций.

4. Тождество Роджерса – Рамануджана и его финитизации. Доказательсво Шура. Другое доказательство, использующее разностные уравнения.

5. Формула Бриона и ее связи с торической геометрией. Комбинаторные приложения формул Бриона.

6. Обобщения тождеств Роджерса – Рамануджана. Тождества Гордона, доказательство, использующее формулу Бриона.

7. Алгебро-геометрическая интерпретация тождеств Гордона. Формулы Бриона и Формулы Лефшеца.

8. Многочлены Шура и Холла.Основные свойства и алгебро-геометрические интерпретации. Знакопеременные формулы. Формулы Вейля и Лефшеца для многообразия флагов.

9. Фильтрации на пространствах симметрических полиномов. Изучение многообразий «застав» и «Ламонов» и построение алгебр функций на этих многообразиях. Формулировка и доказательство полной версии формулы Гордона.

10. Числа Каталана. q- и q-t-версии. Пути Дика и альтернированная формула для чисел Каталана. Связь со схемами Гильберта и ещё одна знакопеременная формула.

11. Схемы Гильберта и парковочные функции.

УЧЕБНИКИ: будут предлагаться по ходу дела.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: студент разбирается в конкретном вопросе, например, в доказательстве той или иной формулы, и пишет небольшой текст с этим доказательством и мотивировкой своей деятельности.

КОММЕНТАРИЙ: В проекте может участвовать не более пяти студентов.

Комплексная геометрия
трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Пенской.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Комплексная геометрия изучает комплексно аналитические многообразия и голоморфные векторные расслоения. Будучи тесно связанной с дифференциальной и алгебраической геометрией, алгебраической топологией, геометрическим анализом и математической физикой, комплексная геометрия является красивой привлекательной и стремительно развивающейся областью в самом центре современной математики. Этот курс является фундаментом для дальнейшего самостоятельного изучения комплексной геометрии по предлагаемой ниже литературе.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: 3-4 года бакалавриата (гладкие многообразия, дифференциальная геометрия, комплексный анализ одной переменной, алгебраическая топология).

ПРОГРАММА:

- Основы теории функций нескольких комплексных переменных
- Пучки и их когомологии
- Области в $\mathbb{C}^n$: дифференциальные формы, комплексные и эрмитовы структуры.
- Комплексные многообразия, голоморфные векторные расслоения, линейные расслоения и дивизоры, раздутия, элементы дифференциальной геометрии.
- Кэлеровы многообразия, теория Ходжа, теоремы Лефшеца.
- Дифференциальная геометрия: эрмитовы векторные расслоения, двойственность Серра, связности, кривизна, классы Чженя, голономия.
- Теоремы Хирцебруха – Римана – Роха и Кодаиры.
- Деформации комплексных структур.

УЧЕБНИКИ:

- D. Huybrechts, Complex Geometry — An Introduction
- П. Гриффитс, Дж. Харрис, Принципы алгебраической геометрии, в 2-х томах.
- К. Вуазен, Теория Ходжа и комплексная алгебраическая геометрия, в 2-х томах.
- А. Бессе, Многообразия Эйнштейна, в 2-х томах.
- Р. Уэллс, Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.

КОММЕНТАРИЙ: В качестве основного учебника планируется книга Хёйбрехтса, являющаяся расширенным изложением годового курса лекций, прочитанного в Университете Кёльна. Мы надеемся изучить её за один семестр при двух занятиях в неделю, предложив часть материала в виде задач для самостоятельного решения.

Конформная теория поля и теория представлений
трудный проект для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Б. Л. Фейгин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Конформная теория поля возникла как наука физическая, но теперь это, скорее, часть математики. Теория замечательная и очень интересная, однако изучать её довольно трудно. Проект содержит серию конкретных относительно небольших тем, где требуется разобраться в каких-то идеях и понятиях, а потом что-то посчитать. Иногда для этого потребуется доказать естественно возникающее комбинаторное тождество или вычислить характер чего-нибудь. Проект в сильной степени перекликается с проектом «Комбинаторика, теория представлений и алгебраическая геометрия».

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: начальный курс алгебры, включающий теорию представлений; группы и алгебры Ли – 1.

ПРОГРАММА:

1. Представления афинных алгебр и их характеры. Выражения характеров через θ-функции и модулярные свойства.
2. Представления алгебры Вирасоро. Модули Верма и бозонные модули. Доказательство формул Каца и вычисление детерминанта формы Шаповалова.
3. Примарные поля и операторное произведение. Доказательство формул Каца, использующее операторное произведение и язык конформной теории поля.
4. Конформные теории, связанные с алгебрами токов и алгеброй Вирасоро — основные понятия.
5. Минимальные модели конформных теорий, связанных с алгебрами токов и Вирасоро. Сингулярные носители. Теорема о сингулярных носителях представлений из минимальных теорий.
6. Алгебра Верлинде и ее вычисление в простейших случаях.
7. Решетчатая вертексная алгебра как простейший пример вертексной алгебры.
8. Коинварианты представлений вертексных алгебр. Разбор простейших случаев.
9. Локальные и глобальные модули Вейля.

УЧЕБНИКИ: будут предлагаться по ходу дела.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: студент разбирается в конкретном вопросе, например, в доказательстве той или иной формулы, и пишет небольшой текст с этим доказательством и мотивировкой своей деятельности.

КОММЕНТАРИЙ: В проекте может участвовать не более пяти студентов.

Критические точки функций и их приложения
простой межкампусный курс для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Васильев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Критическая точка дифференцируемой функции — это точка, где обращается в нуль ее дифференциал. У типичной функции все критические точки морсовские и описываются леммой Морса, но существует множество более сложных типов критических точек, неизбежно появляющихся в семействах функций, в частности при изучении особенностей волновых фронтов, каустик («солнечных зайчиков»), множеств уплощения поверхностей, и т.п. Многие важные функции математической физики задаются интегралами, зависящими от параметров. Их качественное поведение определяется изменением некритических множеств уровня комплексных гладких функций вблизи критических точек, и описывается операторами монодромии на группе контуров интегрирования, связанными с этими особыми точками и вычисляемыми в терминах локальных свойств функции в их окрестности. Ключевые понятия и факты, которые будут рассказаны:

1. Лемма Морса и функции общего положения

2. Неморсовские критические точки, их инварианты, начало классификации и нормальные формы.

3. Деформация критической точки. Бифуркационное множество деформации. Типичные особенности дискриминантов и волновые фронты. Фокальное множество гиперповерхности. Версальные деформации.

4. Геометрия и топология неособого множества уровня комплексной гладкой функции вблизи ее критической точки. Число Милнора.

5. Оператор монодромии и группа монодромии некритического множества уровня комплексной гладкой функции и ветвление интегралов, зависящих от параметра. Формула Пикара – Лефшеца. Форма пересечения и ее вычисление. Приложения в интегральной геометрии и математической физике.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Для понимания достаточно материала первых двух курсов бакалавриата (анализ, алгебра, гладкие многообразия, элементарная топология, ТФКП). В случае необходимости (если окажется, что недостаточно сведений из курса «гладкие многообразия»), будут рассказаны простейшие дополнительные понятия теории гомологий.

ПРОГРАММА: Невырожденные (морсовские) критические точки. Сигнатура, индекс Морса. Функция вблизи морсовской критической точки эквивалентна своей квадратичной части. Морсовские и строго морсовские функции. Почти все функции являются морсовскими. Топологические приложения: изучение топологии многообразия в терминах функции Морса на нем. Перестройка рождения-гибели пары морсовских точек.

Классификация и инварианты неморсовских критических точек. Параметрическая лемма Морса: отщепление квадратичной части. Начало классификации: простые критические точки, коранг, число Милнора, модальность. Локальная алгебра особенности. Приведение критической точки к нормальной форме диффеоморфизмами пространства аргументов. Однородные и квазиоднородные критические точки. Техника диаграмм Ньютона.

Параметрические семейства и деформации особенностей. Бифуркационные множества: дискриминант, каустика, множество Максвелла, множество Стокса. Волновые фронты, солнечные зайчики, фокальное множество поверхности.

Топология множества уровня комплексных функций вблизи критических точек. Слой Милнора и его граница. Эквивалентность определений числа Милнора. Операторы монодромии и вариации. Исчезающие циклы. Формула Пикара-Лефшеца. Локальная группа монодромии. Наперстки Лефшеца. Диаграмма Дынкина особенности, методы ее вычисления.

Приложения монодромии в интегральной геометрии и физике: ветвление интегралов, зависящих от параметра (волновые функции, поверхностные потенциалы, осциллирующие интегралы, функции объема, гипергеометрические функции…)

УЧЕБНИКИ:

- В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде, «Особенности дифференцируемых отображений»
- В.И. Арнольд, В.А. Васильев, В.В. Горюнов, О.В. Ляшко, «Особенности. I. Локальная и глобальная теория».

На элементарном уровне вводная часть материала рассказывалась в курсах

https://www.mccme.ru/dubna/2015/courses/vassiliev.html

https://www.mccme.ru/dubna/2014/courses/vassiliev.htm.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $\min(10, 0.15(D_1+D_2+D_3+D_4)+0.4K_1+0.6K_2)$ где D_i — десятибалльная оценка за i-е из четырёх домашних заданий, K_1 и K_2 — за 1-ю и 2-ю контрольные работы.

Линейное программирование
простой межкампусный курс для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Колесников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Линейное программирование — раздел теории оптимизации, изучающих специальный класс задач — нахождение экстремумов линейных функций на выпуклых множествах (как конечномерных, так и бесконечномерных). Линейное программирование зародилось как прикладная дисциплина, с приложениями (в первую очередь) к экономике, но оно имеет глубокие связи со многими задачами анализа, геометрии, дискретной математики, а также численными методами и алгоритмами. Настоящий курс представляет собой введение в линейное программирование и ставит своей целью осветить многообразие связей и приложений линейного программирования.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ и линейная алгебра в объёме первого курса

ПРОГРАММА:

1. Линейное программирование. Постановка задачи и базовые свойства.
2. Классические задачи линейного программирования (задача о диете, транспортная задача и др.).
3. Элементы выпуклого анализа. Теорема Каратеодори, теорема об отделимости.
4. Выпуклые многогранники. Крайние точки. Теорема Бирхгофа о бистохастических матрицах.
5. Теорема о минимаксе.
6. Двойственность в линейном программировании.
7. Другие приложения минимакса. Двудольные графы (теоремы Кёнига, Холла). Игры с нулевой суммой.
8. Симплекс-метод.
9. Другие алгоритмы (обзорно).
10. Транспортные потоки в сетях. Теорема Форда – Фалькерсона.
11. Целочисленное линейное программирование.
12. Общая теорема о минимаксе*.
13. Непрерывная транспортная задача*. Метрика Канторовича – Рубинштейна*.

УЧЕБНИКИ: Основные учебники:

1. Evar D. Nering and Albert W. Tucker[1]. Linear Programs and Related Problems. (1993).
2. Robert J. Vanderbei. Linear Programming. Foundations and Extensions. (2001).
3. Пападимитроу Х., Стайглиц К., Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. 1982.

Дополнительное чтение

1. Lovasz L., Plummer M., Matching theory. (1985)
2. Villani C., Topics in optimal transportation (2003).
3. Циглер Г., Выпуклые многогранники. МЦНМО (2014).

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Albert_W._Tucker

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: В течение семестра студентам предлагается решать задачи из четырех листков. Экзамен состоит из двухчасовой контрольной работы с пятью задачами (по 2 балла за каждую). Окончательная оценка вычисляется по следующей формуле $E \cdot 0.4 + H \cdot 0.06$, где E — оценка за письменный экзамен (по 10-балльной шкале), а H — процент правильно решённых задач в течение семестра (округленный в сторону увеличения до числа, делящегося на 10). Для студентов, посещавших лекции в течение семестра, округление итоговой оценки производится в большую сторону, для посетивших менее половины лекций — в меньшую.

КОММЕНТАРИЙ: Для понимания некоторых (немногих) сюжетов курса желательно (но необязательно) знакомство с функциональным анализом.

Математика для прагматика
простой межкампусный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Хохлов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Практическое использование математических конструкций неизбежно связано с конечностью и дискретностью, в то время как изучение Математики во многом опирается на описания непрерывных объектов; полезно знать, как именно реализуются некоторые непрерывные конструкции на практике: появление цифровых стандартов привело к тому, что обработка непрерывных во времени сигналов стала типовой задачей для программистов. В курсе будут рассмотрены примеры распространённых математических моделей в их дискретных и непрерывных вариантах, соответствие формул и взаимосвязь эффектов, характерных для каждого варианта. Примеры будут объединены в несколько отдельных сюжетов, предполагается, что для большинства примеров будут просчитаны визуальные интерпретации.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики и топологии), плюс элементы функционального анализа (свойства пространств L_1, L_2 с примерами линейных операторов). Умение ориентироваться в библиотеках и написать несложный код на типовом интерпретаторе формул типа python (варианты: R, Matlab, …)

ПРОГРАММА:

1. Дифференциирование
    - Цифровая регистрация, импульсный базис и примеры искажений сигналов.
    - Оператор сдвига и его конечномерная модель, дифференцирование в дискретном времени и круговые частоты.
    - Формула замены координат от частотного базиса к импульсному и преобразование Фурье.
    - Быстрое преобразование Фурье и его версии для различных простых делителей. Идеи некоторых алгоритмов быстрого умножения
    - Предельные переходы, альясинг и связь с привычными из анализа формулами Фурье. Обобщения преобразования Фурье для функций пространства L_2 и обобщенных Функций
    - Частотные фильтры и их практическое построение (на уровне программного кода).
    - Теорема отсчетов Котельникова – Шеннона.
    - Преобразование Радона в $\mathbb{R}^2$ и компьютерная томография. Формулы обращения преобразования Радона.
    - Некорректные задачи и регуляризация решений.
    - Основные математические модели для реальных данных – связь со статистическими методами.
    - (Если будет время и интерес) Сигнал и шум, проблема отделения помех и теорема Шеннона. Что такое магнитно-резонансная томография: постановка задачи и алгоритмы.
2. Интегрирование
    - Принцип концентрации и его следствия.
    - Усреднение по множествам сигналов и интегрирование по множеству непрерывных функций на отрезке. Мера Винера и ее носители.
    - Практические модели естествознания, приводящие к интегрированию по функциональным пространствам.

- Свойства броуновских траекторий и примеры явных аналитических вычислений интегралов по броуновским траекториям. Связь интеграла по броуновским траекториям и интеграла Фейнмана.
- (Если будет время и интерес) Траектории случайного блуждания по решеткам размерностей 2, 3 и больше, ключевые отличия от одномерного случая. Связь с уравнениями математической физики.

3. Стохастический мир

- (при необходимости) Обзор некоторых методов вычислений в теории вероятностей — моменты, асимптотики, свойства смесей и т. п.
- Практические вычисления в стохастическом мире и что собственно можно проверить статистикой?
- Модели классической механики и марковские модели. Винеровский процесс и физическое броуновское движение.
- Стохастические уравнения, уравнение Ито и лемма Ито. Вычисления компьютерные и аналитические.
- Широкоупотребимые стохастические модели и представление их решений. Диффузионные уравнения.
- Стохастические интегралы и отличительная специфика формул стохастического мира от формул математического анализа.

УЧЕБНИКИ:

1. E. Candes «Elements of Modern Signal Processing» https://statweb.stanford.edu/~candes/teaching/math262/Lectures/
2. В. Зорич «Математический анализ задач естествознания»
3. G. Johnson, M. Lapidus. «The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus»
4. С. Степанов. «Стохастический мир», https://www.twirpx.com/file/2483780/

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 50% за итоговый экзамен и 50% за выполнение самостоятельных домашних работ.

Математика процессов в ранней вселенной и задачи гравитации.
простой межкампусный аудиторный проект для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: К. П. Зыбин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: В курсе предполагается изложить современное состояние знаний о Вселенной. Будет обсуждаться: динамика «темной материи», приводящая к возникновению нелинейных структур, будет изложена теория инфляции вселенной, рассмотрена теория генерации спектра первичных флуктуаций.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: матанализ, дифференциальные уравнения, ТФКП.

ПРОГРАММА:

1. Однородная и изотропная вселенная 5 лекционных часов, 13 — самостоятельная работа. Излагаются факты, согласно которым необходимо рассматривать все задачи эволюции на фоне однородно и изотропно расширяющейся вселенной. Рассматриваются решения Фридмана для расширяющейся вселенной.

2. Горячая вселенная, краткая тепловая история 6 лекционных часов, 13 — самостоятельная работа. Показано, что факт наличия микроволнового излучения в расширяющейся вселенной приводит к широкому спектру физических задач. Тензор энергии-импульса для холодной материи и фотонного газа.

3. Процессы образования первичного состава химических элементов 6 лекционных часов, 13 — самостоятельная работа. Одной из важных задач является исследование эволюции состава химических элементов.

4. Неоднородности во вселенной, теория гравитационной неустойчивости 9 лекционных часов, 13 — самостоятельная работа. Исследуется линейная теория развития первичных возмущений. Линейная и нелинейная теория гравитационной неустойчивости.

5. Теория инфляции 6 лекционных часов, 13 — самостоятельная работа. Излагается современная теория инфляции, приводящая к однородной и изотропной вселенной. Скалярное поле в уравнении Эйнштейна.

6. Возникновение первичных флуктуаций 4 лекционных часа, 13 — самостоятельная работа. Исследуется задача генерации первичных возмущений на этапе инфляции.

УЧЕБНИКИ: Пиблс, Ф. Дж. Э «Структура Вселенной в больших масштабах» — Москва, Мир, 1983, Горбунов Д.С. Рубаков В.А «Введение в теорию ранней вселенной. Космологические возмущения» — УРСС 2010

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 5 баллов работа на семинаре, 5 баллов экзамен.

Математика физических явлений
простой межкампусный аудиторный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: П. И. Арсеев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Курс о связи реальных физических явлений и математических методов их описания, о возникновении определенных математических структур из законов физики, в первую очередь в механике, электростатике и электродинамике. В курсе обсуждаются такие вещи, как связь второго закона Ньютона с Лагранжевым формализмом, движение «по прямой» по криволинейной поверхности, поведение гироскопа, эквивалентность закона Кулона теореме Гаусса и т. д.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: желательно знание основ матанализа и понимание простых дифференциальных уравнений. Занятия рассчитаны скорее на студентов 2–3 курсов бакалавриата, но и подготовленные первокурсники не должны встретить серьёзных трудностей.

ПРОГРАММА:

1. Механика
    - Второй закон Ньютона — основа описания классического движения. Примеры динамики. Законы сохранения из уравнений движения.
    - От законов Ньютона к лагранжевой формулировке. Принцип наименьшего действия. Законы сохранения с точки зрения лагранжевого подхода.
    - «Свободное» движение в криволинейном пространстве. Движение по сфере и поверхностям вращения. Описание с помощью метрики.
    - Движение быстро вращающихся тел. Нетривиальность их свободного движения. «Антиинтуитивное» поведение гироскопа.
2. Электростатика
    - Закон Кулона как прямое следствие эксперимента. Понятие потока векторного поля. Эквивалентность теоремы Гаусса «экспериментальной» формулировке закона Кулона. Дивергенция векторного поля, дифференциальная формулировка закона Кулона. Уравнения Лапласа и Пуассона.
    - Решение задач электростатики с помощью теоремы Гаусса. Поле заряженных плоскостей и стержней. Понятие о двумерной и одномерной электростатике и специфических «законах Кулона». Заряды над поверхностью металла.
    - Электрическое поле в диэлектриках. Поверхностные заряды и граничные условия для электрического поля в неоднородной системе. Метод зарядов изображений — физическое решение задачи о нахождении решения дифференциального уравнения с граничными условиями.
3. Электродинамика
    - Взаимодействие токов. Экспериментальные законы Эрстеда и Ампера. Сила, действующая на ток в магнитном поле. Сила Лоренца. Движение частицы в магнитном поле.
    - Понятие векторного потенциала. Ротор векторного поля, формула Стокса. Свойства векторного потенциала, сравнение со скалярным потенциалом. Дифференциальная формулировка законов электромагнетизма при условии стационарности токов.
    - Лагранжиан частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем.

- Закон Фарадея, его интегральная и дифференциальная формулировки. Система уравнений Максвелла. Еще раз их физический смысл и математическая формулировка. Полный Лагранжиан электромагнитного поля — возможность вывода уравнений электродинамики из новых принципов.
- Уравнения электромагнитных волн из уравнений Максвелла. Электромагнитные волны в среде. Граничные условия на поверхности раздела двух сред.
- Отражение от поверхности раздела двух сред. Два метода решения задачи об отражении от плоскопараллельной пластины. Поверхностные волны
- Волноводы и резонаторы. Дискретные частоты собственных колебаний — путь к описанию полей как набора осцилляторов.

УЧЕБНИКИ:

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике — М.: Мир, 1967
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики — М.: Физматлит, 1974
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика — М.: Физматлит, 2004
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества — М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: студенты сдают задачи по двум спискам и отвечают на дополнительные вопросы. Начисление баллов следующее:

- N_1, от 0 до 10, за сданные в третьем модуле задачи
- Q_1, от 0 до 5, за ответы на дополнительные вопросы в третьем модуле
- N_2, от 0 до 10, за сданные в четвёртом модуле задачи
- Q_2, от 0 до 5, за ответы на дополнительные вопросы в четвёртом модуле
- W, от 0 до 5, за работу на занятиях.

Итоговая оценка $S = (N_1 + N_2 + Q_1 + Q_2 + W)/3$. Округление по стандартным правилам.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Математические основы квантовой механики
трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: П. А. Сапонов, П. Н. Пятов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Это — не требующее серьезной физической подготовки введение в квантовую механику для студентов-математиков. При моделировании квантовых явлений мы будем привлекать в качестве аргументов внутреннюю логику и естественность математических конструкций. Модели квантовой механики служили и продолжают служить источником вдохновения во многих разделах современной математики: функциональном анализе, теории представлений групп и алгебр Ли, деформационном и геометрическом квантовании, теории квантовых групп и др. Квантовая механика является важнейшим инструментом исследования явлений микромира и в настоящее время входит в обязательный образовательный минимум физиков-теоретиков и специалистов по математической физике.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Курс рассчитан на студентов 3–4 года бакалавриата и магистрантов, не имеющих физического образования. Специальных знаний по физике не требуется, хотя знакомство с механикой и классической теорией поля облегчит восприятие материала.

Необходимая математическая подготовка (в объеме базовых курсов 1-го и 2-го года бакалавриата):

- Лагранжева механика: конфигурационное и фазовое пространство механической модели, лагранжиан, уравнения Эйлера-Лагранжа, принцип наименьшего действия.

