Семинар 3

1. Косая билинейная форма $\omega(X,Y)$ в базисе $q_1,\dots,q_4$ векторного пространства V имеет вид $(x_1y_2 - x_2y_1)+(x_3y_4-x_4y_3)$. Рассмотрим эту форму как элемент алгебры Грассмана $\wedge V^*$. Опишите доступными вам средствами аннулятор этого элемента в алгебре Грассмана. Верно ли, что аннулятор – это

а) линейное подпространство (если " да", то чему равна его размерность?);

б) идеал (если "да", то является ли он главным?);

в) подалгебра.

2. Докажите, что квадрат косой формы ω из предыдущей задачи отличен от нуля и опишите все формы из $\wedge^2 V^*$, квадрат которых в алгебре Грассмана равен нулю.

3. Пусть $p_1,\dots,p_{2n}$ – базис пространства V^*. Вычислить n-тую степень элемента $p_1\wedge p_2 + p_3\wedge p_4 + \dots + p_{2n-1}\wedge p_{2n}$.

4. В алгебре Грассмана трехмерного пространства V с базисом q_1,q_2,q_3 решите линейное уравнение $q_1\wedge X + q_1\wedge Y + q_1\wedge Z = 0$. Чему равна размерность пространства решений?

5. Линейный оператор $A\colon V\to V$ естественно действует на каждом из пространств $\wedge^r V^*$. Пусть оператор A в базисе q_1,q_2,q_3 пространства V записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

В какую форму переводит этот оператор 2-форму $p_1\wedge p_3 + 2p_3\wedge p_2$? ($p_1,p_2,p_3$ –двойственный базис в V^*).

6. Рассмотрим естественное продолжение линейного оператора $A\colon V\to V$ на r-тую внешнюю степень пространства V. Назовем его $\wedge^r A$. Предположим, что пространство V трехмерно, а $A^2 = E$. Найти определитель и след оператора $\wedge^2 A$.

7. Найти определитель и след оператора $\wedge^2 A$, если характеристический многочлен оператора A равен $t^4 - 5t^3 - 4t^2 + 3t - 10$.