

Семинар 1

Пусть V – векторное пространство над полем K характеристики 0 (для спокойствия) с базисом q_1, q_2, \dots, q_n , V^* – двойственное пространство линейных функционалов на пространстве V с двойственным базисом p_1, p_2, \dots, p_n .

1. Найти значение тензора $p_1 \otimes p_2 - p_2 \otimes p_1$ на паре векторов $(q_1 + q_2, q_1 + 5q_2)$.
2. Найти координаты тензора $(q_1 + q_2) \otimes (q_3 - q_4) - (q_1 - 2q_2) \otimes (q_3 - 3q_4)$ в стандартном базисе.
3. Пусть $n = 4$. Рассмотрим тензор $T = p_1 \otimes q_2 + p_2 \otimes q_3 + p_3 \otimes q_4$. Найти все такие $l \in V^*$, что $T(v, l) = 0$ для любого $v \in V$.
4. Найти жорданову форму матрицы оператора $A \otimes A$ на пространстве $V \otimes V$, если жорданова форма оператора A на V – это жорданова 2×2 клетка.
5. Найти размерность векторного пространства полилинейных отображений из декартова произведения векторных пространств $V_1 \times V_2 \dots \times V_r$ в векторное пространство W .
6. Доказать следующие свойства операторов Sym и Alt в пространстве полилинейных форм степени r : $\text{Sym}(\text{Sym}) = \text{Sym}$, $\text{Alt}(\text{Alt}) = \text{Alt}$, $\text{Sym}(\text{Alt}) = \text{Alt}(\text{Sym}) = 0$.
7. Найти ранг оператора $(E - \text{Sym})(E - \text{Alt})$ в пространстве полилинейных кубических форм.