- Линейная алгебра: векторные пространства, скалярное произведение, линейные операторы, их собственные значения и собственные вектора.

- Теория вероятностей и математическая статистика: случайная величина, функция распределения, плотность вероятности, статистические моменты случайной величины (среднее, дисперсия и т. п.).

- Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.

- Математический анализ (вещественный и комплексный), в основном теория интегрирования (обычные и кратные интегралы) и преобразование Фурье.

Желательная дополнительная математическая подготовка:

- Знакомство с азами теории групп и алгебр Ли и их конечномерными матричными представлениями (хотя бы на примерах групп SU_2 и SO_3), базовые сведения о симметрической группе.

- Некоторые понятия функционального анализа: гильбертово пространство, линейные операторы в гильбертовом пространстве, эрмитовы и самосопряжённые операторы.

- Понятие об обобщённых функциях на пространстве финитных основных функций и пространстве быстроубывающих функций (пространстве Шварца), производная и преобразование Фурье обобщённой функции, дельта-функция Дирака и ее регуляризации.

При необходимости математические понятия (особенно из раздела дополнительной математической подготовки) будут напоминаться и вводиться на лекциях.

ПРОГРАММА:

1. Краткий обзор основных физических проблем, приведших к возникновению квантовой механики. Гамильтонов формализм классической механики, фазовое пространство состояний механической системы и пуассонова структура на нем.

2. Основные понятия квантовой механики. Гильбертово пространство состояний квантовой системы, спектры самосопряженных операторов как множество значений квантовых наблюдаемых, статистическая интерпретация. Элементы теории обобщенных функций. Уравнения движения квантовой системы в представлениях Шредингера и Гейзенберга.

3. Гармонический осциллятор, его координатное представление и полиномы Эрмита. Алгебра операторов рождения и уничтожения и представление осциллятора в пространстве Фока. Общая теория одномерного движения.

4. Трехмерное движение в центральном поле. Модель атома водорода. Сферические функции, полиномы Лаггера.

5. Группы симметрий квантово-механических систем и их представления в пространстве состояний, законы сохранения и интегралы движения. Угловой момент в квантовой механике. Спин квантовой частицы. Конечномерные представления алгебры Ли su(2).

6. Симметрическая группа и теория тождественных частиц. Статистики Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака, типы симметрий векторов состояний и диаграммы Юнга. Принцип запрета Паули и объяснение периодического закона Менделеева.

7. Интегрируемые модели квантовой механики: спиновые цепочки, понятие об алгебраическом анзаце Бете.

8. Релятивистская квантовая механика. Уравнение Дирака и квантование свободного фотонного поля.

УЧЕБНИКИ:

1. Л.Д. Фаддеев, О.А. Якубовский, «Лекции по квантовой механике для студентов-математиков», Издательство ЛГУ, 1980.

2. Brian C. Hall, «Quantum Theory for Mathematicians», Graduate Texts in Mathematics 267, Springer 2013.

3. В.В. Балашов, В.К. Долинов, «Курс квантовой механики», изд. РХД, Москва-Ижевск, 2001.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: оценка за курс = $0.6\cdot$«накопленная оценка»$+0.4\cdot$«оценка за экзамен». Здесь «оценка за экзамен» — целое число от 0 до 10, а «накопленная оценка» вычисляется по результатам решения задач из листков по формуле $100\,S/(9\,M)$, где S — фактически набранное количество баллов за решения задач, а M — максимально возможное число баллов за верное решение всех задач из всех листков. Обратите внимание, что накопленная оценка может быть больше 10 баллов. Если (до округления) она не менее 8 баллов, студент получает автомат за курс с этой оценкой. Округление в итоговой формуле происходит по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

Машинное обучение
трудный межкампусный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: И. В. Щуров.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: В 2019 году найдётся мало людей, которые бы не слышали о машинном обучении, но тех, кто понимает, что это такое, гораздо меньше. Машинное обучение используется в тех случаях, когда вам нужно научиться решать какой-то класс задач, для которого трудно написать явный алгоритм решения, но при этом можно найти множество примеров с правильными ответами. Так, невозможно представить себе написанный вручную алгоритм, который был бы способен отличить фотографию кошки от фотографии собаки, но если у вас есть достаточное количество фотографий тех и других, вы можете использовать машинное обучение, чтобы построить такой алгоритм автоматически.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: линейная алгебра, математический анализ (одномерный и многомерный), теория вероятностей — слушателей не должны пугать слова «гиперплоскость», «градиент», «плотность вероятности» и «ковариационная матрица». Мы также будем программировать — основным языком на курсе будет `Python 3`, желательно знать библиотеки `numpy` и `pandas`.

ПРОГРАММА: В курсе мы будем обсуждать разные методы машинного обучения — начиная с линейных регрессий и деревьев решений и заканчивая современными нейросетевыми архитектурами. Мы начнём с теоретической основы каждого метода, посмотрим, как он работает на простых примерах, а затем перейдём к практической работе с реальными данными.

1. Обзор задач машинного обучения. Постановка задачи «обучения с учителем» (supervised learning). Метод k ближайших соседей. Проблема переобучения. Проклятие размерности.
2. Регрессии и классификаторы. Линейные модели. Регуляризация.
3. Методы оптимизации. Градиентный спуск и его модификации.
4. Решающие деревья. Бутстрап и бэггинг. Случайные леса. Градиентный бустинг.
5. Метод опорных векторов.
6. Нейронные сети и глубокое обучение.
7. Задачи «обучения без учителя» (unsupervised learning): оценка плотности, кластеризация, снижение размерности. Semi-supervised learning.
8. Другие задачи машинного обучения.

УЧЕБНИКИ:

- Hastie T., Tibshirani R, Friedman J. The Elements of Statistical Learning (2nd edition). Springer, 2009.
- Murphy K. Machine Learning: A Probabilistic Perspective. MIT Press, 2012.
- Ian Goodfellow, Yoshua Bengio and Aaron Courville. Deep Learning. MIT Press, 2016.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка вычисляется как средневзвешенное от оценки за текущую работу (40%), оценки за контрольную работу (30%) и оценки за экзамен (30%). Оценка за текущую работу формируется как среднее оценок за домашние задания и другие формы текущего контроля. В число домашних заданий могут быть включены соревнования по машинному обучению. Итоговая оценка округляется арифметически, остальные оценки не округляются.

КОММЕНТАРИЙ: Вы можете посмотреть на страницу курса 2018–19 учебного года:
http://wiki.cs.hse.ru/?curid=15880\}.

Многогранники Ньютона и инварианты алгебраических многообразий
простой межкампусный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. М. Гусейн-Заде.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Целью курса является описание связи топологии комплексных алгебраических многообразий с многогранниками и диаграммами Ньютона задающих их систем уравнений. Будет обсуждаться количество решений системы уравнений в терминах многогранника Ньтона, эйлерова характеристика гиперповерхности или полного пересечений в тех же терминах. Основное внимание будет уделено получению соответствующих результатов с помощью торических компактификаций. Будут обсуждаться также локальные варианты таких задач — вычисление чисел Милнора и характеристических многочленов монодромии особенностей гиперповерхностей и полных пересечений в терминах диаграмм Ньютона с использованием торических разрешений.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Знакомство с основами (на уровне понятия) теории гладких многообразий и теории гомологий. Впрочем, все необходимые сведения будут напоминаться.

ПРОГРАММА:

1. Полиномиальные уравнения и многогранники Ньютона.
2. Количество решений полиномиальной системы уравнений с общим многогранником Ньютона.
3. Операции с выпуклыми многогранниками, смешанный объем.
4. Количество решений полиномиальной системы уравнений с разными многогранниками Ньютона.
5. Эйлерова характеристика алгебраической гиперповерхности или полного пересечения и многогранники Ньютона.
6. Топологические инварианты изолированных особых точек гиперповерхностей и полных пересечений.
7. Диаграммы Ньютона и разрешения особенностей.
8. Инварианты особых точек гиперповерхностей и полных пересечений в терминах диаграмм Ньютона.
9. (Возможное (при наличии времени) продолжение. Многочлен Ходжа – Делиня полуалгебраческого пространства. Многочлен Ходжа – Делиня многообразия, заданного системой полиномиальных уравнений, и многогранники Ньютона.)

УЧЕБНИКИ:

1. Дж.Милнор. Особые точки комплексных гиперповерхностей. Мир, 1971.
2. В.И.Арнольд, А.Н.Варченко, С.М.Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений. МЦНМО, 2009 г., Глава IV.
3. G.Ewald. Combinatorial convexity and algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, 168. Springer-Verlag, New York, 1996.
4. А.Г.Хованский, Многогранники Ньютона и торические многообразия, Функц. анализ и его прил., 11:4 (1977), 56–64.
5. А.Г.Хованский, Многогранники Ньютона и род полных пересечений, Функц. анализ и его прил., 12:1 (1978), 51–61.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Сумма баллов за решение задач в течение курса и баллов за экзамен (поровну).

Многообразия Дубровина – Фробениуса
простой межкампусный аудиторный НИС для 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. А. Басалаев, П. И. Дунин–Барковский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Курс посвящён многообразиям со структурой умножения в касательном пространстве. Важным классом таких многообразий являются введённые в 1992 г. Б. А. Дубровиным многообразия Дубровина – Фробениуса, на которых умножение в касательном пространстве удовлетворяет специальным условиям интегрируемости. Многообразия Дубровина – Фробениуса появляются в самых разных областях: теории инвариантов, теории особенностей, математической физике. Мы обсудим соответствующие примеры, но основной акцент будет сделан на общей теории, позволяющей видеть «картину в целом» и находить изоморфизмы между многообразиям Дубровина – Фробениуса, происходящими из *a priori* не связанных друг с другом разделов математики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Алгебра, геометрия, анализ и топология первого курса бакалавриата. Курсы гладких многообразий и дифференциальных уравнений второго курса бакалавриата. Приветствуются, но не обязательны курсы комплексного анализа, дифференциальной и симплектической геометрии.

ПРОГРАММА:

1. Определение МДФ через потенциал. Первые примеры. Классификация в размерности 2.
2. Уравнение WDVV, его симметрии и специальный вид в частных случаях.
3. ADE МДФ, полупростота, Теорема Хертлинга о классификации полиномиальных потенциалов.
4. Аналитический спектр полиномиальных МДФ. Полупростота и канонические координаты, собственные значения операторов умножения. Бифуркационная диаграмма и страт Максвелла.
5. Деформированные плоские координаты, задающая их система диф. уравнений.
6. Плоские координаты на ADE МДФ через осциллирующие интегралы.
7. Связность в тривиальных расслоениях, деформированные плоские координаты как плоские сечения связности. Связности Леви – Чивиты.
8. Координатно независимое определение МДФ.
9. Решение системы диф. уравнений на деформированные плоские координаты в нуле и бесконечности. Проблема Биркгофа, расслоения над $\mathbb{P}_1$.
10. F-многообразия Хертлинга – Манина, определение, примеры, вопрос интегрируемости.
11. Классификация F-многообразий в размерности 2.

УЧЕБНИКИ:

- Dubrovin, B. (1996). Geometry of 2d topological field theories. In Lecture Notes in Math (pp. 120–348). https://doi.org/10.1007/BFb0094793
- Dubrovin, B. (1998). Painleve’ transcendents and two-dimensional topological field theory. 117. Retrieved from http://arxiv.org/abs/math/9803107
- Manin, Y. (1998). Three constructions of Frobenius manifolds: a comparative study. 46. Retrieved from http://arxiv.org/abs/math/9801006
- Hertling, C. (2002). Frobenius Manifolds and Moduli Spaces for Singularities (Cambridge). https://doi.org/10.1017/CBO9780511543104

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Работа в семестре выражается оценкой

$$\text{НАКОП} = 0.4 \cdot \text{ЛИСТКИ} + 0.3 \cdot \text{КОНТРОЛЬНЫЕ} + 0.3 \cdot \text{ДОКЛАДЫ}\,,$$

где «ЛИСТКИ», «КОНТРОЛЬНЫЕ» и «ДОКЛАДЫ»– отнормированные на 10 баллов оценки за выполнение листков и контрольных, а также за сделанные доклады в рамках семинаров (при этом, по каждому из этих пунктов можно получить и больше десяти баллов).

Если НАКОП (без учета округления) становится больше или равен 8, то студент может сразу получить эту оценку (округленную по стандартным правилам, до ближайшего целого; полуцелые округляются вверх) в ведомость.

Если НАКОП на дату проведения экзамена меньше 8, то оценка за курс вычисляется по формуле

$$\text{ОЦЕНКА} = 0.5 \cdot \text{НАКОП} + 0.6 \cdot \text{ЭКЗАМЕН}$$

(округленную по правилам, упомянутым выше), где «ЭКЗАМЕН»– оценка за экзамен, от 0 до 10 баллов.

Множества и модели
простой межкампусный дистанционный НИС для 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. Б. Шехтман.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Значительная часть современной математики основана на теории множеств. Работающим математикам важно понимать и метаматематику теории множеств: как строится теория множеств из аксиом? как они связаны? что можно или нельзя из них вывести? На эти вопросы удается ответить, изучая модели теории множеств. В курсе будет дано краткое введение в эту область. В том числе будет обсуждаться известная канторовская проблема континуума.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Обязательный курс «Логика и алгоритмы» (2 бак, весна). Минимальные пререквизиты для студентов 2 курса осенью: аксиомы ZFC; вполне упорядоченные множества и ординалы; теории первого порядка и их модели.

ПРОГРАММА:

- Аксиомы теории множеств Цермело – Френкеля.
- Ординалы и кардиналы.
- Модели теории множеств. Релятивизация. Теорема отражения.
- Метод форсинга.
- Совместность континуум-гипотезы.
- Независимость континуум-гипотезы.
- Теорема Серпинского.
- Независимость аксиомы выбора (если позволит время).

УЧЕБНИКИ: 1. Справочная книга по математической логике (ред. Барвайс), т. 2. Теория множеств. М., Наука, 1982. 2. Т. Йех. Теория множеств и метод форсинга. М., 1974. 2. N. Weaver. Forcing for mathematicians. World Scientific, 2014. 3. T. Jech. Set theory. Springer, 2006. 4. A. Levy. Basic set theory. Dover Publications, 2002.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $0.7S + 0.3E$ или S, если $S \geq 8$, где S — округлённый средний балл по домашним задачам, — оценка за экзамен.

Наглядная геометрия
простой межкампусный аудиторный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. Б. Скопенков.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Этот курс адресован тем, кто хочет уже в процессе изучения геометрии получить представление о том, где и как применять полученные знания. Для каждой изучаемой теории, каждого нового понятия мы постараемся показать, как они естественно возникают при решении практических или «олимпиадных» задач, к каким задачам применяются дальше. Благодаря этому большинство объектов становятся наглядными. Материал будет изучаться в виде решения задач участниками, с подробными указаниями и последующим разбором на занятии.

1. Евклидова геометрия нам хорошо знакома, но рассмотрим мы ее с точки зрения таких инструментов, как движения и подобия.

2. Проективная геометрия изучает свойства проекции. Возникла из учения художников о перспективе. Это базовый инструмент изучения множеств, заданных алгебраическими уравнениями. А значит, применяется почти во всех разделах математики.

3. Неевклидова геометрия — геометрия с необычными свойствами параллельных линий. Возникла из попыток доказать постулат Евклида о параллельных и при изучении гладких поверхностей. Это основа для теории относительности.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Нет

ПРОГРАММА: 1. Евклидова геометрия. Решение геометрических задач с помощью движений и подобий. Поворотная гомотетия.

2a. Аффинная геометрия. Параллельная проекция на плоскости и в пространстве. Решение геометрических задач с помощью параллельной проекции. Простое отношение — то, что сохраняется при параллельной проекции прямой. Линейные преобразования прямой и плоскости — композиции параллельных проекций.

2b. Проективная геометрия. Центральная проекция на плоскости и в пространстве. Решение геометрических задач с помощью центральной проекции. Теоремы Паппа, Паскаля, Брианшона и Дезарга. Двойное отношение — то, что сохраняется при центральной проекции прямой. Гармонические четверки. Дробно-линейные преобразования вещественной прямой — композиции центральных проекций. Проективная прямая, проективная плоскость, проективные преобразования — способ сделать проекцию взаимно-однозначной. Основная теорема проективной геометрии (Мебиуса–фон Штаудта)$*$.

3a. Сферическая геометрия. Сферические прямые, углы и треугольники. Сумма углов треугольника. Скалярное и векторное произведения для решения задач на сфере.

3b. Геометрия Лобачевского. Сравнение аксиом геометрий Евклида и Лобачевского. Элементарные теоремы геометрии Лобачевского. Сумма углов треугольника. Идеальные треугольники. Окружности, орициклы и эквидистанты. Длина окружности. Модель Кэли-Клейна.

3c$*$. Другие геометрии. Геометрия и кинематика Галилея. Парабола как окружность в геометрии Галилея. Геометрия Минковского и кинематика теории относительности. Пространство скоростей в теории относительности и геометрия Лобачевского.

УЧЕБНИКИ: Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. ОНТИ НКТП СССР, 1936. http://www.math.ru/lib/book/djvu/geometry/kon-fossen.djvu

И.М. Яглом. Геометрические преобразования. (Серия "Библиотека математического кружка", вып. 8) Т. 2. - М.: ГИТТЛ, 1956. - 612 с. http://www.math.ru/lib/book/djvu/yaglom/tom2.djvu

В.В. Прасолов. Геометрия Лобачевского. - 2-е изд., испр. и доп. -М.: МЦНМО, 2000. - 80 с. http://www.math.ru/lib/book/pdf/prasolov/glob.pdf

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка за курс равна

$$\min\{10, \left[\frac{L}{15}\right]\},$$

где лагранжиан L состоит из следующего.

(0) Экзамен по курсу проходит (для одного студента) не более E минут и оценивается из E очков. Здесь $E = 80$.

(1) Контрольная на N минут оценивается из $N/2$ очков. За неполное решение ставится неотрицательная доля полного. Всего будет 2-4 контрольных.

(2) Письменное решение «для пользователя» оценивается из 8 очков. За неполное решение ставится, как правило, 0 очков, в отдельных случаях — 7 очков. Если письменное решение оценено менее, чем в 7 очков, то после получения оценки с замечаниями рекомендуется написать новую версию решения, пока очередная версия не будет оценена в 7 или 8 очков. Письменные решения проверяются *одно в две недели* (у одного студента).

Рекомендации по написанию письменных решений «для пользователя»: http://www.mccme.ru/circles/oim/home/pism.pdf.

(3) Устная задача, сданная на занятии - от 1 до 3 очков (в зависимости от сложности).

(4) Если студент ставит себе плюсик за домашнюю задачу (не сданную устно на прошлом занятии), то это 1 очко. Если это решение проверяется (у доски или на месте), то ‘1’ заменяется на число от -4 до $+4$ в зависимости от того, насколько сложна задача, насколько серьезны ошибки в решении и исправлены ли они в процессе обсуждения.

(5) Нахождение жука в задачнике по курсу (не найденного ранее) - 1 очко.

КОММЕНТАРИЙ: От Совместной магистратуры ВШЭ + ЦПМ есть пожелание провести курс по выбору (не для всех) по «школьной» геометрии, не связанной с непосредственными учебниками по геометрии.

Неклассические логики
простой межкампусный НИС для 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Кудинов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Математическая логика находится на стыке математики, теоретической информатики и философии. Но по сути, как и любая математическая дисциплина, она предоставляет инструментарий пригодный для многих целей, в данном случае для изучения формальных языков, которые встречаются в разных областях человеческого знания. Обычно математическую логику разделяют на классическую (логика высказываний, логика предикатов и т. п.) и неклассическую (интуиционистская, модальная логика, линейная логика и т. п.). Подавляющее большинство публикаций по математической логике в современных научных журналах касаются именно неклассической логики. Связано это с тем, что инструментарий неклассической логики гораздо более гибкий и позволяет подбирать нужные инструменты для любой задачи. В этом курсе мы изучим основы неклассической логики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Для успешного освоения этого курса необходимо знакомство с основными понятиями математической логики, которое можно получить на курсе «Логика и алгоритмы» (основной курс факультета математики) или «Элементы математической логики» (НИС факультета математики) или любом аналогичном.

ПРОГРАММА:

- Язык модальной логики.
- Семантика Крипке и теорема корректности.
- Булевы алгебры с операторами и алгебраическая семантика.
- Номальнальная модальная логика.
- Аксиоматизация классов шкал Крипке.
- Логики K, D, T, B, K4, S4, S4, S5 и другие.
- Преобразования и конструкции сохраняющие истинность формул. Теорема Голдблатта – Томасона.
- Стандартный перевод в логику первого порядка. Теорема ван Бентема.
- Каноническая модель и теорема о полноте для различных модальных логик.
- Финитная аппроксимирумость и разрешимость модальных логик.
- Методом фильтрации для доказательства финитной аппроксимируемости.
- Модальность неравенства и доказательво отсутствия конечной аксиоматизируемости.
- Интуиционистская логика, семантика Крипке для интуиционисткой логики и связью с модальной логикой.
- Теорема о полноте для интуиционисткой логики.
- Суперинтуиционистские логики и логики классов шкал Крипке.
- Топологическая и окрестностностная семантика для модальной и интуиционисткой логик.
- Расширения языка модальной логики и увеличение выразительной силы более богатых языков (универсальная модальность, модальность неравенства, гибридная логика, операторы неподвижной точки и др.) и соответствующими теоремами о корректности и полноте.
- Модальные логики первого порядка.

УЧЕБНИКИ:

- Верещагин Н. К., Шень А. «Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления.» М.: МЦНМО, 2012.
- Blackburn P, De Rijke M, Venema Y. «Modal logic» Cambridge University Press; 2002.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле $0,6H+0,4E$, где H — средняя оценка за домашние задания, E — оценка за устный экзамен.

Непараметрика и другие сюжеты статистики
трудный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Д. С. Шмерлинг.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: В практических задачах часто возникают ситуации, когда распределение и зависимость данных неизвестны. В таком случае на помощь приходят непараметрические методы статистики, базовое представление о которых будет дано в этом курсе. Также планируются лекции приглашённых специалистов, применяющих такие статистические методы на практике (социологи, медицинские статистики, аналитики, специалисты по психометрии). Эти лекции будут занимать дополнительную пару сразу после базовой или же замещать её, и о каждой такой лекций будет сообщено заранее.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: дискретная математика, линейная алгебра и геометрия, математический анализ, теория вероятностей, математическая статистика.

