Семинар 2

Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_N$ – базис векторного пространства V, $p_1, p_2, \ldots, p_N$ – двойственный базис в двойственном пространстве V^*.

1. Доказать, что полилинейные формы $(p_{i_1} \ldots p_{i_r})$, где каждый индекс i_k независимо пробегает все значения от 1 доN, образуют базис в пространстве r-форм на пространстве V.

2. Найти значение косой 3-формы $\mathrm{Alt}(p_2 p_3 p_4)$ на тройке $(q_1 - q_2 + q_3 + q_4, q_1 + q_2 - q_3 + q_4, q_1 + q_2 + q_3 - q_4)$.

3. Доказать, что косая форма обладает следующими свойствами:

а) если поменять местами два аргумента, то форма изменит знак;

б) если у косой формы два аргумента пропорциональны, то форма принимает значение 0;

в) если аргументы косой формы линейно зависимы, то форма принимает значение 0;

г) если степень косой формы больше размерности пространства, то форма тождественно равна 0.

4. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_r$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ – подмножество множества $1, 2, \ldots, N$. Доказать, что косые формы $\mathrm{Alt}(p_{i_1} \ldots p_{i_r})$ линейно независимы и образуют базис пространства $A_r(V)$ косых r-форм на пространстве V. Как следствие $\dim A_r(V) = \binom{N}{r}$.

5. Рассмотрим упорядоченный набор $l_1, l_2, \ldots, l_r$ линейных функционалов на пространстве V. Доказать, что

$\mathrm{Alt}(l_1, l_2, \ldots, l_r)(v_1, v_2, \ldots, v_r) = 1/r! \det(S_{i,j})$, где $S_{i,j} = l_i(v_j)$.

6. Какие из следующих функций являются 2-формами на соответствующих векторных пространствах? Какие из них являются косыми или симметричными?

а) $\mathrm{Tr}(AB)$, $A, B \in M_n(F)$;

б) $\mathrm{Tr}(AB - BA)$;

в) AB;

г) $\mathrm{Re}(uv)$, $u, v \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ – вещественное векторное пространство;

д) $\mathrm{Re}(u\bar{v})$;

е) $|uv|$.

7. Пусть G – матрица Грама билинейной формы $\phi(u, v)$ в некотором базисе трехмерного вещественного пространства. Можно ли в этом пространстве указать базис, в котором матрица Грама этой формы равна $-G$?

8. Пусть матрица G в предыдущей задаче – это жорданова клетка с 1 на главной диагонали. Рассмотрим линейный оператор A в пространстве V, который в том же базисе задается матрицей $(G - E)^2$. Доказать, что функция $\phi(u, Av)$ снова является билинейной формой и найти ее матрицу Грама.