ПРОГРАММА:

1. Задача о дихотомических данных: биномиальный критерий.
2. Одновыборочная задача о положении (сдвиге): анализ повторных наблюдений с помощью знаковых рангов (свободный от распределения критерий знаковых рангов Уилкоксона), анализ повторных парных наблюдений с помощью знаков (свободный от распределения критерий знаков Фишера), анализ данных одной выборки.
3. Двухвыборочная задача о положении (сдвиге): свободный от распределения критерий знаковых ранговых сумм Уилкоксона, оценка Ходжес – Лемана.
4. Двухвыборочная задача о рассеянии (масштабе): свободные от распределения ранговый критерий Ансари – Брэдли и критерий Мазеса.
5. Критерии согласия: χ^2, Колмогорова – Смирнова, Шапиро – Уилка
6. Однофакторный дисперсионный анализ: свободные от распределения критериии Краскела – Уоллиса, Джонкхиера, Терпстра
7. Двухфакторный дисперсионный анализ: свободные от распределения критерии Фридмана, Кендала и Бэбингтона Смита, свободные от распределения критерии для альтернатив с упорядочиванием Пейджа.
8. Задача о независимости: свободный от распределения критерий независимости Кендала.
9. Если успеем — анализ выживаемости и др.

УЧЕБНИКИ: Литература:

1. М. Холландер, Д. Вульф. Непараметрические Методы Статистики. 1983. (Перевод с английского Д. С. Шмерлинга.)
2. M. Hollander, A. Douglas, D. Wolfe, E. Chicken. Nonparametric Statistical Methods. Third Edition. 2014.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $\min(10;\ 0.5 \cdot \text{ДЗ} + 0.3 \cdot \text{ЭК} + 0.3 \cdot \text{ИР} + 0.1 \cdot \text{АР})$, где

- ДЗ — домашние задания (листки)
- ЭК — экзамен
- ИР — индивидуальная работа
- АР — аудиторная работа.

Задания, сданные в течение недели после установленного срока, оцениваются с коэффициентом 0.8, а сданные ещё позже — с коэффициентом 0.4. Если $(0.4 \cdot \text{ДЗ} + 0.4 \cdot \text{ИР} + 0.2 \cdot \text{АР}) \geqslant 8$, то можно зачесть себе именно эту оценку и не ходить на экзамен.

Основные понятия математики
простой межкампусный семинар для первого курса

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Это семинар для первокурсников, посвящённый тому, как «работает» математика. Мы будем обсуждать темы из самых разных областей — анализа, геометрии, алгебры, комбинаторики, теории чисел и т.п. Доклад по теме длится одно занятие, в редких случаях — два. В первом семестре некоторые доклады делают руководители семинара, некоторые — слушатели, некоторые — приглашённые докладчики. Во втором семестре все доклады делают слушатели; как правило, тема доклада связана с темой курсовой работы. Семинар позволит участникам ещё раз ощутить красоту и разнообразие математики; в первом семестре он также может помочь в выборе темы и руководителя курсовой работы.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА: Некоторые темы, обсуждаемые на семинаре (это заведомо не полный список, он может варьироваться от года к году):

- Разрезание четырехмерного куба трехмерной пилой: что получится в сечении?
- Квадратичный закон взаимности: квадратные корни по модулю простого числа.
- Как решать кубические уравнения и почему этого никогда не делают.
- Парадокс Банаха – Тарского: разрезание шара на конечное число кусков, из которых можно сложить четыре шара такого же радиуса.
- Теорема Эрроу о диктаторе (невозможность идеальной системы голосования по нескольким кандидатурам) и нестандартный анализ (в котором есть бесконечно малые числа).
- Пентагональное тождество Эйлера.
- Три взаимосвязанных теоремы из топологии: теорема Брауэра о неподвижной точке, основная теорема алгебры и теорема о причесывании ежа.

УЧЕБНИКИ: Р. Курант, Г. Роббинс, «Что такое математика», М., МЦНМО, 2000, http://ilib.mccme.ru/pdf/kurant.pdf. Также по каждой из тем есть своя литература.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: В первом семестре оценка зависит от того, делал ли участник семинара доклад и от результата заключительной контрольной работы. Если участник семинара сделал успешный доклад, то он получает итоговую оценку 10 баллов и не должен писать заключительную контрольную. Если участник семинара доклада не сделал или доклад был очень неудачным, то итоговая оценка за семинар равна оценке за заключительную контрольную. Во втором семестре каждый участник должен сделать доклад и оценка за курс равна оценке за доклад.

КОММЕНТАРИЙ: Данный семинар проводится ежегодно с момента основания факультета и предназначен исключительно для студентов первого курса бакалавриата. Студентам более старших курсов этот семинар не принесёт никаких кредитов. Доклады происходят главным образом по-русски, но несколько докладов на английском тоже может быть.

Основные приложения математики
простой межкампусный НИС для 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Ю. М. Бурман, С. М. Львовский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Где применяется математика, кроме самой математики?

- в физике
- в экономике
- в лингвистике
- в статистике
- в информатике
- в биологии

и это далеко не полный список! На нашем семинаре докладчики — специалисты в вышеперечисленных областях — расскажут о математических методах исследования, о применяемых моделях и как получать с их помощью выводы. Мы будем обсуждать математические проблемы, но не будем избегать и пограничных между математикой и предметной областью вопросов: как найти хорошее математическое описание проблемы? как проверить, соответствуют ли выводы действительности? Наша тема — взаимодействие математики и реальности.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Стандартные курсы первого года бакалавриата (анализ, алгебра, геометрия). Основная предполагаемая аудитория семинара — второкурсники.

ПРОГРАММА: Мы рассмотрим математические модели в таких областях, как

- физика (механика, электродинамика, квантовая теория)
- экономика
- лингвистика
- статистика (и анализ больших массивов данных)
- информатика (теория сложности, криптография)
- биология

и других. Доклады на семинаре будут делать приглашенные докладчики — специалисты в соответствующих предметных областях. Точные темы докладов будут определяться их пожеланиями.

УЧЕБНИКИ: Ввиду того, что доклады на семинаре имеют отношения к различным и мало связанным между собой областям знания, невозможно заранее предложить список литературы. Мы будем просить каждого докладчика рекомендовать книги и статьи для тех, кого заинтересовала тема доклада.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка равна оценке, полученной на устном экзамене. Для проведения устного экзамена студент беседует с одним из докладчиков, выступавших на семинаре в этом семестре (по собственному выбору, с согласия докладчика); беседа может включать решение задач и/или обсуждение предметной области. Результат беседы оценивается докладчиком по 10-балльной шкале.

КОММЕНТАРИЙ: Семинар впервые проводился весной 2021 г.. Состав докладчиков каждый год будет разный. Большинству докладчиков удобен онлайн-формат.

”

Основы вариационного исчисления и теории оптимального управления
простой межкампусный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Е. О. Степанов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Целью курса является введение в основные задачи современного вариационного исчисления и техники их решения, а также в их приложения к самым разным областям математики. в частности, к геометрии, дифференциальным уравнениям в частных производных и к оптимальному управлению.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Минимально: стандартный 2–3 летний курс математического анализа, включающий теорию интегрирования по Лебегу, дифференциальное и интегральное исчисления функций нескольких переменных, элементы теории кривых и поверхностей, криволинейные и поверхностные интегралы, основы функционального анализа, пространства Лебега. Крайне желательно: основы теории меры (интегралы по мере), соболевские пространства и слабые решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Программа будет «настроена» в зависимости от реальных знаний участников.

ПРОГРАММА:

1. Основы классического вариационного исчисления: необходимые условия минимума, уравнения Эйлера-Лагранжа, естественные краевые условия, достаточные условия второго порядка, условные минимумы, принцип максимума Понтрягина. Базовые примеры вариационных задач, возникающих в разных областях математики и приложений (потеря устойчивости стержня при продольной нагрузке, задача Дидоны, оптимальная константа в неравенствах Пуанкаре и Стеклова, задача о брахистохроне, задачи оптимального управления и т.п.);

2. Прямой метод вариационного исчисления. Теорема Тонелли. Условия полунепрерывности снизу интегральных функционалов в сильной и слабой топологии пространств Соболева. Связь полунепрерывности снизу и выпуклости для функционалов, определенных на скалярнозначных функциях [и квазивыпуклости, поливыпуклости для функционалов, определенных на векторнозначных функциях]. Примеры доказательств существования решений краевых задач для дифференциальных уравнений вариационным методом. [Вычисление первой вариации интегральных функционалов в пространствах Соболева и слабые решения уравнений Эйлера-Лагранжа.]

3. Релаксация функционалов. Пример релаксации - функционал периметра. [Емкость множества и релаксация функционала Дирихле]. Феномен Лаврентьева. Г-сходимость. [Пример Modica-Mortola Г-аппроксимации периметра функционалами Гинзбурга-Ландау.]

УЧЕБНИКИ: • F. Clarke: Functional analysis, calculus of variations and optimal control. Graduate Texts in Mathematics, 264. Springer-Verlag, London, 2013.

• B. Dacorogna: Introduction to the calculus of variations. Imperial College Press, London, 2004.

• B. Dacorogna: Direct methods in the calculus of variations, second edition. Applied Mathematical Sciences, 78. Springer Science + Business Media, New York, 2008.

• Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М, УРСС, 2006

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 1) Средняя оценка по контрольным дает накопленную оценку. Оценка определяется по 2 обязательным контрольным + по еще одной контрольной, являющейся обязательной только для тех, кто не сдал на удовлетворительную оценку любую из первых двух. 2) Итоговая оценка = min (накопленная оценка,8), если не сдается экзамен. 3) Экзамен можно сдавать, если накопленная оценка не ниже 7. 4) В случае, если сдается экзамен, итоговая оценка равна оценке за экзамен.

”

Основы Эконометрики

трудный межкампусный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: И. Б. Воскобойников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Цель курса — расширение представлений студента-математика о роли математического аппарата теории вероятностей, математической статистики, математической экономики и ряда смежных разделов математики в современных экономических исследованиях. Для этого в курсе будут представлены базовые понятия теории вероятностей и экономической статистики, необходимые для аппарата эконометрики; изложена базовая теория эконометрических методов. Предполагается освоение подходов к решению типовых эконометрических задач, а также выработка практических навыков работы с экономическими данными и интерпретации результатов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: знание основ теории вероятностей и математической статистики, а также математического анализа и линейной алгебры

ПРОГРАММА: В курсе будут представлены модели классической линейной регрессии, различные методы оценки параметров и их статистические свойства, проверка статистических гипотез и доверительных интервалов для параметров регрессии. Курс также содержит краткое введение в анализ временных рядов и панельных данных, можели с дискретными и смешанными зависимыми переменными.

УЧЕБНИКИ: Hill, R. Carter, W. E Griffiths, и G. C. Lim. Principles of Econometrics. 5-е изд. John Wiley & Sons, 2018.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка складывается из баллов, набранных за промежуточную (15%) и итоговую (50%) контрольные работы, эмпирической домашней работы (30%), а также текущей работы на семинарах с выполнением небольших домашних заданий (5%). Каждый вид работы оценивается количеством баллов от 0 до 100. Итоговая оценка получается как среднее взвешенное с весами, указанными в скобках. Итоговая оценка округляется до ближайшего наибольшего целого числа. Например, итоговый балл 5,01 округляется до 6.

КОММЕНТАРИЙ: Курс предполагает освоение основ работы с эконометрическим пакетом STATA.

Прикладные методы анализа
простой межкампусный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. И. Щёчкин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 5 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Аналитические методы, используемые в решении приходящих из математической физики задач, вбирают в себя как традиционную технику университетских курсов анализа, алгебры и дифференциальных уравнений, так и более абстрактные приемы функционального анализа. Цель курса — ознакомить с идеологией применения аппарата обобщенных функций, интегральных преобразований, фундаментальных решений, асимптотических оценок и др. Форма занятий в значительной части основана на самостоятельном решении задач студентами.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения в объёме первых двух курсов бакалавриата.

ПРОГРАММА:

1. Функции Грина краевой задачи и задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Дифференциальные уравнения с комплексным временем. Преобразование Лапласа.
3. Обобщенные функции.
4. Преобразование Фурье обобщенных Функций.
5. Фундаментальные решения классических операторов второго порядка. Приложения к задачам математической физики.
6. Асимптотические оценки и асимптотические разложения.

УЧЕБНИКИ:

1. Владимиров В. С., Уравнения математической физики
2. Гельфанд И. М, Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними
3. Эрдейи А., Асимптотические разложения
4. Погребков А. К. Записи лекций https://math.hse.ru/mathmethods2016
5. Лосяков В. В. Записи лекций https://math.hse.ru/data/2018/01/15/1160394242/MathminThPh.pdf

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка вычисляется по формуле

$$0,2\,x + 0,7\,y + 0,3\,z + 0,2\,u\,,$$

где x — средняя оценка за короткие контрольные раборы на семинарах, y — средняя оценка за три домашних контрольных работы, z — оценка за итоговый экзамен, u — бонус за активную работу на занятиях.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс является обязательным для студентов магистратуры, обучающихся по профилю «Математическая Физика», и входит в официальный РУП под названием «Математические методы естествознания». Все остальные студенты, включая студентов бакалавриата, могут взять этот курс в качестве спецкурса по выбору стоимостью в 5 кредитов.

Проективная алгебраическая геометрия
простой межкампусный дистанционный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. С. Тихомиров, И. В. Артамкин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: В течение последних полувека алгебраическая геометрия оказалась в фокусе всей современной математики, и за это время развились мощнейшие технические методы, обеспечившие колоссальное продвижение алгебраической геометрии. Это бурное развитие имело и оборотную сторону, поскольку современные абстрактные методы в значительной мере вытеснили из поля зрения прозрачные геометрические основания этой науки. Эти основания по-прежнему остаются основным объектом исследования, источником всех интуиций в алгебраической геометрии, и потому очень важны. Задача семинара — рассказать о геометрических истоках алгебраической геометрии. Поэтому семинар рассчитан как на студентов-младшекурсников, имеющих совсем элементарный начальный уровень, так и на студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов, которые уже имеют серьезную техническую базу в алгебраической геометрии (однако, и для них знакомство с наглядными геометрическими картинками несомненно будет полезно).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет

ПРОГРАММА:

1. Задачи, связанные с теоремами Дезарга, Паппа, Паскаля, и др.
2. Задачи евклидоваой и других геометрий: решение средствами проективной геометрии.
3. Теорема Безу, индексы пересечения, правила Цейтена.
4. Поляры, гессианы, принцип двойственности.
5. Линейные ряды, линейные сечения и проекции, раздутия, джойны, мультисеканты, проективные касательные пространства к многообразиям.
6. Поверхности дель Пеццо, норммногообразия, квадрики.
7. Детерминантали, многообразия Сегре, Веронезе, их многообразия хорд.
8. Грассманианы, многообразия флагов, индукционная процедура построения грассманианов.
9. Многомерные конфигурации прямых.
10. Замыкания Понселе и задачи классификации векторных расслоений.
11. Пространства «полных» квадрик, «полных» треугольников и задачи исчислительной геометрии.

УЧЕБНИКИ:

1. I. V. Dolgachev. Classical algebraic geometry: a modern view. Cambridge, 2011.
2. M. Beltrametti et al. Lectures on Curves, Surfaces and Projective Varieties: A Classical View of Algebraic Geometry. European Math. Soc., Zuerich, 2009.
3. J. G.Semple, J. T. Kneebone. Algebraic projective geometry. Oxford, 1963.
4. J. G. Semple, L. Roth. Introduction to algebraic geometry. Oxford, 1949.
5. Н. А. Глаголев. Проективная геометрия, М., Высшая школа, 1963.
6. Х. С. М. Кокстер. Действительная проективная плоскость. М., Физматгиз, 1959.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 50% за решение домашних задач и 50% за итоговый экзамен, все округления происходят по стандартным правилам (до ближайшего целого, полуцелые округляются вверх).

Симплектическая геометрия
трудный НИС на английском языке для 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: М. С. Вербицкий.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: модуль 1 2021/22 уч. года, 4 занятия в неделю, 5 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Symplectic geometry is a rapidly growing field of mathematics, studying finite-dimensional and infinite-dimensional objects. Through Fukaya's theory, symplectic geometry has many applications to the string physics and algebraic geometry. I would discuss basic foundations of symplectic geometry, starting from Darboux, Moser and Weinstein theorems, symplectic reduction and moment maps, and proceed to the work of Gromov on symplectic capacities, non-squeezing and psedoholomorphic curves. If time permits, I would give a proof of Gromov's compactness theorem and non-degeneracy of Hofer's metric on the group of Hamiltonian symplectomorphisms.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Students will need solid understanding of calculus on manifolds (de Rham cohomology, Cartan formula, diffeomorphism flows associated with vector fields), basic Lie group theory (how the Lie groups are related to the Lie algebras) and basic algebraic topology (ability to calculate and use de Rham cohomology, de Rham cohomology with compact support, Poincare duality).

ПРОГРАММА: 1. Symplectic structures. Almost complex structures. Obstructions to existence of symplectic structures.

2. Moser lemma, Darboux and Weistein theorem. Normal neighbourhood theorems.

3. J-holomorphic curves. Gromov's compactness theorem (without proof).

4. Hamiltonians, moment maps, symplectic quotients, toric manifolds. Symplectic cut and the blow-up.

5. Gromov capacity and Gromov non-squeezing theorem. Symplectic packing. Polterovich-McDuff theorem.

УЧЕБНИКИ:

- Dusa McDuff, Dietmar Salamon, Introduction to symplectic topology
- Dusa McDuff, Lectures on Symplectic Topology; a gentle introduction to J-holomorphic curves, written in 1994 and published in the IAS/Park City proceedings, see www.math.sunysb.edu/~dusa/utahnotaug28.pdf.
  Русский перевод: Элиашберг Я., Трейнор Л. (под редакцией), Лекции по симплектической геометрии и топологии, МЦНМО, 2008

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Handouts score is given by the formula $t = 10 + 5a + 8b$, where a is the number of non-completed handouts with at least 1/2 of exercises credited, and b the number of completed handouts.

КОММЕНТАРИЙ: Занятия проходят с 4 сентября по 3 ноября. Лекции читаются ***на русском*** со слайдами и задачами на английском. Страничка курса: http://bogomolov-lab.ru/KURSY/Symplectic-2021/.

Современные проблемы математической логики
простой межкампусный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Д. С. Шамканов, А. В. Кудинов, В. Б. Шехтман, Л. Д. Беклемишев.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Математическая логика представляет собой широкий спектр дисциплин, движимых интересом к основаниям математики, а также множеством различных приложений в таких областях как информатика, лингвистика и философия. Данный научно-исследовательский семинар призван познакомить слушателей с различными задачами и проблемами современной математической логики, показать как классические результаты, так и продвижения последнего времени в данной области.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Знание основ логики и теории множеств в рамках обязательного курса «Логика и алгоритмы» или любого другого логического курса: «Элементы математи□еской логики», «Введение в теорию моделей» и др.

ПРОГРАММА: Доклады на семинаре будут касаться таких тем как модальная логика, теория доказательств, лямбда-исчисление, теория индуктивных определений, семантика компьютерных языков и т.п. Возможные темы докладов:

- эпистемические логики,
- циклические выводы в модальной мю-логике,
- формальная арифметика и вторая теорема Гёделя о неполноте,
- логика доказуемости,
- генценовское доказательство непротиворечивости формальной арифметики,
- теоремы Шаврукова об алгебрах доказуемости формальных теорий,
- интуиционистская логика,
- теоремы Руитенбурга для интуиционистской логики,
- игровая семантика для модальной логики Гжегорчика,
- теорема Зиглера о неразрешимости некоторых теорий полей,
- элементы теории типов,
- циклические и нефундированные выводы в арифметике Пеано.

УЧЕБНИКИ:

- Справочная книга по математической логике. Ред. Дж. Барвайс.
- Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов (в трех частях).
- С.П. Одинцов, С.О. Сперанский, С.А. Дробышевич. Введение в неклассические логики. Учебное пособие.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка совпадает с накопленной. Если участник сделал доклад, то его накопленная оценка — 10. Если нет — оценка равна оценке за итоговый коллоквиум.

Стохастический анализ и его применения в экономике
трудный межкампусный НИС на английском языке для 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Колесников, В. Д. Конаков.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: В курсе обсуждаются основы теории случайных процессов, техника стохастического интегрирования с приложениями к теории арбитража.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ, теория вероятностей.

ПРОГРАММА:

1. Моделирование финансовых активов. Базовые факты из теории вероятностей (обзорно). Моменты и кумулянты. Важные семейства распределений. Центральная предельная теорема. Безгранично делимые распределения. Теорема Леви – Хинчина. Корреляции и копулы. Основные модельные процессы. Винеровский процесс. Процессы Леви. Дробное броуновское движение.

2. Теория арбитража для дискретного времени. Опционы и другие ценные бумаги. Одношаговая биномиальная модель. Многошаговая биномиальная модель и формула CRR. Элементы теории мартингалов (дискретное время). Выпуклые множества. Теорема об отделимости. Первая фундаментальная теорема. Полнота рынка. Вторая фундаментальная теорема. Модель CRR и сходимость к модели Блэка – Шоулза. Мартингалы и моменты остановки.

3. Модели с непрерывным временем. Мартингалы. Марковские моменты, неравенства. Стохастический интеграл. Стохастический интеграл как мартингал. Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения. Уравнение теплопроводности. Марковское свойство решений СДУ. Уравнение Колмогорова. Теорема Гирсанова. Модель Блэка – Шоулза.

УЧЕБНИКИ:

1. Elliot R.J., Kopp P.E., Mathematics of financial markets, 2004.

2. Оксендаль Б., Стохастические дифференциальные уравнения. М.: «Мир», 2003

3. Wilmott P., Paul Wilmott On Quantitative Finance. J. Wiley&sons, 2006.

4. Bouchaud J.-P., Potters M., Theory of financial risk. CUP, 2000.

5. Bougerol F., Modeles stochastique et application a la finance.
http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/bougerol/M1_15_16.pdf

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: В течение семестра студентам предлагается решать задачи из двух листков (по 5 задач в каждом). Экзамен состоит из двухчасовой контрольной работы с пятью задачами (по 2 балла за каждую). Окончательная оценка вычисляется по формуле $0.4\,E + 0.6\,H$, где E — оценка за письменный экзамен, а H — процент правильно решённых задач в течение семестра. Для студентов, посетивших более половины лекций, округление производится в большую сторону, для прочих — в меньшую.

Теория кодирования и целочисленные решетки
простой межкампусный дистанционный проект для студентов 2-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Гриценко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: 3-й модуль 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 2 кредита.

ОПИСАНИЕ: Конкретные задачи из теории кодирования помогают понять и освоить университетский курс алгебры. Теория кодирования над кольцами – современная область алгебры и арифметики, которая вполне доступна для начинающих. Новые интересные теоретические вопросы возникли, например, с открытием квантовых кодов, которые имеют интерпретации в теории кодирования над полем и кольцами из 4-х элементов. Кроме нескольких коротких вводных дистанционных лекций НИС будет проходить в форме проектной научно-учебой работы. На базе оригинальных научных статей и монографий будут предложены реферативные и учебно-исследовательские темы различной сложности и глубины по теории кодирования над кольцами и смежным вопросам. Ниже перечисляются возможные проектные темы для индивидуальной работы или работы в мини-группах, которые хорошо отражают содержание курса. Проектные темы носить как фундаментальный, так и прикладной характер, например, создание прикладной программы по теме проекта. Возможен учет научных интересов студентов в смежных областях (арифметика, топология, геометрия, физика). Приглашаются как начинающие, так и студенты, желающие попробовать себя в новой области математики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Базовые знание по университетскому курсу алгебры в объеме первого года. Желательно (но не обязательно) прохождение спецкурса первого семестра по теории кодирования.

ПРОГРАММА:

1. Как устроена теория делимости многочленов над кольцом целых по модулю произвольного целого m? Уже для $m = 4$ вопрос не так прост.
2. Существует ли каноническое разложение на неприводимые многочлена $x^n - 1$ по модулю m?
3. Как описать идеалы в конечных кольцах, например, в кольцах Галуа? Почему такие идеалы определяют циклические коды над кольцами?
4. Как связаны сравнения по модулю p^n и p-адические числа? p-адические коды как предел кодов над конечными кольцами.
5. Какие имеются ортогональные геометрии над полем из двух элементов? Как описать все лагранжианы (взаимно ортогональные подпространства) n-мерного пространства над полем $\mathbb{F}_2$?
6. Как обобщить понятия линейной алгебры на случай конечных колец? Например, как строить самодвойственные коды над конечными кольцами?
7. Можно ли определить квадратичные формы в конечных абелевых группах?
8. Что такое системы корней A, D, E? Как связаны между собой кодирование над кольцами и построение важнейших целочисленных квадратичных форм (решеток)?
9. Как построить плотнейшую упаковку шарами евклидовых пространств размерности 8 и 24, используя совершенные коды Хэмминга и Голея?
10. Что такое простые группы Матье? Как они связаны с теорией кодирования?
11. Как конечные геометрии и конфигурации («дизайны») переписываются на языке алгебраических кодов?
12. Как сферические многочлены и тета-функции отражают инварианты кодов и решеток?

УЧЕБНИКИ:

1. W. Ebeling. «Lattice and Codes», Springer, 2013.
2. P. Solé. «Codes and Rings. Theory and Practice», Academic Press, 2017.
3. П.Камерон, Дж. ван Линт. «Теория графов, теория кодирования и блок-схемы», Наука, Москва, 1980.
4. R. L. Griess, Jr. «An introduction to Groups and Lattices. Finite group and positive definite rational lattices», Int. Press, 2011.
5. G. Nebe, E. M. Rains, N. J. A. Sloane, «Self-dual codes and invariant theory», Springer, 2006.
6. Научные статьи по проектным темам, 2000–2020.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.2 (Теоретические вопросы по теме проекта) + 0.2 (Презентация по теме проекта) + 0.6 (Отчетная работа по теме проекта).

Теория Кодирования как введение в Алгебру и Арифметику
простой межкампусный аудиторный НИС для 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Гриценко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Теория кодирования, условно, исслдует линейные векторные пространства над конечным полем как метрические пространства. Для построения подпространств с очень специальными метрическими свойствами — кодов — используются самые различные алгебраические и геометрические методы. Удивительно, но работая только с бинарными словами совершенно элементарными методами можно познакомиться с приложениями таких математических структур, как квадратичные вычеты и конечные кольца, грассманианы и конечные проективные плоскости, лагранжианы (автодуальные коды), теория Галуа конечных полей.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Только базовые знание по университетскому курсу алгебры в объеме первого года: поля, конечномерные линейные пространства, кольцо многочленов над полем, группы, факторгруппы, факторкольца.

ПРОГРАММА: 1) Бинарное векторное пространство как метрическое пространство, метрика Хэмминга, Разбиение на шары как примеры простейших кодов. Автоморфизмы бинарного метрического пространства. 2) Линейные коды и их двойственные как объекты линейной алгебры над конечными полями. Двойственность и классический метод Гаусса (в полном объеме) над полем из двух элементов. Автодуальные коды. 3) Конечная проективная плоскость Фано. Конечные геометрии (нерешенные проблемы). Совершенный код Хэмминга. Группа автоморфизмов кода Хэмминга — следующая после A_5 некоммутативная простая группа. 4) Описание метрической характеристики линейного кода методами линейной алгебры. Бесконечная серия кодов Хэмминга. 5) Циклические коды над конечным полем и факторкольца кольца многочленов над конечным полем. 6) Неприводимые многочлены над конечным полем. Как ведет себя круговой многочлен Φ_n (с целыми коэффициентами) в конечном поле? Автоморфизм Фробениуса. Циклотомические орбиты как действие конечной циклической группы на аддитивной группе вычетов. 7) Определитель Вандермонда и оценка минимальной длины циклического кода. 8) Идемпотенты в факторкольце кольца многочленов. Описание идеалов в конечном кольце при помощи идемпотентов. 9) Квадратичные вычеты и связанные с ними вычетно-квадратичные коды. 10) Совершенный бинарный код Голея, его структура и свойства. Тернарный код Голея. Группы Матье.

УЧЕБНИКИ:

- J.H. van Lint, «Introduction to coding theory» Gr. Texts in Mathem., Vol. 86, 1999.
- Noam D. Elkies, «Lattices, Linear Codes, and Invariants» Part I. II, Notices of the AMS vol 47 (2000), N 10–11.
- G. Nebe, E. M. Rains, N. J. A. Sloane, «Self-dual codes and invariant theory» 2006.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.3∗Индивидуальная работа + 0.3∗Письменное решение дополнительных задач + 0.4∗Устный коллоквиум (или выполнение лабораторных работ)

Теория представлений
трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: Б. Л. Фейгин, Л. Г. Рыбников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Семинар посвящён разбору разных сюжетов из теории представлений полупростых алгебр Ли, алгебры Вирасоро, аффинных алгебр Каца – Муди, квантовых групп и родственных им алгебр. Представления перечисленных алгебр играют центральную роль в конформной теории поля, интегрируемых системах, перечислительной геометрии, маломерной топологии и других разделах математики. Предполагается, что каждый участник семинара какую-то часть программы разберёт самостоятельно и расскажет на семинаре.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: стандартные курсы алгебры, топологии и групп и алгебр Ли.

ПРОГРАММА:

- Представления полной линейной группы: двойственность Шура – Вейля.
- Тензорная категория представлений полной линейной группы.
- Алгебра $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ и ее представления.
- Приложения квантовой группы к инвариантам узлов и зацеплений.
- Пространство Фока как представление алгебры Гейзенберга и Вирасоро.
- Аффинные алгебры Каца – Муди и их представления.
- Конструкция Шугавары.
- Фьюжн-произведение.

Более конкретный список тем зависит от возможностей участников.

УЧЕБНИКИ: по личной договорённости.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $0,8 *$ (участие) $+ 0,2 *$ (доклад).

Теория Ходжа и топология I
трудный НИС на английском языке для 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Лунц.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: 3-й модуль 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Теория Ходжа снабжает когомологии компактного (комплексного) кэлерова многообразия богатой структурой. Это – разложение Ходжа, действие оператора Лефшеца (дополняемого до представления алгебры Ли $_2$), и соотношения Ходжа – Римана на примитивных когомологиях. В этом курсе мы подробно обсудим эти понятия и их применение к топологии Кэлеровых многообразий. В частности, мы обсудим гипотезу Ходжа, первый класс Черна голоморфного комплексного линейного расслоения, вырождение спектральной последовательности Лере для семейств Кэлеровых многообразий (теорема Делиня).

До начала обсуждения комплексных многообразий в курсе предполагаются две большие вводные подготовительные части: 1) теория когомологий де Рама на гладких многообразиях, вплоть до представления классов когомологий гармоническими формами; 2) теория пучков и их когомологий, основные моменты гомологической алгебры.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Предварительная подготовка: От участников потребуется знание основных понятий алгебраической топологии. Это — симплициальные и сингулярные когомологии топологических пространств, фундаментальная группа. Кроме того, хорошо знать, что такое многообразие, векторное расслоение, касательное и кокасательное расслоение.

УЧЕБНИКИ:

- R. Bott, T. W. Tu. Differential forms in algebraic topology. 1982.
- C. Voisin. Hodge theory and complex algebraic geometry I, II. 2002.
- Р. Годеман. Алгебраическая топология и теория пучков. 1961.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 100% домашних заданий

Теория Ходжа и топология II
трудный НИС на английском языке для 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. А. Лунц.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: 4-й модуль 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Мы обсудим следующие темы:
семейства комплексных многообразий, отображение Кодаиры – Спенсера, связность Гаусса – Манина, вариации структур Ходжа, область периодов, отображение периодов; исчезающие когомологии и теория Пикара – Лефшеца. Кроме того, мы опишем фильтрацию Ходжа на гиперповерхностях в проективном пространстве. Затем мы введем понятие смешанной структуры Ходжа и рассмотрим многочисленные примеры и приложения.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Этот курс задуман как продолжение курса «Теория Ходжа и топология I». В частности, будет предполагаться хорошее знание когомологий де Рама, теории пучков и разложения Ходжа на Кэлеровых многообразиях. Мы рассмотрим большое количество примеров из комплексной алгебраической геометрии.

УЧЕБНИКИ:

- C. Voisin. Hodge theory and complex algebraic geometry I, II. 2002.
- Ch. Peters, J. Steenbrink. Mixed Hodge structures. 2007.
- Вик. Куликов, П. Курчанов. Комплексные алгебраические многообразия: периоды интегралов, структуры Ходжа. 1989.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 100% домашних заданий

Топологический анализ данных. Устойчивые гомологии.
простой межкампусный аудиторный НИС на английском языке для 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: В. Г. Горбунов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Топологический анализ данных (TDA) находится на стыке алгебраической топологии, вычислительной геометрии, информатики, статистики и других областей математики, связанных с анализом данных. TDA использует идеи и результаты из геометрии и топологии для изучения получения качественных характеристик больших объемов данных. При этом необходимо точно определить эти качественные характеристики, разработать инструменты для их эффективного вычисления и убедиться в устойчивости работы последних. Одним из таких инструментов являются устойчивые гомологии (PH). Метод пришёл из алгебраической топологии, основным вычислительным средством является линейная алгебра, а получаемые результаты устойчивы к небольшим возмущениям входных данных.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Курсы алгебры, топологии и топологии гладких многообразий

ПРОГРАММА:

- Проблема обработки данных математическими методами.
- Предварительная сведения из алгебры и топологии. Модули над кольцом многочленов. Структурная теорема для градуированных модулей над кольцом многочленов. Цепные комплексы. Комплекс Чеха. Комплекс Виеторис-Рипс. Альфа-комплекс. Witness комплекс. Гомология.
- Структурная теорема для векторных пространств сохранения над полем Устойчивость. Устойчивые комплексы. Устойчивые модули. Штрих-коды.
- Вычисление устойчивых гомологий над полем.
- Метрики в пространстве штрих-кодов и теоремы о стабильности. Метрики на пространстве штрих-кодов. Теоремы стабильности. Древовидные метрические пространства.
- (если позволяет время) Вероятностный анализ Случайные комплексы

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: В курсе планируется 3 контрольных и экзамен. Их вклад в оценку за курс составит 50% и 50%.

Уравнения с частными производными
трудный межкампусный аудиторный курс для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: С. В. Шапошников.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Огромное число физических, геометрических, вероятностных задач приводят к построению и исследованию решений уравнений с частными производными, причем важнейшую роль в таких исследованиях играют идеи и методы функционального анализа. В настоящем курсе мы не только познакомимся с типичными примерами уравнений и методами их решений, но и обсудим пространства Соболева и теорию полугрупп операторов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: линейная алгебра и математический анализ

ПРОГРАММА:

1. Уравнения с частными производными в физических, геометрических и вероятностных задачах.
2. Волновое уравнение. Формулы Даламбера, Пуассона и Кирхгофа. Распространение волн.
3. Обобщенные функции и обобщенные производные. Преобразование Фурье. Фундаментальное решение оператора Лапласа, оператора теплопроводности, оператора Даламбера.
4. Пространства Соболева. Неравенства Соболева и теоремы вложения.
5. Теоремы Рисса и Лакса – Мильграма, априорные оценки и продолжение по параметру. Разрешимость краевых задач для эллиптических и параболических уравнений.
6. Принцип максимума для классических и соболевских решений. Альтернатива Фредгольма.
7. Качественные свойства решений эллиптических и параболических уравнений: теоремы о среднем, неравенство Харнака, гёльдеровость соболевских решений, поведение решений на бесконечности.
8. Неограниченные операторы. Задача Штурма – Лиувилля. Расширение по Фридрихсу оператора Лапласа. Теорема Гильберта – Шмидта и обоснование метода Фурье.
9. Полугруппы. Теорема Хилле – Иосиды. Свойства тепловой полугруппы и полугруппы Орнштейна – Уленбека.
10. Нелинейные уравнения. Теоремы о неподвижной точке. Монотонные операторы. Вариационные методы. Разрушение решений.

УЧЕБНИКИ:

1. Krylov N. V. Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. Graduate Series in Mathematics, vol. 96. American Mathematical Society, 2008.
2. Evans L.C. Partial Differential Equations: second edition. Graduate Series in Mathematics, vol. 19.R. American Mathematical Society, 2010.
3. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. 2-е издание, исправл. и дополн. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
4. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Оценка за курс складывается из накопленной оцени (Н) и оценки за экзамен (Э) по формуле: $0.6\,(\text{Н}) + 0.4\,(\text{Э})$. Накопленная оценка складывается из оценок за две контрольные и коллоквиум по формуле: $0.2\,(\text{кр}1 + \text{кр}2) + 0.6\,(\text{коллоквиум})$. Экзамен проходит в устной форме, экзаменационный билет состоит из теоретического вопроса и задачи. Итоговая оценка, оценка за экзамен, накопленная оценка и оценки за контрольные и коллоквиум выставляются по 10-балльной шкале. Округления производятся по стандартному арифметическому правилу.

Функции многих комплексных переменных
простой межкампусный проект на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. А. Глуцюк.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Многомерный комплексный анализ не входит в обычную университетскую программу. В то же время он входит в необходимый минимум для исследований во многих областях современной математики, таких как алгебраическая геометрия, комплексная динамика, теория особенностей, дифференциальные уравнения... С одной стороны, голоморфные функции многих комплексных переменных разделяют много основных свойств функций одной переменной. С другой стороны, в их теории возникают новые явления аналитического продолжения. Например, они не могут иметь ни изолированных особенностей, ни компактных подмножеств особых точек. Всякое комплексное векторное пространство размерности не ниже двух содержит собственную область, биголоморфно эквивалентную объемлющему пространству (область Фату – Бибербаха). Теория голоморфной выпуклости и многообразий Штейна вместе с основами теории пучков позволяют доказать важные теоремы о продолжении и об аппроксимации. Принцип ГАГА в алгебраической геометрии утверждает, что всякий аналитический объект на комплексном проективном многообразии алгебраичен. В курсе будут представлены вышеупомянутые темы, включая основы теории аналитических множеств, биголоморфные автоморфизмы и введение в комплексную динамику.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ 1-2 курсов, теория функций одного комплексного переменного

ПРОГРАММА:

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: 0.3 (решения задач) + 0.1 (промежуточный экзамен) + 0,6 (итоговый экзамен)

Функциональный анализ и некоммутативная геометрия
трудный межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Ю. Пирковский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: два семестра 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита за семестр.

ОПИСАНИЕ: Студенты, участвующие в семинаре, делают доклады по функционально-аналитическим аспектам некоммутативной геометрии. Доклады, относящиеся к некоммутативной алгебраической геометрии или к «чистому» функциональному анализу (предпочтительно с алгебраическим или геометрическим ароматом), также приветствуются. Темы для докладов обычно берутся из литературы, но иногда участники рассказывают о своих собственных результатах. Время от времени с докладами выступают руководитель семинара и приглашенные докладчики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Участники семинара должны знать основы алгебры и функционального анализа (в объеме стандартных вводных курсов матфака ВШЭ) и любить какую-нибудь разновидность геометрии или топологии.

ПРОГРАММА:

УЧЕБНИКИ: 1. A. Connes. Noncommutative geometry. Academic Press, 1994.

2. A. Connes, M. Marcolli. Noncommutative geometry, quantum fields and motives. AMS, 2008.

3. L. L. Vaksman. Quantum bounded symmetric domains. AMS, 2010.

4. M. A. Rieffel. Deformation quantization for actions of $\mathbb{R}^d$. Mem. Amer. Math. Soc. 106 (1993), no. 506.

5. J. Cuntz, R. Meyer, J. Rosenberg. Topological and bivariant K-theory. Birkh”auser, 2007.

6. D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, V. Vinnikov. Foundations of free noncommutative function theory. AMS, 2014.

7. M. Kashiwara, P. Schapira. Deformation quantization modules. Astérisque No. 345 (2012).

8. K. A. Brown, K. R. Goodearl. Lectures on algebraic quantum groups. Birkh”auser, 2002.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Для получения положительной оценки достаточно сделать хотя бы один доклад на семинаре. Оценка будет зависеть от качества доклада.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ 2 (ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ)
трудный межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Ю. Пирковский.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Функциональный анализ изучает бесконечномерные векторные пространства, снабженные нормой (или, более общим образом, топологией), операторы между такими пространствами и представления алгебраических структур в таких пространствах. Классические разделы функционального анализа — спектральная теория линейных операторов, геометрия банаховых пространств, теория обобщенных функций, теория операторных алгебр и др. К более новым его направлениям относятся некоммутативная геометрия в смысле А. Конна, теория операторных пространств (известная также как «квантовый функциональный анализ») и локально компактные квантовые группы. Функциональный анализ имеет многочисленные приложения в теории дифференциальных уравнений, гармоническим анализе, теории представлений, геометрии, топологии, вариационном исчислении, оптимизации, квантовой физике и т.д.

Этот курс является продолжением курса «Введение в функциональный анализ» (осень 2021). Планируется обсудить разделы функционального анализа, посвященные достаточно общим классам линейных операторов в банаховых и гильбертовых пространствах. В частности, это означает, что мы не будем обсуждать, например, дифференциальные операторы, поскольку их теория может быть адекватно представлена лишь в отдельном специальном курсе. Вместо этого мы сконцентрируемся на тех сюжетах, которые подчеркивают роль алгебраических методов в функциональном анализе.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Анализ, линейная алгебра, метрические пространства, интеграл Лебега, основы функционального анализа (например, в объеме осеннего курса «Введение в функциональный анализ» — банаховы и гильбертовы пространства, ограниченные линейные операторы, понятие спектра оператора). Курс доступен студентам начиная со 2 курса

ПРОГРАММА:

УЧЕБНИКИ:

- A. Ya. Helemskii. *Lectures in Functional Analysis*. MCCME, 2004 (in Russian). English transl.: AMS, 2006.
- V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov. *Real and Functional Analysis*. RCD, 2011 (in Russian). English transl.: Springer, 2020.
- A. A. Kirillov and A. D. Gvishiani. *Theorems and problems in Functional Analysis*. Moscow, Nauka, 1979 (in Russian). English transl.: Springer, 1982.
- B. Simon. *Real Analysis. (A comprehensive course in Analysis, Part 1).* AMS, 2015.
- B. Simon. *Operator Theory. (A comprehensive course in Analysis, Part 4).* AMS, 2015.
- M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis.* Academic Press, 1972. Russian transl.: Mir, 1977.
- V. M. Kadets. *A course in functional analysis*. Khar'kov. Nats. Univ. im. V. N. Karazina, Kharkiv, 2006 (in Russian). English transl.: Springer, 2018.
- W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill, 1991. Russian transl.: Lan', 2005.
- J. B. Conway. *A course in Functional Analysis.* Springer, 1990.

- A. Yu. Pirkovskii. *Spectral theory and functional calculi for linear operators*. MCCME, 2010 (in Russian). https://www.mccme.ru/free-books/pirkovsky/pirkovsky-spectral.pdf.
- A. Yu. Pirkovskii. *Lecture notes in functional analysis*. Unfinished and unpublished lecture notes (HSE, 2011/2012, in Russian). http://vyshka.math.ru/1112/funcan.html.
- G. Murphy. *C^*-algebras and operator theory*. Academic Press, 1990. Russian transl.: Factorial, 1997.
- R. Meise and D. Vogt. *Introduction to Functional Analysis*. Clarendon Press, 1997.
- F. Treves. *Topological vector spaces, distributions, and kernels*. Academic Press, 1967.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ:

- The final grade is calculated by the formula

$$\text{final grade} = 0.7 \times (\text{cumulative grade}) + 0.3 \times (\text{exam grade}).$$

- The cumulative grade is calculated by the formula

$$\text{cumulative grade} = 0.5 \times (\text{midterm grade}) + 0.5 \times (\text{exercise sheets grade}).$$

- The oral exam will be at the end of May and will include only the material of the 4th module.
- The midterm exam (also oral) will be in the 2nd half of March and will include only the material of the 3rd module.
- To get the maximum grade for the exercise sheets, you should solve 75% of all the exercises. If you solve more, you will earn bonus points.
- You can also earn bonus points for working actively at the exercise classes and for solving «bonus exercises» (marked as «**B**» in the sheets).

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ
простой межкампусный аудиторный проект для студентов 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. Г. Семёнов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Одним из мощнейших методов современной теоретической физики является метод функционального интегрирования или, интегрирования по траекториям. Основы данного подхода были заложены Н. Винером ещё в начале XX века, однако наибольшую известность он получил после того, как Р. Фейнман применил данный подход в квантовой механике. В настоящее время функциональный интеграл нашел своё применение в теории случайных процессов, физике полимеров, квантовой и статистической механике и даже в финансовой математике. Несмотря на то, что в ряде случаев его применимость математически строго пока не доказана, данный метод позволяет с удивительным изяществом получать точные и приближённые решения различных интересных задач. Курс посвящён основам данного подхода. На примере стохастических дифференциальных уравнений будут рассказаны основные идеи данного подхода, а так же различные способы точного и приближённого вычисления функциональных интегралов. Далее, в зависимости от интересов аудитории, будет рассказано о различных применениях данного подхода, таких как физика полимеров, квантовая механика, финансовая математика и др. При наличии времени будет дан обзор более продвинутых сюжетов в данной области, в том числе, интегрирование по грассмановым переменным, вычисление функциональных детерминантов операторов и др.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: базовые курсы анализа, ТФКП, теории вероятностей, классической механики. Желательно, но не обязательно: классическая теория поля, статистическая механика, квантовая механика.

ПРОГРАММА:

1. Стохастические дифференциальные уравнения и случайные процессы.
2. Производящий функционал. Марковский (δ-коррелированный) и Гауссов случайные процессы.
3. Вероятность перехода и ее представление в виде функционального интеграла.
4. Вычисление простейших функциональных интегралов.
5. Броуновское движение и Винеровский интеграл.
6. Связь с уравнением Фоккера – Планка, исчислениями Ито и Стратоновича.
7. Гауссовы функциональные интегралы и теорема Гельфанда – Яглома.
8. Приближенное вычисление функционального интеграла.
9. Применение функционального интеграла в квантовой механике, физике полимеров и финансовой математике.
10. Дальнейшее развитие идей.

УЧЕБНИКИ:

1. Chaichian M., Demichev A. Path integrals in physics. Vol. 1: Stochastic processes and quantum mechanics. 2001.
2. Kleinert H. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets. 2004.
3. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. 1976.
4. Семенов А. Г. О случайном блуждании «пьяной компании». Теор. и математ. физика 2016 Т. 187 №. 2 с. 350–359.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: итоговая оценка равна $0.7\,H + 0.3\,E$, где H — средняя оценка по всем домашним контрольным в семестре, а E — оценка за экзамен. Округление в меньшую сторону, но на экзамене есть возможность для повышения оценки путём обсуждения и решения задач.

КОММЕНТАРИЙ: Этот курс входит в базовую линейку курсов, рекомендованных магистерской программой «Математика и математическая физика».

Цепи Маркова

простой межкампусный аудиторный курс на английском языке для студентов 3-го курса и старше

(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛИ: А. Дымов, А. С. Скрипченко.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Простейший случайный процесс — последовательность независимых испытаний (экспериментов). Область применения таких процессов весьма ограничена, так как на практике испытания очень часто оказываются зависимыми. Марковские цепи — простейшие случайные процессы, состоящие из последовательных зависимых испытаний, в которых результат следующего испытания зависит только от результата последнего проведенного испытания, но не зависит от результатов предыдущих испытаний. Другими словами, «будущее зависит только от настоящего, но не зависит от прошлого». Цепи Маркова имеют глубокую и красивую, но в то же время достаточно простую математику. Благодаря своей удивительной эффективности в приложениях к задачам из различных областей — математики, физики, компьютерных наук, биологии, экономики и др. — они составляют, возможно, самый важный класс случайных процессов. Курс является введением в теорию марковских цепей. Мы обсудим их наиболее важные свойства и некоторые известные приложения.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: Стандартные курсы линейной алгебры и анализа первого года обучения. Если у вас был курс теории вероятностей — вам будет проще, однако он не обязателен: все необходимые сведения будут сообщены.

ПРОГРАММА:

1. Марковские цепи с конечным множеством состояний.
2. Примеры.
3. Стационарные состояния и их существование. Метод Боголюбова – Крылова.
4. Эргодическая теорема для цепей Маркова, имеющих эргодическую матрицу переходных вероятностей.
5. Приложения эргодической теоремы. Закон больших чисел для цепей Маркова. Алгоритм Page Rank (Google). Алгоритм Метрополиса – Хастингса.
6. Теорема Перрона – Фробениуса.
7. Топологическая структура цепей Маркова с конечным множеством состояний.
8. Периодические марковские цепи.
9. Апериодические марковские цепи. Эргодическая теорема для неприводимых апериодических цепей Маркова.

УЧЕБНИКИ:

- А.Н. Ширяев, «Вероятность».
- Л.Б. Коралов, Я.Г. Синай, «Теория вероятностей и случайных процессов»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: $(C+E)/2$, где C обозначает накопленную оценку, а E — оценку за экзамен

КОММЕНТАРИЙ: на англ. (если будут те, кто не говорит на русском).

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
простой межкампусный курс для студентов 1-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. В. Кудинов.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Математическая логика изучает основания математики, принципы построения формальных математических теорий и их свойства, а также теорию алгоритмов. Базовых понятий математической логики, является необходимым для изучения любой другой математической дисциплины. Знания основных принципов, возможностей и ограничений формального построения математической теории позволяет более глубоко понять многие теоремы алгебры, математического анализа, топологии и других математических дисциплин. В этом курсе студенты познакомятся с основными принципами построения формальных систем, изучат их свойства, семантику и научатся доказывать основные теоремы, такие как теоремы о корректности и полноте. Формальные системы будут изучаться на примере классической, интуиционистской и модальной пропозициональных логик.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: нет.

ПРОГРАММА:

- Булевы формулы, индуктивное определение. ДНФ, КНФ, теорема Поста.
- Тавтологии и эквивалентности. Булевы алгебры. Теорема Стоуна о представлении булевых алгебр
- Аксиомы исчисления высказываний. Формальное определение вывода, как математической модели доказательства.
- Теорема о дедукции. Противоречивость.
- Независимость аксиомы исключенного третьего и многозначная логика.
- Теорема о полноте исчисления высказываний.
- Теорема о компактности и ее следствия.
- Интуиционистская логика: история, аксиоматика.
- Семантика Крипке интуиционистской логики и теорема корректности.
- Полнота интуиционистской логики относительно семантики Крипке.
- Модальная логика, язык и семантика Крипке.
- Корректность модальной логики относительно семантики Крипке.
- Булевы алгебры с оператором, как семантика модальной логики.
- Теорема о канонической модели и теорема о полноте.

УЧЕБНИКИ:

- Верещагин Н. К., Шень А. «Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств.» М.: МЦНМО, 2012.
- Верещагин Н. К., Шень А. «Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления.» М.: МЦНМО, 2012.

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Вычисляется по формуле $0,6H+0,4E$, где H — средняя оценка за домашние задания, E — оценка за устный экзамен.

Элементы стохастической динамики
простой межкампусный аудиторный НИС для 3-го курса и старше

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: А. С. Ильин.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: весенний семестр 2021/22 уч. г., два занятия в неделю, 6 кредитов.

ОПИСАНИЕ: Стохастические динамические системы возникают в самых разных областях — от теоретической физики и астрофизики до экономики и финансовой математики. Основным инструментом исследования таких систем является теория стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Однако при изучении СДУ студенты быстро сталкиваются со странной ситуацией. Курсы, читаемые физикам-теоретикам и математикам, отличаются уже на уровне определения СДУ, в результате одинаково написанные уравнения для физиков и математиков имеют совершенно разный смысл. Основная причина этого несоответствия кроется вовсе не в разном уровне строгости изложения. Вкратце, причина заключается в различном порядке взятия пределов: в курсах, ориентированных на физические приложения dt стремится к нулю раньше корреляционного времени, а в курсах, обслуживающих финансовую математику, приращение dt всегда больше корреляционного времени. Порядок взятия пределов зависит от конкретных задач, стоящих перед исследователями, однако, в результате оказывается, что «физические» СДУ гораздо больше похожи на обычные диффуры, а «математические» СДУ больше похожи на разностные (или интегральные) уравнения. В нашем курсе мы собираемся рассмотреть оба предельных случая в рамках одного подхода.

Изложение будет вестись на относительно элементарном языке корреляционных функций и их производящих функционалов, что позволит в дальнейшем плавно перейти к изучению технически более сложных конструкций квантовой теории поля и статистической физики с одной стороны и финансовой математики с другой. Мы начнём с обсуждения элементарных вещей: непрерывных случайных величин, плотности вероятности, статистических моментов, характеристических функций и связных моментов (куммулянтов) случайных векторов. Они позволяют легко и изящно изложить закон больших чисел, ЦПТ и принципы больших отклонений. Случайная функция (случайный процесс, случайное поле) вводится как естественное обобщение случайного вектора на бесконечномерный случай. Мы обсудим понятия корреляционного времени, корреляционного масштаба, дельта-процессов. Подробно изучим Пуассоновский и Гауссовский случайные процессы, теорему Вика, принципы расщепления корреляций, закон больших чисел и ЦПТ для случайных процессов с конечным корреляционным временем. Далее рассмотрим стохастические дифференциальные уравнения с аддитивным шумом (диффузия) и мультипликативным шумом (системы с перемежаемостью). В качестве интересного примера, обсуждается парадоксальное поведение статистических моментов в системах с мультипликативным шумом и поясняется значение редких «катастрофических» событий для жизни таких систем. Далее мы рассмотрим формализм Фейнмана – Каца, который позволяет изучать параболические дифференциальные уравнения в частных производных с помощью континуального интегрирования по мере Винера. Этот формализм широко используется в современной квантовой теории, поэтому знакомство с ним важно для каждого культурного математика. В процессе изучения этого формализма мы рассмотрим понятия интегралов Ито и Стратоновича и поговорим про красивую задачу под названием «стохастическое квантование». В заключении курса мы коснемся технически довольно сложной, но также чрезвычайно красивой теории континуальных произведений случайных матриц. Эти произведения естественным образом возникают при решении линейных матричных стохастических уравнений с мультипликативным шумом и используются в теории турбулентного транспорта, стохастической гидродинамике, экономике и т.д.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: линейная алгебра и матанализ; желательно знакомство с основами теории вероятности и дифференциальными уравнениями, однако все нужные факты будут напоминаться на лекциях.

ПРОГРАММА:

- Конечномерные случайные векторы. Производящие функции моментов и связных моментов. Кумулянты. Гауссовы случайные векторы. Теорема Марцинкевича. Закон больших чисел. ЦПТ. Теория больших уклонений. Функция Крамера. Мультипликативный закон больших чисел. Произведения случайных матриц. Спектр Ляпунова.
- Случайные процессы. Производящие функционалы. Корреляционное время. Эргодичность. Гауссовы процессы. Теорема Вика. Пуассоновский процесс. ЦПТ. Большие уклонения. Дельта-процесс. Марковский процесс.
- Стохастические дифференциальные уравнения. Аддитивный и мультипликативный шум. Перемежаемость. Уравнение Ланжевена. Процесс Винера. Процесс Орнштейна – Уленбека.
- Расщепление корреляций. Формула Фурутцы – Новикова. Кинетические уравнения. Уравнение Фоккера – Планка.
- Мера Винера. Континуальное интегрирование. Формализм Фейнмана – Каца. Интегралы Ито и Стратоновича. Евклидово уравнение Шредингера. Амплитуды перехода как условные средние по мере Винера. Стохастическое квантование. Квантовый осциллятор. Критерий существования растущих мод параболических уравнений.
- Если позволит время: Континуальные произведения случайных матриц. -экспонента случайного матричного процесса. Спектр Ляпунова.
- Если позволит время: Турбулентность. Теория Колмогорова. Турбулентный транспорт. Теория Крайчнана – Казанцева.

УЧЕБНИКИ:

[B] В. Кляцкин, «Динамика стохастических систем».

[GM] Б. Оксендаль, «Стохастические дифференциальные уравнения»

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: Итоговая оценка вычисляется по формуле $\min(10, \lceil S+C+E \rceil)$, где $\lceil * \rceil$ означает округление вверх, а вещественные числа $S, C, E \in [0,5]$ суть оценки за сдачу листков (S), за проводимые на семинарах самостоятельные работы (C) и за устный экзамен (E). Если перед итоговым экзаменом выполняется условие $\min(10, \lceil S+C \rceil) \geqslant 8$, то эта отметка по желанию студента может быть поставлена в качестве итоговой без экзамена.

КОММЕНТАРИЙ: Курс будет читаться на русском языке.

Эллиптические интегралы и эллиптические функции
простой межкампусный НИС на английском языке для 3-го курса и старше
(see also description in English)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Т. Такебе.

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2021/22 уч. г., одно занятие в неделю, 3 кредита.

ОПИСАНИЕ: Начавшееся в XVIII веке исследование эллиптических интегралов в XIX веке переросло в теорию эллиптических функций и явилось главным истоком сегодняшней аналитической алгебраической геометрии. Эллиптические интегралы и эллиптические функции появляются в самых разных задачах математики и физики. Мы изучим аналитическую теорию эллиптических интегралов и эллиптических функций и обсудим её приложения.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: математический анализ 1 – 2 курсов (без теории меры и интеграла Лебега), ТФКП (до принципа аргумента).

ПРОГРАММА:

1. Введение. Короткое описание теории эллиптических функций и связанных сюжетов.
2. Длины кривых. Вещественные эллиптические интергалы как длины кривых (эллипс, лемниската).
3. Классификация эллиптических интегралов. Общее определение эллиптических интегралов и классификация.
4. Приложения эллиптических интегралов. Арифметическо-геометрическое среднее. Математический маятник.
5. Вещественные эллиптические функции Якоби. Функция sn Якоби как обратная функция к эллиптическому интегралу. Свойства функций sn, cn и dn.
6. Приложения эллиптических функций Якоби. Математический маятник. Скакалка.
7. Римановы поверхности алгебраических функций. Введение римановых поверхностей; римановы поверхности функций $\sqrt{z}$, $\sqrt{1-z^2}$.
8. Эллиптические кривые. Компактификация римановых поверхностей функций $\sqrt{\varphi(z)}$. Форма эллиптических кривых.
9. Комплексные эллиптические интегралы. Комплексные эллиптические интегралы первого, второго и третьего родов.
10. Теорема Абеля – Якоби. Теорема Абеля – Якоби и её доказательство.
11. Эллиптические функции, общая теория. Определение как мероморфные функции с двумя периодами. Общие свойства.
12. $\wp$-функция Вейерштрасса. Построение $\wp$-функции и её свойства. Формула сложения.
13. Тэта-функции. Определения тэта-функций и их свойства.
14. Комплексные эллиптические фунции Якоби. Определение функций sn, cn и dn как отношений тэта-функций. Их свойства.

УЧЕБНИКИ:

ПОРЯДОК ОЦЕНИВАНИЯ: min(10,(баллы за домашние задания)/(макс. возможные баллы)∗15).

Course descriptions in English

Listed in this section are the courses that will be given in English if required (e.g., if some students do not understand Russian). All these courses will be equipped with printed matter in English.

Algebraic geometry, Fall Term
advanced inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher

TEACHER: M. V. Finkelberg.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: During the 50 years after Grothendieck, the algebraic geometry became the common language of Physics and Mathematics, just like the functional analysis used to be during the previous 50 years. The course will cover most of «Algebraic Geometry» by Hartshorne. Additional topics may include: the Hilbert scheme and its application to the existence theorems, a proof of the Weil conjectures for curves over finite fields, Intersection theory.

PREREQUISITES: 1. Our basic courses of the 1st and 2nd years. Thus, this course is for the bachelor students at least in their 3rd year. However, I know some 2nd year students and even prospective 1st year students that can take this course. 2. Introduction to the category theory and homological algebra by A. Gorodentsev 3. Some commutative algebra will be very helpful (e.g. the book by Atiyah – Macdonald is more than enough). However, we will recall some commutative algebra along the way, and if you are willing to believe some results and catch up, there is no need to take a Commutative algebra course beforehand.

SYLLABUS:

1. Algebraic varieties: definition and existence. The Nulstellensatz. Determinantal varieties.
2. The Hilbert basis theorem. The preparation lemma and some consequences. Hypersurfaces and the principal ideal theorem.
3. Products, separated and complete varieties. Graphs of morphisms. Algebraic groups. Cones and projective varieties. Chow lemma.
4. Presheaves and sheaves. Direct limit of sheaves.
5. Sheaves of rings and modules. Quasicoherent sheaves on algebraic varieties.
6. The Zariski cotangent space and smoothness. Tangent cones.
7. The construction of all smooth curves. Morphisms between smooth curves.
8. The definition of cohomology. Higher direct images.
9. The Riemann – Roch theorem.
10. Cech cohomology and the Kunneth formula. Cohomology of projective varieties.
11. Embedding in projective space.
12. Cohomological characterization of affine varieties.
13. Bezout theorem
14. Elliptic curves

15. Locally free coherent sheaves on projective spaces.
16. One-dimensional algebraic groups.
17. Correspondences.
18. The Riemann – Roch theorem for surfaces.

TEXTBOOKS:

[K] G. Kempf, «Algebraic varieties».

[W] R. Hartshorne, «Algebraic geometry».

GRADING RULES: 0.07 of the percentage of the completely solved home assignments + 0.03 of the percentage of the completely solved final exam problems.

Algebraic geometry, Spring Term
advanced inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher

TEACHER: M. V. Finkelberg.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: During the 50 years after Grothendieck, the algebraic geometry became the common language of Physics and Mathematics, just like the functional analysis used to be during the previous 50 years. The course will cover most of «Algebraic Geometry» by Hartshorne. Additional topics may include: the Hilbert scheme and its application to the existence theorems, a proof of the Weil conjectures for curves over finite fields, Intersection theory.

PREREQUISITES: 1. Our basic courses of the 1st and 2nd years. Thus, this course is for the bachelor students at least in their 3rd year. However, I know some 2nd year students and even prospective 1st year students that can take this course. 2. Introduction to the category theory and homological algebra by A.Gorodentsev 3. Some commutative algebra will be very helpful (e.g. the book by Atiyah-Macdonald is more than enough). However, we will recall some commutative algebra along the way, and if you are willing to believe some results and catch up, there is no need to take a Commutative algebra course beforehand. 4. Finally, the Fall part of the Algebraic Geometry course is a prerequisite for the Spring part.

SYLLABUS:

1. Schemes
2. Separated and proper morphisms
3. Divisors
4. Projective morphisms
5. Differentials
6. Formal schemes
7. The Serre duality theorem
8. Flat morphisms
9. Smooth morphisms
10. Etale morphisms
11. The theorem on formal functions
12. The semicontinuity theorem
13. Birational transformations
14. The cubic surface
15. Quot schemes and Hilbert schemes
16. Picard schemes
17. Intersection theory
18. Chern classes
19. Time permitting, we will cover many more subjects.

TEXTBOOKS:

[K] G. Kempf, «Algebraic varieties».

[W] R. Hartshorne, «Algebraic geometry».

GRADING RULES: 0.07 of the percentage of the completely solved home assignments + 0.03 of the percentage of the completely solved final exam problems.

Analysis of several complex variables
simple inter-campus project for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. A. Glutsyuk.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Analysis of several complex variables is not studied in the usual university program. At the same time it is a necessary pre-requisite to study many important domains of contemporary mathematics such as algebraic geometry, complex dynamics, singularity theory, differential equations etc. While holomorphic functions of several complex variables share many basic properties of functions of one variable, new phenomena of analytic extention occurs. For example, they can have neither isolated singularities, nor compact sets of singularities. Each complex space of dimension at least two contains a proper domain that is biholomorphically equivalent to the ambient space (Fatou–Bieberbach domain). Theory of holomorphic convexity and Stein manifolds together with basic sheave theory allow to prove important extension and approximation theorems. The GAGA principle in algebraic geometry says that every analytic object on a complex projective algebraic manifold is algebraic. The cours will cover the above mentioned topics, including basic analytic set theory, biholomorphic automorphisms and introduction to complex dynamics.

PREREQUISITES: basic analysis, theory of functions of one complex variable

SYLLABUS:

1. Basic properties of holomorphic functions of several complex variables. Hartogs and other erasing singularity theorems.
2. Analytic set theory, Wejerstrass polynomials, introduction to complex algebraic geometry.
3. Generalized Maximum Principle, Schwarz Lemma, Cauchy Inequality, automorphisms, complex dynamics.
4. Domains of holomorphy, holomorphic convexity, Levi- and pseudo-convexity, Levi form. Envelopes of holomorphy, Riemann domains.
5. Dolbeault cohomology, Poincare lemma, Cousin problems, Sheaf cohomology.
6. Stein manifolds, coherent analytic sheaves, extension and approximation theorems, Cartan A and B Theorems (without proofs).

TEXTBOOKS:

[GR] R.Gunning; H.Rossi. Analytic functions of several complex variables. AMS Chelsea Publishing, 2009.

[SH] B.Shabat. Introduction to complex analysis. Part II: Functions of several variables. Translations of Mathematical Monographs, AMS, 1992.

[GH] Ph.Griffiths; J.Harris. Principles of algebraic geometry. J.Wiley and Sons, 1978.

GRADING RULES: 0.3 (problem solving) + 0.1 (intermediate exam) + 0,6 (final exam).

Cluster Poisson varieties
simple inter-campus offline project for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: V. G. Gorbounov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Cluster varieties introduced by Fomin and Zelevinsky are commutative rings with unit and no zero divisors equipped with a distinguished family of generators (cluster variables) grouped in overlapping subsets (clusters) of the same cardinality connected by exchange relations. Originally they were introduced in an attempt to create an algebraic and combinatorial framework for the study total positivity in semisimple groups. In the case of GL_n the notion of total positivity coincides with the classical one, first introduced by Gantmakher and Krein. Since then, the theory of cluster algebras has witnessed a spectacular growth due to the many links that have been discovered with a wide range of subjects including representation theory of quivers and finite-dimensional algebras and categorification; discrete dynamical systems based on rational recurrences; Teichmuller and higher Teichmuller spaces; combinatorics and the study of combinatorial polyhedra; commutative and non-commutative algebraic geometry, projective configurations and their tropical analogues, the study of stability conditions in the sense of Bridgeland, Donaldson – Thomas invariants; Poisson geometry and theory of integrable systems. The purpose of the course is to give an introduction to the theory of cluster poisson varieties.

PREREQUISITES: Courses in algebra and topology.

SYLLABUS:

1. Totally positive matrices. Whitney theorem. Fekete criteria.
2. Bruhat cells. Symmetric group and the length function.
3. Bruhat cells in the unipotent group and its positive parametrization.
4. Matrix product as a concatenation of graphs. Planar networks. Lindstrom – Gessel – Viennot lemma.
5. The cluster algebra structure on the unipotent group and the Plucker relations.
6. The new positivity criteria defined by the cluster algebra structure.
7. Examples of the cluster algebra structure in geometry.
8. Poisson algebras. Poisson algebra structure on the matrix group.
9. Poisson structure on the set of networks.
10. Custer Poisson algebras.

TEXTBOOKS:

GRADING RULES: The exam will consists of a presentation of a topic from the course.

Combinatorics of Vassiliev invariants
advanced inter-campus seminar for 3rd year students and higher

TEACHERS: M. E. Kazarian, S. K. Lando.

LEARNING LOAD: two terms of 2021/22 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

DESCRIPTION: This students' research seminar is devoted to combinatorial problems arising in knot theory. The topics include finite order knot invariants, graph invariants, matroids, delta-matroids, integrable systems and their combinatorial solutions. Hopf algebras of various combinatorial species are studied. Seminar's participants give talks following resent research papers in the area and explaining results of their own.

PREREQUISITES: no.

SYLLABUS:

1. Knots and their invariants.
2. Knot diagrams and chord diagrams.
3. 4-term relations for chord diagrams, graphs, and delta-matroids.
4. Weight systems.
5. Constructing weight systems from Lie algebras.
6. Hopf algebras of graphs, chord diagrams and delta-matroids.
7. Combinatorial solutions to integrable hierarchies.
8. Khovanov homology.

TEXTBOOKS:

1. S. Chmutov, S. Duzhin, Y. Mostovoy. CDBook. CUP, 2012.
2. S. Lando, A. Zvonkin. Graphs on Surfaces and Their Applications. Springer, 2004.

GRADING RULES: Regular participation in the seminar is necessary for marking. However, only the participation can not contribute more than 8 points. For getting a higher score, you have to give a talk either on resent actual papers or on your own results in scientific directions of the seminar.

Derived Categories of Coherent Sheaves
advanced inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher

TEACHER: A. B. Pavlov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: This is a specialized course in algebraic geometry. The main object of this course is a derived category of coherent sheaves on a smooth projective variety. From a homological point of view it is an example of a triangulated category, satisfying a lot of additional nice properties. Derived categories of coherent sheaves have a long history: in 1960th they were used by A. Grothendieck and J.-L. Verdier to formulate and prove relative version of the duality theorem; in 1980th derived categories of coherent sheaves got new attention from the point of view of semi-orthogonal decompositions of triangulated categories; In 1990th they were used by M. Kontsevich to formulate homological mirror symmetry program.

In the first part of the course we will review basics of triangulated categories, derived categories of abelian categories and derived functors, but we will focus mainly on applications of these methods to category of coherent sheaves on a smooth projective variety. We will prove basic facts about derived functors between derived categories of coherent shaves and work out several explicit examples of semi-orthogonal decompositions. We will find examples of geometric tilting: equivalence of the derived category of coherent sheaves and derived category of an associative algebra. We are also going to provide a criterion for an integral functor to be an equivalence. Then we will be able to show that a variety is completely determined by its derived category in the case of ample or anti-ample canonical bundle and, also, compute the group of derived automorphisms in these cases. We will find out that spherical objects allow constructing derived automorphisms of a non-geometric origin.

PREREQUISITES: Students taking this course are assumed to be familiar with basics of algebraic geometry and homological algebra: categories, complexes and cohomology, injective and projective resolutions; varieties (projective, smooth), map of varieties (proper, projective, flat, smooth), line bundles and divisors, ampleness, vector bundles and coherent sheaves, Serre duality.

SYLLABUS:

1. Triangulated categories
2. Derived category of an abelian category
3. Derived functors
4. Coherent sheaves via homological methods
5. Derived functors in algebraic geometry
6. Exceptional objects and semi-orthogonal decompositions
7. Geometric tilting theory
8. Integral functors
9. Derived categories of varieties with ample (anti)canonical bundle
10. Spherical objects

TEXTBOOKS: Huybrechts D. Fourier-Mukai Transforms in Algebraic Geometry, 2005 Bartocci C., Bruzzo U., Ruipérez D. H. Fourier-Mukai and Nahm Transforms in Geometry and Mathematical Physics, 2009 Hartshorne R. Residues and Duality, 1966

GRADING RULES: 0.5A + 0.5P, where A is the assignments grade, P is the presentation grade. There will be several assignments during the semester, and at the and of the course participants will give a short presentation of a course related topic.

Diophantine approximations, fractal geometry of Cantor sets and dynamics
simple inter-campus online course for 2nd year students and higher

TEACHER: K. M. S. Santos.

LEARNING LOAD: module 1 of 2021/22 A. Y., two classes per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The study by Diophantus (circa AD250) of rational approximations to solutions of certain algebraic equations began a subfield of Number Theory called Diophantine approximations. After the works of Markov in 1880, it was realized that the best constants of Diophantine approximations of irrational numbers and indefinite binary real quadratic forms form two interesting subsets of the real line nowadays called the Lagrange and Markov spectra. This course aims to review the basic structures about these spectra (discovered by Lagrange, Markov, Perron and Freiman among many others) and to discuss some recent results concerning their surprisingly intricate fractal geometry.

PREREQUISITES: basic calculus (of course, it is even better if the students have some notions of real analysis).

SYLLABUS: Diophantine approximations, Dirichlet theorem, Hurwitz theorem, definitions of the Lagrange and Markov spectra, continued fractions, Perron's characterisation of the spectra, beginning of the spectra (after Markov), ending of the spectra (after Hall and Freiman), statements and proofs of some results about the intermediate portions of the spectra including bounds on the dimension of $M \backslash L$ and the transition point t_1 where $L \cap (\sqrt{5}, t_1)$ has maximal dimension, discussion of conjectures and open problems about the intermediate portions of the spectra.

TEXTBOOKS:

- T. Cusick, M. Flahive. The Markov and Lagrange spectra, https://www.ams.org/books/surv/030/surv030-endmatter.pdf
- Lima, Moreira, Santos, Romana. Classical and dynamical Markov and Lagrange spectra, https://worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/11965

GRADING RULES: The evaluation will consist of two lists of exercises (the first will be disclosed at the middle of the course and the second will be disclosed at the end of the course) to be delivered one week after their disclosures.

Elliptic integrals and elliptic functions
simple inter-campus seminar for 3^{rd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: T. Takebe.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The study of elliptic integrals started in the eighteenth century was turned into the theory of elliptic functions in the nineteenth century, which eventually became a prototype of today's algebraic geometry. On the other hand elliptic functions and elliptic integrals appear in various problems in mathematics as well as in physics. In this research seminar (lecture style) we shall study elliptic integrals and elliptic functions with emphasis on analytic aspects and applications.

PREREQUISITES: Calculus course (first/second year courses without the Lebesgue integral), Complex analysis (till the argument principle).

SYLLABUS:

1. Introduction.

   Overview and introduction of related topics.

2. Arc length of curves.

   Real elliptic integrals as arc length of curves (ellipse, leminiscate).

3. Classification of elliptic integrals.

   General definition of elliptic integrals and classification.

4. Applications of elliptic integrals.

   Arithmetic geometric mean. Simple pendulum.

5. Jacobi's elliptic functions (real case).

   Jacobi's sn as the inverse function to the elliptic integral. Properties of Jacobi's sn, cn and dn.

6. Applications of Jacobi's elliptic functions.

   Simple pendulum. Skipping rope.

7. Riemann surfaces of algebraic functions.

   Introduction to Riemann surfaces; $\sqrt{z}$, $\sqrt{1-z^2}$. Integral on Riemann surfaces.

8. Elliptic curves.

   Compactification of the Riemann surfaces of $\sqrt{\varphi(z)}$. Shape of elliptic curves.

9. Complex elliptic integrals.

   Complex elliptic integrals of the first, the second and the third kinds.

10. Abel-Jacobi theorem.

    Abel-Jacobi theorem and its proof.

11. Elliptic functions, general theory.

    Definition as meromorphic functions with two periods. General properties.

12. Weierstrass's $\wp$-function.
    Construction of $\wp$-function and its properties. Addition theorem.
13. Theta functions.
    Definition of theta functions and its properties.
14. Jacobi's elliptic functions (complex case).
    Definition of Jacobis's sn, cn and dn as ratios of theta functions. Their properties.

TEXTBOOKS:

GRADING RULES: min((points for homework)/(max. possible points)$*$15, 10)

Functional Analysis 2 (Operator Theory)
advanced inter-campus offline course for 3^{rd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. Yu. Pirkovskii.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Functional analysis studies infinite-dimensional vector spaces equipped with a norm (or, more generally, with a topology), operators between such spaces, and representations of algebraic structures on such spaces. The classical areas of Functional Analysis are the spectral theory of linear operators, the geometry of Banach spaces, distribution theory, operator algebra theory, etc. Among relatively new areas are noncommutative geometry à la Connes, operator space theory (a.k.a. «quantum functional analysis»), and locally compact quantum groups. Functional analysis has numerous applications in differential equations, harmonic analysis, representation theory, geometry, topology, calculus of variations, optimization, quantum physics, etc.

This is a continuation of the course «Introduction to Functional Analysis» (fall 2021). We plan to discuss those aspects of functional analysis which deal with rather general classes of linear operators on Banach and Hilbert spaces. This means that we will not consider, for example, differential operators at all, because their theory can be well presented in a separate course only. Instead, we concentrate on those topics which emphasize the role of algebraic methods in functional analysis.

PREREQUISITES: Calculus, linear algebra, metric spaces, the Lebesgue integral, basics of functional analysis (Banach and Hilbert spaces, bounded linear operators, the spectrum of an operator — see, for example, the course «Introduction to Functional Analysis», Fall 2021)

SYLLABUS:

1. Topological vector spaces and duality.
2. Compact and Fredholm operators. The Riesz – Schauder theory. The general index theory.
3. Commutative Banach algebras. The Gelfand transform. The commutative Gelfand – Naimark theorem.
4. Spectral theory of normal operators on a Hilbert space. The spectral theorem.
5. Distributions (if time permits).

TEXTBOOKS:

- A. Ya. Helemskii. *Lectures in Functional Analysis*. MCCME, 2004 (in Russian). English transl.: AMS, 2006.
- V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov. *Real and Functional Analysis*. RCD, 2011 (in Russian). English transl.: Springer, 2020.
- A. A. Kirillov and A. D. Gvishiani. *Theorems and problems in Functional Analysis*. Moscow, Nauka, 1979 (in Russian). English transl.: Springer, 1982.
- B. Simon. *Real Analysis. (A comprehensive course in Analysis, Part 1).* AMS, 2015.
- B. Simon. *Operator Theory. (A comprehensive course in Analysis, Part 4).* AMS, 2015.
- M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis.* Academic Press, 1972. Russian transl.: Mir, 1977.

- V. M. Kadets. *A course in functional analysis*. Khar'kov. Nats. Univ. im. V. N. Karazina, Kharkiv, 2006 (in Russian). English transl.: Springer, 2018.
- W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill, 1991. Russian transl.: Lan', 2005.
- J. B. Conway. *A course in Functional Analysis.* Springer, 1990.
- A. Yu. Pirkovskii. *Spectral theory and functional calculi for linear operators*. MCCME, 2010 (in Russian). https://www.mccme.ru/free-books/pirkovsky/pirkovsky-spectral.pdf.
- A. Yu. Pirkovskii. *Lecture notes in functional analysis*. Unfinished and unpublished lecture notes (HSE, 2011/2012, in Russian). http://vyshka.math.ru/1112/funcan.html.
- G. Murphy. *C*-algebras and operator theory*. Academic Press, 1990. Russian transl.: Factorial, 1997.
- R. Meise and D. Vogt. *Introduction to Functional Analysis*. Clarendon Press, 1997.
- F. Treves. *Topological vector spaces, distributions, and kernels*. Academic Press, 1967.

GRADING RULES:

- The final grade is calculated by the formula

$$\text{final grade} = 0.7 \times (\text{cumulative grade}) + 0.3 \times (\text{exam grade}).$$

- The cumulative grade is calculated by the formula

$$\text{cumulative grade} = 0.5 \times (\text{midterm grade}) + 0.5 \times (\text{exercise sheets grade}).$$

- The oral exam will be at the end of May and will include only the material of the 4th module.
- The midterm exam (also oral) will be in the 2nd half of March and will include only the material of the 3rd module.
- To get the maximum grade for the exercise sheets, you should solve 75% of all the exercises. If you solve more, you will earn bonus points.
- You can also earn bonus points for working actively at the exercise classes and for solving «bonus exercises» (marked as «**B**» in the sheets).

Geometric introduction to algebraic geometry
simple inter-campus online seminar for 2nd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. S. Tikhomirov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Algebraic geometry studies geometric loci looking locally as a solution set for a system of polynomial equations on an affine space. The main feature of this subject is that it provides an algebraic explanation to various geometric properties of the figures and at the same time gives geometric intuition to purely algebraic constructions. It plays an important role in many areas of mathematics and theoretical physics, and provides the most visual and elegant tools to express all aspects of the interaction between different branches of mathematical knowledge. The course gives the flavor of the subject by presenting examples and applications of the ideas of algebraic geometry, as well as a first discussion of its technical tools.

PREREQUISITES: first year of undergraduate study (algebra, calculus, geometry, topology).

SYLLABUS:

- Projective spaces. Geometry of projective quadrics. Spaces of quadrics.
- Lines, conics, and PGL (2). Rational curves and Veronese curves. Plane cubic curves.
- Grassmannians, Veronese's, and Segre's varieties. Examples of projective maps coming from tensor algebra.
- Elements of commutative algebra: Integer elements in ring extensions, finitely generated algebras over a field, transcendence generators, Hilbert's theorems.
- Affine Algebraic Geometry – Commutative Algebra dictionary. Maximal spectrum, pullback morphisms, Zariski topology, geometry of ring homomorphisms.
- Agebraic manifolds, separateness. Irreducible decomposition. Projective manifolds, properness. Rational functions and maps.
- Dimension. Dimensions of subvarieties and fibers of regular maps. Dimensions of projective varieties.
- Vector bundles and their sheaves of sections. Vector bundles on the projective line. Linear systems, invertible sheaves, and divisors. The Picard group.
- If the time allows: (co)tangent and (co)normal spaces and cones, smoothness, blowup. The Euler exact sequence on a grassmannian.

TEXTBOOKS:

- A. L. Gorodentsev, Algebra II. Textbook for Students of Mathematics. Springer, Ch. 1, 2, 10, 11, 12.
- A. L. Gorodentsev, Algebraic Geometry Start Up Course, MCCME.
- J. Harris, Algebraic Geometry. A First Course, Springer, 1992.
- M. Reid, Undergraduate algebraic geometry, CUP, 1989.

GRADING RULES: final grade = 5·(percentage of solutions of the problems from the task sheets) + 5·(percentage of solutions of the problems from final written exam).

Hodge theory and topology I
advanced seminar for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: V. A. Lunts.

LEARNING LOAD: module 3 of 2021/22 A. Y., two classes per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Hodge theory enhances the cohomology of a compact (complex) Kähler manifold with a rich structure: the Hodge decomposition, action of the Lefschetz operator (which is augmented to a representation of the Lie algebra $_2$), and Hodge – Riemann relations on the primitive cohomology. In this course we will discuss these notions in detail as well as the applications to the topology of Kahler manifolds. In particular, we will discuss the Hodge conjecture, the first Chern class of a holomorphic line bundle, the degeneration of the Leray spectral sequence for families of Kahler manifolds (Deligne's theorem). Before we begin discussing complex manifolds, there will be two large introductory sections: 1) de Rham cohomology of smooth manifolds, up to representing cohomology classes by harmonic forms; 2) theory of sheaves and their cohomology, main points of homological algebra.

PREREQUISITES: Basic notions of algebraic topology, such as simplicial and singular cohomology of topological spaces, fundamental group. It will help to know what is a manifold, vector bundle, tangent and cotangent bundles.

TEXTBOOKS:

- R. Bott, T. W. Tu. Differential forms in algebraic topology. 1982.
- C. Voisin. Hodge theory and complex algebraic geometry I, II. 2002.
- Р. Годеман. Алгебраическая топология и теория пучков. 1961.

GRADING RULES: 100% homework

Hodge theory and topology II
advanced seminar for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: V. A. Lunts.

LEARNING LOAD: module 4 of 2021/22 A. Y., two classes per week, 3 credits.

DESCRIPTION: We will cover the following topics: families of complex varieties, Kodaira – Spencer map, Gauss – Manin connection, variation of Hodge structure, period domain, period map; vanishing cohomology and Picard – Lefschetz theory. We will also describe the Hodge filtration on the cohomology of hypersurfaces in the projective space. Then we will introduce the notion of a mixed Hodge structure and will consider numerous examples and applications.

PREREQUISITES: This course is planned as a continuation of «Hodge theory and topology I». In particular students should have a good knowledge of de Rham cohomology, sheaf theory and Hodge decomposition on Kahler manifolds. We will have many examples from complex algebraic geometry.

TEXTBOOKS:

- C. Voisin. Hodge theory and complex algebraic geometry I, II. 2002.
- Ch. Peters, J. Steenbrink. Mixed Hodge structures. 2007.
- Вик. Куликов, П. Курчанов. Комплексные алгебраические многообразия: периоды интегралов, структуры Ходжа. 1989.

GRADING RULES: 100% homework

Integrable systems as systems of PDEs with an infinite dimensional algebra of symmetries

advanced inter-campus seminar for 3^{rd} year students and higher

(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. Yu. Buryak.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: The concept of an integrable system can be interpreted in various ways. In our course, we will mainly concentrate on the approach defining an integrable system as a system of partial differential equations possessing an infinite dimensional algebra of infinitesimal symmetries. Regarding the class of partial differential equations, we will consider systems of evolutionary partial differential equations with one spatial variable. We will discuss classical examples of such integrable systems, applications in enumerative geometry, and classification problems.

PREREQUISITES: Linear algebra. Calculus of functions of several variables. Calculus on manifolds. Differential geometry.

SYLLABUS:

1. The Korteweg – de Vries (KdV) equation, constructions of solutions.
2. The algebra of pseudo-differential operators, a construction of the KdV hierarchy and, more generally, of the Kadomtsev – Petviashvili hierarchy (KP hierarchy).
3. A geometric approach to constructing solutions of the KP hierarchy via an infinite dimensional Grassmannian.
4. Applications of the KP hierarchy to enumerative geometry: Hurwitz numbers.
5. The notion of a Hamiltonian structure, Poisson brackets, the Schouten bracket.
6. The bihamiltonian structure of the KdV hierarchy and of the Gelfand – Dickey hierarchy.
7. The Dubrovin – Frobenius manifolds, the systems of hydrodynamic type, their dispersive deformations.

8*. The theorem about a classification of Poisson brackets of hydrodynamic type.

TEXTBOOKS:

GRADING RULES: Written take-home exam at the end of the course.

Introduction to algebraic groups and invariant theory
advanced inter-campus course for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: V. S. Zhgoon.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Geometric invariant theory and the classical theory of invariants of algebraic groups are a very important branchs of modern mathematics. Everyone meets already the first examples of invariants of linear transformations, such as determinant, trace, characteristic polynomial, already in the first course of linear algebra. The classical theory of invariants is devoted to the description of the algebra of polynomial or tenzor invariants of classical groups, such as the full linear group, orthogonal and symplectic groups. In turn, the geometric invariant theory, which originates in the works of Hilbert and Mumford, is devoted to the study of the geometric properties of invariants, for example, the construction and the study of the geometry of various quotient spaces, and is use as the main tool for constructing moduli spaces (curves, vector spaces, and other objects). In the course we will touch on both the classical theory of invariants and geometric. We will also study equivariant embeddings of homogeneous spaces.

PREREQUISITES: Knowledge of linear algebra and the theory of representations of finite groups is required. Knowledge of Lie groups and algebras and the basics of algebraic geometry are useful.

SYLLABUS:

- Algebraic groups and their Lie algebras.
- Actions of algebraic groups. The orbits, stabilizers and homogeneous spaces. Chevalley's theorem.
- Flag varieties. Action of solvable groups on complete varieties. Borel (Lie-Kolchin) fixed point theorem.
- Conjugacy of Borel subgroups, maximal tori, Cartan subgroups.
- Structural theory of semisimple algebraic groups.
- Action of reductive groups on affine varieties. Finite generation of the algebra of invariants (Hilbert's theorem).
- Category and geometric quotient. The existence of a category quotient for the action of reductive groups on affine varieties.
- Noether's theorem that bound the degrees of generators of algebra of invariants.
- Theory of invariants of classical groups.
- Action of reductive groups. Linearization of an invertible line bundle. The group of G-linearized line bundles $\mathrm{Pic}_G(X)$.
- Semistable and stable points. The Mumford quotient.
- Numerical stability criterion.
- Hilbert – Mumford criterion.
- Popov criterion for the stability of an action on an affine manifold.
- Luna's slice theorem. Stratification and resolution of null-cone singularities.
- Moment maps. The Kempf-Ness criterion that characterize closed orbits.
- Hesselink stratification of a set of unstable points.
- Properties of U-invariants, deformation to an horospherical variety.

TEXTBOOKS:

- D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, Geometric invariant theory, 3rd. edition, Ergebnisse Math. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994
- I.V.Dolgachev, Introduction to Geometric Invariant Theory, Lect. Notes Series, 25, Seoul Nat. Univ., 1994.
- Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, Итоги науки и техн. ВИНИТИ, Совр. пробл. мат., Фунд. направл., т. 55, 1989, с. 137–309.
- J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Graduate Texts in Math., no. 21, Springer, 1975. (Пер. на русск.: Д. Хамфри. Линейные алгебраические группы. - М.: Наука, 1980.)
- Х.Крафт, Геометрические методы в теории инвариантов, Москва: Мир, 1987.
- F.Knop, H.Kraft, T.Vust, The Picard group of a G-variety. Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie (H. Kraft, P. Slodowy, T. Springer eds.) DMV-Seminar **13**, Birkhauser, 1989, 77–88.
- D. A. Timashev, Homogeneous spaces and equivariant embeddings. In: Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups VIII (R. V. Gamkrelidze, V. L. Popov, eds.), Encyclopædia Math. Sci., vol. 138, Springer, 2011.

GRADING RULES: 0.3$*$grade for exercise sheet $+0.7*$final exam grade

Introduction to algebraic number theory
simple inter-campus course for 2$^{\text{nd}}$ year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. B. Kalmynin.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Many classical and modern problems in number theory can be interpreted in terms of properties of algebraic objects such as algebraic number fields, their rings of integers and orders in these rings, ideal class groups and unit groups. In this course, we will explore the main notions of algebraic number theory and connect them to some of the most classical problems and theorems, for example, the Dirichlet theorem on primes in arithmetic progressions, Gauss class number problem and Fermat's last theorem. We will also learn about the properties of analytic and topological objects corresponding to number fields, such as the Dedekind zeta-function and the ring of adeles.

PREREQUISITES: basic courses of algebra and analysis

SYLLABUS:

1. Galois theory, finite fields, quadratic reciprocity law. Local fields, Ostrowski's theorem.
2. Theory of quadratic forms, Dirichlet characters. Dirichlet theorem on primes in arithmetic progressions. ∗Riemann zeta function and Prime Number Theorem.
3. Algebraic number fields. Trace and norm, different and discriminant. Dedekind domains. ∗Galois group of a typical polynomial.
4. Cyclotomic fields, Fermat's last theorem, ∗regular and irregular primes.
5. Units and ideal classes. Dirichlet's unit theorem. Ideal class group, Minkowski's bound. ∗Class number formula
6. Adeles and ideles, strong approximation. Dedekind zeta-function and its functional equation. ∗Extended Riemann hypothesis and Chebotarev density theorem.

TEXTBOOKS: Borevich Z.I., Shafarevich I.R., Number Theory; Weil A., Basic Number Theory; Lang S. Algebraic number theory; Serre J-P., A course in arithmetics

GRADING RULES: min(10, 0.4∗(problem sets (max 10 pts)) + 0.6∗(home exam (max 12 pts))

”

Introduction to algebriac numbers and class field theory
advanced inter-campus seminar for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: V. S. Zhgoon.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Algebraic number theory is a classical area of mathematics, appeared during the study of solutions to Diophantine equations, and was developing during attempts to prove Fermat's theorem. It is now a vast classical field of knowledge underlying Arithmetic geometry. This course is a continuation of the basic course in number theory. We will study the filtration of the Galois group: namely, the decomposition subgroup, inertia, and higher ramification groups and their norm maps. We learn about Galois cohomology of fields, as well as local and global class field theory. Time permitting, we will discuss an algebra-geometric analogue of this theory that allows us to describe Abelian coverings of curves in terms of their Jacobians. We will also talk about Arakelov's geometry, which allows us to construct a «compactification» of a curve over a ring of algebraic integers.

PREREQUISITES: Galois theory, basic course in number theory

SYLLABUS:

1. Adels and idels.
2. An adelic interpretation for the Dirichlet theorem on units and for the theorem on finiteness of a group of classes of ideals.
3. Galois Cohomology. Hilbert's theorem 90.
4. Non-Abelian cohomology and torsors.
5. Shapiro Lemma. The Tate-Nakayama theorem.
6. Brauer group. Central simple algebras.
7. Filtering the Galois group by ramification subgroups.
8. Norm map.
9. Local class field theory.
10. Local characters. The reciprocity laws.
11. The global class field theory.

TEXTBOOKS: Serre J.-P. Local fields. Springer, 2013. – T. 67.

GRADING RULES: 0.3 (grade for exersice sheet) + 0.7(grade for final exam)

INTRODUCTION TO CATEGORY THEORY AND HOMOLOGICAL ALGEBRA
simple inter-campus course for 2^{nd} year students and higher

TEACHER: C. Brav.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: The language of categories and functors is a universal tool for expressing the algebraic properties of objects and maps between them in a particular theory, no matter what area of mathematics it belongs to. The ability to think in this language allows you to find simple conceptual answers to many seemingly difficult questions and guess the correct formulations of new interesting problems. The aim of the course is to master categorical constructions using natural informative examples and to acquire skills in working with the main computing tool for abelian categories — complexes and their homologies.

PREREQUISITES: First year bachelor's (standard courses in algebra, analysis, geometry, combinatorics, and topology)

SYLLABUS:

- Categories, functors, presheaves. Examples: simplicial sets, presheafs on topological spaces. The category of functors, the Yoneda lemma, representable functors, and the definition of objects by universal properties.
- Adjoint functors. Limits. Filtered categories. Examples: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, non-Archimedean completion of the ring $\mathbb{Z}$, localization and non-commutative Ore fractions.
- Additive, exact, and abelian categories. Diagram chasing, exact sequence lemmas. Direct sums and products. Injective, projective, (co)generating and (co)compact objects. Characterization of categories of modules, Morita equivalence. If time permits: embedding theorem.
- Categories of complexes, homotopy and homology. Examples: a complex of chains of a simplicial set, resolutions of modules, resolutions of monomial ideals. Long exact sequence of homologies. Cone of morphism.
- Spectral sequences of an exact pair, a filtered complex and convolution of a bicomplex.
- Ext and Tor on the category of modules. Injective and projective resolutions. Multiplications and convolutions. Koszul complexes, Hilbert's syzygy theorem.
- Bar resolution. Cohomology of algebras and groups. Classifying spaces.
- If time permits: triangulated categories and a derived category from an abelian category.

TEXTBOOKS: TBA

GRADING RULES: 10 homework sheets, ungraded. Midterm (40%) and final exam (60%), closely based on problems from homework sheets.

An introduction to cobordism theory
advanced offline seminar for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: S. A. Abramyan, A. G. Gorinov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: The starting point of cobordism theory is the question whether or not one smooth manifold is the boundary of another. This question and a few similar ones can be answered using homotopy theory. Vice versa, some of the strongest known results of homotopy theory make essential use of cobordisms of some type or another.

We will begin by looking at the Pontrjagin – Thom construction, which allows one to reduce the above question and its variants (oriented, non-oriented, framed etc.) to calculating the homotopy groups of the corresponding Thom spectrum. Then we will study the classical applications. In particular, we will see that a smooth manifold bounds another smooth manifold if and only if all its Stiefel – Whitney numbers vanish. After that we will focus on complex cobordism and applications to homotopy theory.

PREREQUISITES: Smooth manifolds as covered in the compulsory course; homology and cohomology as covered in Algebraic topology 1 or the first three chapters of Hatcher's Alegbraic topology.

SYLLABUS:

1. Examples of bordisms: oriented, non-oriented, complex and framed bordisms.
2. The Pontrjagin – Thom theorem.
3. Spectra and their homotopy groups: a reminder. The Thom spectra.
4. The Adams spectral sequence.
5. Applications of the Adams spectral sequence to the calculation of bordism groups.
6. The Hurewicz homomorphism.
7. Orientations of vector bundles with respect to multiplicative cohomology theories. Complex oriented theories.
8. Formal group laws and Quillen's theorem.
9. Cohomology operations and the Landweber-Novikov theorem.
10. (*) Brown – Peterson spectra.
11. (*) Landweber's exact functor theorem.
12. (*) Elliptic cohomology. Topological modular forms.
13. (*) Chromatic spectral sequence and Morava's K-theories.

TEXTBOOKS: Haynes Miller, Vector fields on spheres etc. (online notes).

GRADING RULES: 100% home exam.

Introduction to commutative algebra
simple inter-campus course for 2nd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. B. Pavlov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Commutative algebra has many applications in other areas of mathematics. Several classes of rings are particularly important in applications: polynomial rings in algebraic geometry, integral extensions of integers and p-adic integers in algebraic number theory, formal power series rings in singularity theory. Although, it is not possible to cover applications in a one-semester course, that is why we will try to point out constructions and results useful in other areas and if it is possible we will look at the algebraic results from the point of view of affine algebraic geometry. We will begin with general algebraic concepts such as radical of rings and modules, chain conditions and exact sequences, after we will focus on the methods, concepts and results that are at the centre of the field: localization, primary decomposition, integral extension, completions and dimension theory. Concentration on general constructions, their properties and natural questions about them allows developing general methods applicable to many examples at once.

PREREQUISITES: Rings, PID, UFD, maximal and prime ideals, modules, quotient modules, isomorphism theorems for rings and modules and tensor product of modules.

SYLLABUS:

1. Maximal ideals. Prime ideals. Prime avoidance. Nilradical and Jacobson radical. Spec of a ring.
2. Direct sums and products of modules. Radical of a module. Nakayama's lemma. Exact sequences of modules. Projective and flat modules.
3. Chain conditions for modules. Modules of finite length. Noetherian rings. Hilbert basis theorem. Artinian rings. Akizuki – Hopkins theorem.
4. Localizations of rings and modules. Support of a module. Local properties.
5. Associated primes and support. Existence and uniqueness of primary decompositions. Primary decompositions of ideals.
6. Flat and faithfully flat modules and ring maps.
7. Integral extensions. Going-up and going-down properties. Applications to integral closure in a finite separable extension.
8. Affine algebras. Hilbert Nullstellensatz in various forms. Noether normalization.
9. Completions of rings and modules. Hensel's lemma.
10. Graded and filtered rings and modules. Artin – Rees lemma. Krull's intersection theorem. Hilbert polynomial. The dimension theorem. Regular local rings.
11. Discrete valuation rings and Dedekind domains.

TEXTBOOKS:

- Atiyah M.F., Macdonald I.G. Introduction to commutative algebra, 1969.
- Matsumura H. Commutative ring theory, 1986.
- Eisenbud D. Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, 2004.
- Altman, Kleiman A term of commutative algebra, 2017.

GRADING RULES: $0.1S + 0.2Q + 0.3M + 0.4F$, where S is grade for participation in tutorials, Q is quiz grade for 4 one-hour long quizzes, M is the midterm grade, F is final exam grade.

INTRODUCTION TO ERGODIC THEORY
simple inter-campus seminar for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: M. L. Blank.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Is it possible to distinguish deterministic chaotic dynamics from a purely random and whether this question makes sense? Does irreversibility influence qualitative characteristics of the process? Ergodic theory studies these and other statistical properties of dynamical systems. Interest in this subject stems from the fact that «typical» deterministic dynamical systems (eg, differential equations) exhibit chaotic behavior: their trajectories look similar to the implementation of random processes. We begin with the classical results by Poincare, Birkhoff, Khinchin, Kolmogorov, and get to modern productions (including yet unresolved) problems. This is an introductory course designed for 2 – 4 bachelors and graduate students. Prior knowledge except for the course in mathematical analysis is not required (although it is desirable).

PREREQUISITES: calculus.

SYLLABUS:

- Dynamical systems: trajectories, invariant sets, simple and strange attractors and their classification, randomness.
- The action in the space of measures, transfer operator, invariant measures. Comparison with Markov chains.
- Ergodicity, Birkhoff ergodic theorem, mixing, CLT. Sinai – Bowen – Ruelle measures and natural / observable measures.
- Basic ergodic structures: direct and skew products, Poincare and integral maps, a natural extension and the problem of irreversibility.
- Ergodic approach to number theoretical problems.
- Entropy: metric and topological approaches.
- Operator formalism. Spectral theory of dynamical systems. Banach space of measures, random perturbations.
- Multicomponent systems: synchronization and phase transitions.
- Mathematical foundations of numerical simulations.

TEXTBOOKS: A. Katok, B. Hasselblatt. «Introduction to the modern theory of dynamical systems», 1995.

GRADING RULES: 0.4 (Cumulative assessment) + 0.6 (Exam). The cumulative assessment is determined by control, delivery of sheets and work at lectures and seminars. Round up.

INTRODUCTION TO FUNCTIONAL ANALYSIS
simple inter-campus offline course for 2nd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. Yu. Pirkovskii.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Functional analysis studies infinite-dimensional vector spaces equipped with a norm (or, more generally, with a topology), operators between such spaces, and representations of algebraic structures on such spaces. The classical areas of Functional Analysis are the spectral theory of linear operators, the geometry of Banach spaces, distribution theory, operator algebra theory, etc. Among relatively new areas are noncommutative geometry à la Connes, operator space theory (a.k.a. «quantum functional analysis»), and locally compact quantum groups. Functional analysis has numerous applications in differential equations, harmonic analysis, representation theory, geometry, topology, calculus of variations, optimization, quantum physics, etc. In this introductory course, we plan to cover the very basics of Functional Analysis (the «irreducible minimum») only.

PREREQUISITES: Calculus, linear algebra, metric spaces, the Lebesgue integral. The course is accessible to 2nd year students and higher

SYLLABUS:

1. Normed and Banach spaces, bounded linear maps.
2. Hilbert spaces.
3. The Hahn – Banach Theorem, the Open Mapping Theorem, the Uniform Boundedness Principle.
4. Basic duality theory.
5. Elementary spectral theory.
6. Compact operators. The Hilbert – Schmidt Theorem.

TEXTBOOKS:

- A. Ya. Helemskii. *Lectures in Functional Analysis*. MCCME, 2004 (in Russian). English transl.: AMS, 2006.
- V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov. *Real and Functional Analysis*. RCD, 2011 (in Russian). English transl.: Springer, 2020.
- A. A. Kirillov and A. D. Gvishiani. *Theorems and problems in Functional Analysis*. Moscow, Nauka, 1979 (in Russian). English transl.: Springer, 1982.
- B. Simon. *Real Analysis. (A comprehensive course in Analysis, Part 1).* AMS, 2015.
- B. Simon. *Operator Theory. (A comprehensive course in Analysis, Part 4).* AMS, 2015.
- M. Reed, B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis.* Academic Press, 1972. Russian transl.: Mir, 1977.
- V. M. Kadets. *A course in functional analysis*. Khar'kov. Nats. Univ. im. V. N. Karazina, Kharkiv, 2006 (in Russian). English transl.: Springer, 2018.
- W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill, 1991. Russian transl.: Lan', 2005.

- J. B. Conway. *A course in Functional Analysis.* Springer, 1990.
- A. Yu. Pirkovskii. *Spectral theory and functional calculi for linear operators*. MCCME, 2010 (in Russian). https://www.mccme.ru/free-books/pirkovsky/pirkovsky-spectral.pdf.
- A. Yu. Pirkovskii. *Lecture notes in functional analysis*. Unfinished and unpublished lecture notes (HSE, 2011/2012, in Russian). http://vyshka.math.ru/1112/funcan.html.

GRADING RULES:

- The final grade is calculated by the formula

$$\text{final grade} = 0.7 \times (\text{cumulative grade}) + 0.3 \times (\text{exam grade}).$$

- The cumulative grade is calculated by the formula

$$\text{cumulative grade} = 0.5 \times (\text{midterm grade}) + 0.5 \times (\text{exercise sheets grade}).$$

- The oral exam will be at the end of December and will include only the material of the 2nd module.
- The midterm exam (also oral) will be at the end of October (or at the beginning of November) and will include only the material of the 1st module.
- To get the maximum grade for the exercise sheets, you should solve 75% of all the exercises. If you solve more, you will earn bonus points.
- You can also earn bonus points for working actively at the exercise classes and for solving «bonus exercises» (marked as «**B**» in the sheets).

Introduction to Galois theory
simple inter-campus online course for 2^{nd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: N. S. Markarian.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: Galois theory is the study of roots of polynomials and their symmetries in terms of Galois groups. As the algebraic counterpart of the fundamental group of topology, the Galois group is an essential object in algebraic geometry and number theory.

PREREQUISITES: Basic algebra: groups, rings, linear algebra over a field

SYLLABUS: Review of polynomial rings and more general principal ideal domains. Extensions of fields, algebraic and transcendental. Splitting fields of polynomials and Galois groups. The fundamental theorem of Galois theory. Computing Galois groups. Applications.

TEXTBOOKS: J. S. Milne, Fields and Galois Theory, https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ft.html

GRADING RULES: 40% midterm; 60% final. Final mark: round percent/10 to nearest integer

COMMENTS: This is a blended course based on the on-line lectures by E. Amerik.

Introduction to symplectic geometry, moment maps, localisation, and integrability
advanced inter-campus online course for 3^{rd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHERS: A. Yu. Alekseev, I. Marshall.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: We will start with the basics of symplectic geometry including the Moser Lemma and the Darboux Theorem. The focus of the course is on the situation when a compact Lie group acts on a symplectic manifold preserving the symplectic structure. Such an action can often be encoded in a function which is called a *Hamiltonian* or *moment map*. Moment maps possess extraordinary properties. The following major results will be presented in the course: the Marsden – Weinstein Theorem on symplectic reduction, the Atiyah – Guillemin – Sternberg Convexity Theorem, and the Duistermaat – Heckman Localization Theorem. We will cover various applications, to be chosen according to interests of the group.

PREREQUISITES: Calculus on manifolds including the notions of vector fields, differential forms and de Rham cohomology. We will introduce notions concerning Lie groups (such as the circle S^1 and the unitary group U_n) and their representations in the course.

SYLLABUS:

1. Symplectic structures: definitions and examples.
2. Symplectic Linear Algebra.
3. Hamiltonian vector fields. Poisson brackets. Liouville volume form.
4. Moser Lemma. Darboux Theorem.
5. Crash course on compact Lie groups: S^1 and $U(n)$. Exponential map. Maurer – Cartan forms.
6. Actions of compact groups on symplectic manifolds. Examples: coadjoint orbits and cotangent bundles of groups.
7. Crash course on principal bundles: connection and curvature.
8. Hamiltonian actions, moment maps. Marsden – Weinstein Symplectic Reduction Theorem.
9. Atiyah – Guillemin – Sternberg (AGS) Convexity Theorem.
10. Application of the AGS Theorem: toric varieties and the Delzant Theorem.
11. Duistermaat – Heckman integrals. Localization.
12. Equivariant cohomology: Cartan and Weil models.
13. Berline – Vergne – Atiyah – Bott Localisation Theorem.

Extra topics:

1. Coadjoint orbits and Gelfand – Zeitlin integrable systems.
2. Guillemin – Sternberg “Quantization commutes with Reduction” principle.
3. Examples of complete integrability: Toda lattices and Calogero – Moser systems.
4. Hyperkähler manifolds and hyperkähler reduction.

TEXTBOOKS:

1. Ana Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*.
   https://people.math.ethz.ch/$\sim$acannas/Papers/lsg.pdf
2. Eckhard Meinrenken, *Symplectic Geometry* (lecture notes, University of Toronto).
   https://www.math.toronto.edu/mein/teaching/LectureNotes/sympl.pdf

GRADING RULES: 25% for home assignments, 25% for mid-term test, 50% for final written exam.

Introduction to motives
advanced inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher

TEACHER: V. A. Vologodsky.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The idea of motives goes back to Grothendieck. He formulated it as a set of conjectures on algebraic cycles on varieties over any base field strong enough to imply, for example, Weil's conjectures on zeta-function of varieties over finite fields. Subsequently this conjectural picture has been amplified in the works of Deligne, Bloch, and Beilinson. Though most of these conjectures are still wildly open a spectacular progress has been made by Voevodsky. We will discuss some of his works.

PREREQUISITES: First 3 chapters of Hartshorne's book «Algebraic Geometry» and a bit of homological algebra (in particular, the notion of triangulated category)

SYLLABUS:

- Singular homology of abstract algebraic varieties: definition, relation to the Dold-Thom complex in topology, statement of the main results by Suslin and Voevodsky.
- Triangulated category of motives: construction
- Cancellation theorem
- Motives of curves
- Gersten resolution and its applications to algebraic cycles
- Poincare duality
- Proof of Suslin – Voevodsky theorem on algebraic singular homology
- Standard conjectures

TEXTBOOKS:

[BV] A. Beilinson, V. Vologodsky. «DG guide to Voevodsky's motives»

[MV] F. Morel, V. Voevodsky. «$\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes»,

[SV] A. Suslin, V. Voevodsky. «Singular homology of abstract algebraic varieties»

GRADING RULES: Homework 100%

INTRODUCTION TO THE THEORY OF RANDOM PROCESSES
simple inter-campus seminar for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: M. L. Blank.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The course is a continuation of the standard course in probability theory (associated mainly with combinatorics) and is intended for an initial introduction to the theory of random processes. Special attention is paid to the connection of this theory with functional analysis and the general measure theory. The course is aimed at bachelors 2–4 courses, undergraduates and graduate students.

PREREQUISITES: calculus, probability theory

SYLLABUS:

- The concept of a random process.
- Elements of random analysis.
- Correlation theory of random processes.
- Markov processes with discrete and continuous time.
- Wiener and Poisson processes.
- Stochastic integral. Ito's formula.
- (sub/super) martingales.
- Infinitesimal semigroup operator.
- Stochastic stability of dynamical systems.
- Large deviations in Markov processes and chaotic dynamics.
- Nonlinear Markov processes.

TEXTBOOKS:

- D. Stirzaker. Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.
- N. V. Krylov. Introduction to the theory of random processes. AMS. V.43, 2002.

GRADING RULES: 0.4 (cumulative assessment) + 0.6 (exam). The cumulative assessment is determined by control, delivery of sheets and work at lectures and seminars. Round up.

INTRODUCTION TO STRING TOPOLOGY
advanced inter-campus seminar for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHERS: C. Brav, A. G. Gorinov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: String topology, originally developed by Chas and Sullivan, is the study of invariants of free loop spaces of manifolds and additional algebraic structures on them, such as the BV algebra structure on homology. Via the Goodwillie-Jones theorem identifying homology of a free loop space with Hochschild homology of the category of local systems on the base space, string topology admits a non-commutative generalisation to certain differential graded categories. We shall study both the original topological form of the theory as well as its non-commutative generalisation, emphasising both concrete examples and invariant chain-level constructions.

PREREQUISITES: Basis algebraic topology

SYLLABUS:

1. Based loop spaces and looping-delooping
2. Topology of free loop spaces
3. The Chas – Sullivan loop product (and string bracket) on (equivariant) homology of the free loop space
4. Hochschild homology and the Goodwillie – Jones theorem
5. String topology of surfaces and other examples
6. String topology as a chain-level topological field theory
7. String topology for manifolds with boundary

TEXTBOOKS: R. Cohen, A. Voronov. Notes on string topology. https://arxiv.org/abs/math/0503625.

GRADING RULES: 6 for giving a lecture in the seminar, 4 for written notes of the lecture

COMMENTS: Брав и Горинов ведут семинар и направляют студентов по подготовке лекций к семинару. Это будет для нас третий раз в таком формате.

An introduction to surgery theory and its applications to complex and topological manifolds

advanced inter-campus offline seminar for 3rd year students and higher

(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHERS: S. A. Abramyan, A. G. Gorinov, V. S. Zhgoon.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Suppose we have a smooth function and a Riemannian metric on a smooth compact manifold without boundary. If the function and the metric are general enough, then we can use them to decompose the manifold into simple pieces (handles). The starting point of surgery theory is the observation that for a general deformation of the function and the metric, the handle decomposition changes in a controllable way. This fact has many applications in geometry and topology, and the purpose of this seminar is to cover some of these.

In more detail, we will start by reviewing Morse theory and giving a few immediate applications, such as the Morse inequalities and the h-cobordism theorem. Then we will look at the problem of classifying smooth manifolds in a given homotopy type, and related machinery. After that we will study applications to complex analytic and Kähler manifolds. Finally, we will see how the ideas that we saw in the smooth case can be modified to classify topological and PL-manifolds in a given homotopy type, and also to obtain partial information on the topological and PL-bordism rings.

PREREQUISITES: The main prerequisites are smooth manifolds and singular cohomology as covered, e.g., in Algebraic Topology by A. Hatcher, chapters 2 and 3. An introductory course on topological vector spaces would be very helpful. We will recall some or all of the prerequisites if necessary.

SYLLABUS:

1. A review of Morse theory; handles and Morse complexes. Heegaard decompositions of 3-manifolds.
2. The h-cobordism theorem; the Whitney trick.
3. A review of the Poincaré duality. Poincaré duality spaces. The Spanier – Whitehead and Atiyah dualities and the Spivak normal bundle.
4. Normal maps and normal bordisms.
5. Classification of smooth manifolds in a given homotopy type.
6. A review of the smooth cobordism theory; the Pontrjagin – Thom construction and the homotopy groups of Thom spectra.
7. Representing homology classes by manifolds.
8. Complex hypersurfaces and the Milnor fibration. The Milnor and Tjurina numbers.
9. A review of Hodge theory. Variations of Hodge structures. The Gauss – Manin connection.
10. Lefschetz pencils and vanishing cycles. Applications of Morse theory to topology of complex manifolds.
11. The Lefschetz decomposition for Kähler manifolds. Primitive classes and vanishing cycles.
12. Reduction of the structure group of a fibre bundle. Classification of PL-manifolds in a given homotopy type and a sketch of the topological analogue.
13. PL- and topological bordism rings (if time allows).

TEXTBOOKS: Browder, Surgery on simply connected manifolds; Madsen, Milgram, The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds; Milnor, Singular points of complex hypersurfaces

GRADING RULES: 100% talk + notes

Markov Chains
simple inter-campus offline course for 3^{rd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHERS: A. Dymov, A. S. Skripchenko.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The simplest random process is a sequence of independent events (experiments). The scope of such processes is limited, since in practice very often the events are not independent. Markov chains are the simplest random processes formed by sequences of dependent events: given an event, it is assumed that the next event depends only on the given one, but does not depend on the previous events. In other words, «the future depends only on the present, but does not depend on the past». Markov chains have deep and beautiful but rather simple mathematics. Due to their amazing efficiency in applications to problems from various fields — mathematics, physics, computer science, biology, economics, etc. — they are known as probably the most important class of random processes. The present course is an introduction to the theory of Markov chains. We will discuss their most important properties and some of their applications

PREREQUISITES: Standard courses of linear algebra and analysis of the first year of education. A standard course of the probability theory is recommended but not required: all essential knowledge from the probability theory will be communicated.

SYLLABUS:

1. Markov chains with finite number of states.
2. Examples.
3. Stationary states and their existence. Bogoliubov-Krylov method.
4. Ergodic theorem for Markov chains with ergodic transition probability matrix.
5. Applications of the ergodic theorem. The law of large numbers for Markov chains. The Google's Page Rank. Metropolis – Hastings algorithm.
6. Perron – Frobenius theorem.
7. Topological structure of Markov Chains with finite number of states.
8. Periodic Markov chains.
9. Aperiodic Markov chains. Ergodic theorem for irreducible aperiodic Markov chains.

TEXTBOOKS:

[Sh] A.N. Shiryaev, «Probability».

[KS] L.B. Koralov, Ya.G. Sinai, «Theory of probability and random processes»

GRADING RULES: $(C + E)/2$, where C denotes the current grade and E denotes the exam

COMMENTS: на англ. (если будут те, кто не говорит на русском).

MATHEMATICAL METHODS OF SCIENCE
simple inter-campus online seminar for 3rd year students and higher

TEACHER: A. S. Tikhomirov.

LEARNING LOAD: Fall term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 5 credits.

DESCRIPTION: The notion of vector, respectively, principal bundle over a smooth manifold is one of the central notions in modern mathematics and its applications to mathematical and theoretical physics. In part icular, all known types of physical interations (gravitational, electromagnetic, etc.) are described in terms of connections and other geometric structures on vector/principal bundles on underlying manifolds. The properties of physical fields can be formulated in terms of geometric invariants of connections such as curvature and characteristic classes of corresponding vector/principal bundles. In this course we give an introduction to the differential geometry of vector and principal bundles and consider their metrics, connections, curvature and characteristic classes. Some applications to algebraic geometry, topology, and gauge theory of classical fields (in particular, Maxwell equations, Yang–Mills theory) are discussed.

PREREQUISITES: the standard courses in algebra, calculus, geometry, and topology for the first year of undergraduate study.

SYLLABUS:

- **Manifolds.** Manifolds and smooth maps. Tangent vectors. Vector fields. Differential forms. Exterior differentiation on a manifold. Exterior differentiation on $\mathbb{R}^3$. Pullback of differential forms.
- **Riemannian Manifolds.** Inner products on a vector space. Riemannian metric. Existence of a Riemannian metric. Regular curves. Arc length parametrization. Signed curvature of a plane curve. Orientation and curvature.
- **Affine Connections.** Affine connections. Torsion and curvature. The Riemannian connection.
- **Vector Bundles.** Definition of a vector bundle. The vector space of sections. Extending a local section to a global section. Local operators. Restriction of a local operator to an open subset. Frames. F-linearity and bundle maps. Multilinear maps over smooth functions.
- **Connections on a Vector Bundle.** Connections on a vector bundle. Existence of a connection on a vector bundle. Curvature of a connection on a vector bundle. Riemannian bundles. Metric connections. Restricting a connection to an open subset. Connections at a point.
- **Connection, curvature, and torsion forms.** Connection and curvature forms. Connections on a framed open set. Metric connection relative to an orthonormal frame. Connections on the tangent bundle. Covariant differentiation along a curve. Connection-preserving diffeomorphisms. Christoffel symbols.
- **Geodesics.** The definition of a geodesic. Reparametrization of a geodesic. Existence of geodesics. Geodesics in the Poincaré half-plane. Parallel translation. Existence of parallel translation along a curve. Parallel translation on a Riemannian manifold.
- **Exponential maps.** The exponential map of a connection. The differential of the exponential map. Normal coordinates. Left-invariant vector fields on a Lie group. Exponential map for a Lie group. Naturality of the exponential map for a Lie group. Adjoint representation. The exponential map as a natural transformation.
- **Distance and volume.** Distance in a Riemannian manifold. Geodesic completeness. Dual 1-forms under a change of frame. The volume form in local coordinates.
- **Operations on vector bundles.** Vector subbundles. Subbundle criterion. Quotient bundles. The pullback bundle. Examples of the pullback bundle. The direct sum of vector bundles. Other operations on vector bundle.

- **Vector-valued forms.** Vector-valued forms as sections of a vector bundle. Products of vector-valued forms. Directional derivative of a vector-valued function. Exterior derivative of a vector-valued form. Differential forms with values in a Lie algebra. Pullback of vector-valued forms. Forms with values in a vector bundle. Tensor fields on a manifold. The tensor criterion.

- **Connections and curvature again.** Connection and curvature matrices under a change of frame. Bianchi identities. The first Bianchi identity in vector form. Symmetry properties of the curvature tensor. Covariant derivative of tensor fields. The second Bianchi identity in vector form. Ricci curvature. Scalar curvature. Defining a connection using connection matrices. Induced connection on a pullback bundle.

- **Characteristic classes.** Invariant polynomials on $\mathfrak{gl}_r(\mathbb{R})$. The Chern–Weil homomorphism. Characteristic forms are closed. Differential forms depending on a real parameter. Independence of characteristic classes of a connection. Functorial definition of a characteristic class.

- **Pontrjagin classes. The Euler class and Chern classes.** Vanishing of characteristic classes. Pontrjagin classes. The Whitney product formula. Orientation on a vector bundle. Characteristic classes of an oriented vector bundle. The Pfaffian of a skew-symmetric matrix. The Euler class. Generalized Gauss–Bonnet theorem. Hermitian metrics. Connections and curvature on a complex vector bundle. Chern classes.

- **Some applications of characteristic classes.** The generalized Gauss–Bonnet theorem. Characteristic numbers. The cobordism problem. The embedding problem. The Hirzebruch signature formula. The Riemann–Roch.

- **Principal bundles.** Principal bundles. The frame bundle of a vector bundle. Fundamental vector fields of a right action. Integral curves of a fundamental vector field. Vertical subbundle of the tangent bundle TP. Horizontal distributions on a principal bundle.

- **Connections on a principal bundle.** Connections on a principal bundle. Vertical and horizontal components of a tangent vector. The horizontal distribution of an Ehresmann connection. Horizontal lift of a vector field to a principal bundle. Lie bracket of a fundamental vector field. Horizontal distributions on a frame bundle. Parallel translation in a vector bundle. Horizontal vectors on a frame bundle. Horizontal lift of a vector field to a frame bundle. Pullback of a connection on a frame bundle under a section.

- **Curvature on a principal bundle.** Curvature form on a principal bundle. Properties of the curvature form. The associated bundle. The fiber of the associated bundle. Tensorial forms on a principal bundle. Covariant derivative. A formula for the covariant derivative of a tensorial form.

- **Characteristic classes of principal bundles.** Invariant polynomials on a Lie algebra. The Chern–Weil homomorphism.

- **Applications to gauge theory of classical fields.** The Yang–Mills functional. Maxwell equations, rank two Euclidean Yang–Mills theory: instantons.

TEXTBOOKS:

- L. Tu. Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes. Springer, 2017.

- K. Nomizu. Lie Groups and differential geometry. 1956.

- R. Palais. The geometrization of physics. 1981.

- T. Aubin. Nonlinear analysis on manifolds, Monge-Ampere equations. Springer, 1982.

Additional textbooks:

- C. H. Taubes. Differential geometry: bundles, connections, metrics and curvature. Oxford, 2011.
- P. Petersen. Riemannian geometry. Springer, 2006.
- J. Milnor, J. Stasheff. Characteristic classes. Princeton, 1974.
- C. Nash, S. Sen. Topology and geometry for physicists. Academic Press, 1987.

GRADING RULES: total grade = 0,3(grade for homework) + 0,2(grade for midterm exam) + 0,5(grade for final written exam.

COMMENTS: This course is required for graduate students in profile «Mathematics» and is called «Mathematical Methods of Science» in the official «РУП» of MSc program. Other students, including the undergraduate, may take this course as a special course contributing 5 credits.

Poisson Lie Groups
simple inter-campus seminar for 3rd year students and higher

TEACHER: I. Marshall.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., one class per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The first significant motivation for Poisson Lie Groups comes from the dressing transformation: this standard technique from particle physics was applied (in the mid '70s) by Zakharov and Shabat in inverse scattering theory for generating soliton solutions to nonlinear systems.

With the emergence of an understanding that solitons and inverse scattering may naturally be interpreted as infinite-dimensional versions of integrable systems of classical mechanics, a natural question arose of how to cast the Zakharov – Shabat dressing as a symmetry of an appropriate Hamiltonian system. This conundrum was resolved (in the early '80s) by Semenov – Tian-Shansky, with the essential observation that — as well as the system on which it acts — the group involved in the symmetry transformation might itself carry a Poisson bracket.

The notion of Poisson Lie Group was already not a new one. It had been observed by Drinfeld as being implicit in the classical Yang-Baxter equation, and as representing a classical version of Quantum Group; first proposed as far as back as in work of Wigner.

This idea of implementing Poisson Lie Groups as a useful tool in Classical Mechanics opened up a whole new area of mathematics.

In the proposed course we hope to uncover the simplest and most accessible parts of this theory. We shall study especially how it can be used in the context of Hamiltonian reduction to describe integrable Hamiltonian systems.

PREREQUISITES: This course will be aimed at students in the 3rd year and higher, though it will be probably be adapted according to whomever comes along. It will be useful for students to be familiar with standard notions from HSE courses on smooth manifolds and Hamiltonian systems. Students will be expected to do lots of explicit calculations with matrices, and so at a certain level they should be able to manage with a minimum amount of sophisticated mathematical background. If necessary, supplementary classes will be held for parts of the group, to cover gaps in their knowledge.

SYLLABUS:

TEXTBOOKS: A.G.Reyman, M.A.Semenov – Tian-Shansky. «Integrable Systems».

GRADING RULES: The various scores, all estimated out of 10 points, are «CumSc» for cumulative, «Exm» for exam, «FinSc» for final score. The written exam will be optional, but only available to students who obtain «CumSc»$\geqslant$ 8. If the exam is not presented the final score will be «FinSc» = min(8, «CumSc»). If the final exam is presented the final score will be «FinSc» = «Exm».

REPRESENTATIONS AND PROBABILITIES
advanced inter-campus seminar for 3rd year students and higher

TEACHERS: A. Dymov, A. V. Klimenko, M. Mariani, G. I. Olshanski.

LEARNING LOAD: two terms of 2021/22 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

DESCRIPTION: The seminar is mostly aimed to 3–4th year bachelor students, as well as master and PhD students. Senior participants are expected to deliver a talk on the seminar. The seminar topics are the mix of modern results in areas related to representations and probability theory, and older areas, which are prerequisites to the former, as well as keep their own value.

PREREQUISITES: Standard courses of calculus (including measure theory), algebra (representations theory), and probability. Basic courses on functional analysis and random processes will be helpful but by no means required. Semesters of the seminar can be taken independently. We plan to hold seminar meetings at the Steklov Mathematical Institute in the fall semester and at HSE Math Dept. in the spring semester.

SYLLABUS: Tentative topics for fall semester:

- Elements of stochastic processes theory. (Basic notions: independence of differences, covariance function, trajectory-wise behavior of a process. Important examples: Poisson and Wiener processes.)
- Matrix-valued processes: eigenvalues and Dyson Brownian Motion.
- Stochastic perturbation of dynamical systems (Markov chains with continuous state space, stochastic perturbation of dissipative dynamical systems, mixing property, ergodic theorems).
- Limit theorems in dynamical systems theory.

Tentative topics for spring semester:

- Classical representations theory.
- Representations of infinite-dimensional groups
- Their connections with algebraic combinatorics (symmetric functions), classical analysis (orthogonal polynomials) and probability theory (point processes and Markov dynamics).

TEXTBOOKS:

[1] I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, Introduction to the theory of random processes, Dover (1996) (Translation of the Russian book: И.И. Гихман, А.В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов. М.: 1977.)

[2] S. Kuksin, A. Shirikyan, Mathematics of two-dimensional turbulence, Cambrige University Press (2012)

[3] A. Gaudilliere, Condenser physics applied to Markov chains — A brief introduction to potential theory, arXiv:0901.3053

[4] A. Borodin and G. Olshanski, Representations of the infinite symmetric group. Cambridge University Press (2017).

GRADING RULES: Participants can either make a talk during the semester (this is usually graded with a mark 8–10) or solve the problems of the final exam. The problems list is given to the students approximately a week before the exam, and on the exam a student discusses the solutions that he/she obtained. Formula for calculating the final grade for the exam is provided along with the problems list.

Smooth representations of totally disconnected groups
advanced inter-campus offline project for 3rd year students and higher

TEACHER: M. Z. Rovinsky.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: The goal of the seminar is to discuss some basic notions, some results of smooth linear representation theory of totally disconnected groups, and their relations to other domains. Another topic is the semilinear representation theory. Basic result here is the Hilbert's Theorem 90: if a Galois group Γ acts smoothly and faithfully on a field K, then the category of smooth K-semilinear representations of an extension of a totally disconnected group G by Γ is equivalent to the category of smooth K^{Γ}-linear representations of G. (In particular, all smooth K-semilinear representations of Γ are trivial, while for a non-precompact group G the situation is far more complex.)

PREREQUISITES: Galois theory and standard courses of the 1st year bachelor program: algebra, calculus, topology.

SYLLABUS:

- Permutation groups, their totally disconnected topology and smooth actions, examples (Galois groups, algebraic groups over local fields, etc.).
- Smooth representations (of not necessarily locally profinite groups), Hecke algebras, sheaves.
- Smooth representations of infinite symmetric groups and matrix groups over finite fields.
- Smooth representations of p-adic reductive groups, and local Langlands correspondence, Bushnell – Kutzko theory of types.
- Smooth representations of automorphism groups of universal domains, sheaves in the dominant topology, and pure motives.
- Semilinear representations.
- Semilinear representations of infinite symmetric groups.
- Admissible semilinear representations of automorphism groups of universal domains.

TEXTBOOKS:

- Representations of p-adic groups. Lectures by Joseph Bernstein, Harvard University, Fall 1992. Written by Karl E. Rumelhart.
- W. Casselman, Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups, Draft: 1 May 1995. http://www.math.ubc.ca/~cass/research/pdf/p-adic-book.pdf
- Colin J. Bushnell, Philip C. Kutzko, The Admissible Dual of GL(N) via Compact Open Subgroups, (AM-129) Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press 1993, https://www.jstor.org/stable/j.ctt1b9s03n
- Rohit Nagpal, Andrew Snowden, The Semi-linear Represesentation Theory of the Infinite Symmetric Group, arXiv.org/abs/1909.08753
- Alexander Stasinski, The smooth representations of GL2(O), Communications in algebra,(2009) 37 (12), 4416–4430, arXiv.org/abs/0807.4684

GRADING RULES: min[10, 20/3((ratio of solved problem of the problem sets) + (ratio of solved problem of the final exam)) + 4×(# talks)]. A half-integer grade is rounded to the bigger nearest integer, another fractional grade is rounded to the nearest integer.

Stochastic analysis and its applications in economics
advanced inter-campus seminar for 3^{rd} year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: A. V. Kolesnikov, V. D. Konakov.

LEARNING LOAD: two terms of 2021/22 A. Y., one class per week, 3 credits per term.

DESCRIPTION: This seminar will cover a wide range of problems related to stochastics. The aim of this seminar is to present new developments in this field and to give students an opportunity to learn some modern concepts of stochastic analysis. Special attention will be paid to applications of stochastic models in economics and finance. The talks will be given by the members of the laboratory of stochastic analysis and its applications (lsa.hse.ru), the guests of the laboratory, the stuff of the faculty of mathematics, as well as by students and postdocs.

PREREQUISITES: Some knowledge in the mathematical analysis, probability theory, stochastic processes is expected.

SYLLABUS:

TEXTBOOKS:

1. Elliot R.J., Kopp P.E., Mathematics of financial markets, 2004.
2. Оксендаль Б., Стохастические дифференциальные уравнения. М.: «Мир», 2003
3. Wilmott P., Paul Wilmott On Quantitative Finance. J. Wiley&sons, 2006.
4. Bouchaud J.-P., Potters M., Theory of financial risk. CUP, 2000.
5. Bougerol F., Modeles stochastique et application a la finance.
   http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/bougerol/M1_15_16.pdf

GRADING RULES: Students should make a presentation on the seminar, and will get a mark for it

STOCHASTIC CALCULUS FOR FINANCE
simple inter-campus online course for 3rd year students and higher

TEACHER: C. Bernardin.

LEARNING LOAD: module 4 of 2021/22 A. Y., two classes per week, 3 credits.

DESCRIPTION: The purpose of this course is to present selected topics of the theory of Markov Decision Processes and show how they can bae applied in particular to problem in finance and insurance. In a Markov Decision Process, given the current state of the system (for example the wealth of an investor) the decision maker has to choose an admissible action (for example a possible investment). Once an action is chosen there is a random system transition according to a Markovian law (for example a change in the asset value) which leads to a new state. Assuming that each time an action is taken, the controller obtains a certain reward, the aim is then to control the system in such a way that the expected total discounted rewards are maximized.

PREREQUISITES: Probability measure theory, Conditional expectation, Basic knowledge in discrete time Markov Chains.

SYLLABUS:

1. Theory of Finite Horizon Markov Decision Processes
2. Financial Markets
3. Financial Optimization Problems

TEXTBOOKS:

GRADING RULES: 2 writing exams (Each one counting 50% for the final mark)

Symplectic Geometry
advanced seminar for 3rd year students and higher
(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: M. S. Verbitsky.

LEARNING LOAD: module 1 of 2021/22 A. Y., 4 classes per week, 5 credits.

DESCRIPTION: Symplectic geometry is a rapidly growing field of mathematics, studying finite-dimensional and infinite-dimensional objects. Through Fukaya's theory, symplectic geometry has many applications to the string physics and algebraic geometry. I would discuss basic foundations of symplectic geometry, starting from Darboux, Moser and Weinstein theorems, symplectic reduction and moment maps, and proceed to the work of Gromov on symplectic capacities, non-squeezing and psedoholomorphic curves. If time permits, I would give a proof of Gromov's compactness theorem and non-degeneracy of Hofer's metric on the group of Hamiltonian symplectomorphisms.

PREREQUISITES: Students will need solid understanding of calculus on manifolds (de Rham cohomology, Cartan formula, diffeomorphism flows associated with vector fields), basic Lie group theory (how the Lie groups are related to the Lie algebras) and basic algebraic topology (ability to calculate and use de Rham cohomology, de Rham cohomology with compact support, Poincare duality).

SYLLABUS: 1. Symplectic structures. Almost complex structures. Obstructions to existence of symplectic structures.

2. Moser lemma, Darboux and Weistein theorem. Normal neighbourhood theorems.

3. J-holomorphic curves. Gromov's compactness theorem (without proof).

4. Hamiltonians, moment maps, symplectic quotients, toric manifolds. Symplectic cut and the blow-up.

5. Gromov capacity and Gromov non-squeezing theorem. Symplectic packing. Polterovich-McDuff theorem.

TEXTBOOKS:

- Dusa McDuff, Dietmar Salamon, Introduction to symplectic topology
- Dusa McDuff, Lectures on Symplectic Topology; a gentle introduction to J-holomorphic curves, written in 1994 and published in the IAS/Park City proceedings, see www.math.sunysb.edu/~dusa/utahnotaug28.pdf.
  Русский перевод: Элиашберг Я., Трейнор Л. (под редакцией), Лекции по симплектической геометрии и топологии, МЦНМО, 2008

GRADING RULES: Handouts score is given by the formula $t = 10 + 5a + 8b$, where a is the number of non-completed handouts with at least $1/2$ of exercises credited, and b the number of completed handouts.

COMMENTS: The lectures will be given ***in Russian***. The lecture slides and other printed matter will be in English. The classes start in September, 4 and finish in November, 3. The website of this course: http://bogomolov-lab.ru/KURSY/Symplectic-2021/.

Topological data analysis. Persistent homology

simple inter-campus offline seminar for 3^{rd} year students and higher

(у этого курса имеется описание на русском)

TEACHER: V. G. Gorbounov.

LEARNING LOAD: Spring term of 2021/22 A. Y., two classes per week, 6 credits.

DESCRIPTION: Topological Data Analysis (TDA) is a field that lies at the intersection of data analysis, algebraic topology, computational geometry, computer science, statistics, and other related areas. The main goal of TDA is to use ideas and results from geometry and topology to develop tools for studying qualitative features of data. To achieve this goal, one needs precise definitions of qualitative features, tools to compute them in practice, and some guaranteeabout the robustness of those features. One way to address all three points is a method in TDA called persistent homology (PH). This method is appealing for applications because it is based on algebraic topology, which gives a well-understood theoretical framework to study qualitative features of data with complex structure, is computable via linear algebra, and is robust with respect to small perturbations in input data.

PREREQUISITES: Courses in algebra, topology and topology of smooth manifolds

SYLLABUS:

TEXTBOOKS:

GRADING RULES: There are will be 3 tests and a final exam. They contribute to the course Mark 50% and 50% respectively.