

Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

01 февраля 2022 г.

Предлагаемый курс лекций посвящен инвариантам различных комбинаторно-топологических объектов малой размерности — графов и оснащенных графов, узлов и зацеплений в 3-мерной сфере, вложенных графов и дельта-матроидов. Инвариант — это функция, принимающая одинаковые значения на изоморфных объектах. Основной акцент в курсе будет сделан на задаче переноса инвариантов с объектов одного вида на объекты другого вида. Эта задача активно обсуждается в исследовательской литературе последнего времени, и лектор планирует познакомить слушателей с самыми свежими результатами.

Курс рассчитан на студентов бакалавриата и магистратуры. Он не требует предварительных знаний.

В курсе планируется предлагать участникам большое количество задач; некоторые из предлагаемых задач являются нерешенными.

- 1 Графы и их инварианты
 - 1.1 Виды графов
 - 1.2 Примеры инвариантов графов
 - 1.3 Соотношения удаления-стягивания
- 2 Вложенные графы
 - 2.1 Двумерные поверхности
 - 2.2 Ориентируемость
 - 2.3 Графы на поверхностях
- 3 Узлы и их инварианты
 - 3.1 Плоская диаграмма узла
 - 3.2 Движения Райдемайстера и инварианты узлов
 - 3.3 Особые узлы, инварианты конечного типа
- 4 4-членные соотношения
 - 4.1 Хордовые диаграммы и 4-членные соотношения
 - 4.2 Графы пересечений
 - 4.3 4-членные соотношения для графов
- 5 Алгебра Хопфа графов
 - 5.1 Примитивные элементы и структура алгебры Хопфа
 - 5.2 Инварианты графов и структура алгебра Хопфа
 - 5.3 Алгебра Хопфа и интегрируемость
- 6 Весовые системы, отвечающие алгебрам Ли
 - 6.1 Универсальная весовая система, строящаяся по алгебре Ли
 - 6.2 sl_2 -весовая система
 - 6.3 gl_N -весовая система
- 7 Вложенные графы и дельта-матроиды
 - 7.1 Алгебры Хопфа дельта-матроидов
 - 7.2 Продолжение инвариантов графов на вложенные графы и дельта-матроиды
 - 7.3 4-членные соотношения для вложенных графов и дельта-матроидов

Список литературы

- [1] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology, 1995, **34**, 423–

- [2] D. Bar-Natan and S. Garoufalidis, *On the Melvin–Morton–Rozansky conjecture*, *Inventiones mathematicae*, 1996, **125**, 103–133
- [3] D. Bar-Natan and H. T. Vo, *Proof of a conjecture of Kulakova et al. related to the $sl(2)$ weight system*, *Eur. J. Comb.*, 2015, **45**, 65–70
- [4] A. Bouchet, *Circle Graph Obstructions*, *J. Comb. Theory, Ser. B*, 1994, **60**, 107–144
- [5] A. Bouchet and A. Duchamp, *Representability of delta-matroids over $GF(2)$* , *Linear Algebra and its Applications*, 1991, **146**, 67–78
- [6] A. Bouchet, *Maps and Delta-matroids*, *Discret. Math.*, 1989, **78**, 59–71
- [7] S. Chmutov, S. Duzhin, and S. Lando, *Vassiliev knot invariants. III: Forest algebra and weighted graphs*, *Singularities and bifurcations, Adv. Soviet Math.* 21 135–145, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994
- [8] S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy, *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, Cambridge University Press, 2012
- [9] S. Chmutov and S. Lando, *Mutant knots and intersection graphs*, *Algebraic & Geometric Topology*, 2007, **7**, 1579–1598
- [10] S. Chmutov, *Generalized duality for graphs on surfaces and the signed Bollobás–Riordan polynomial*, *J. of Combin. Theory Ser. B* **99** (2009) 617–638
- [11] S. Chmutov, M. Kazarian, and S. Lando *Polynomial graph invariants and the KP hierarchy*, *Selecta Math. New Series* (2020) 26:34
- [12] C. Chun, I.Moffatt, S. D. Noble, and R. Rueckriemen, *Matroids, delta-matroids and embedded graphs*, *J. Comb. Theory, Ser. A*, 2019, **167**, 7–59
- [13] C. Chun, I.Moffatt, S. D. Noble, and R. Rueckriemen, *On the interplay between embedded graphs and delta-matroids*, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2018
- [14] A. Dunaykin and V. Zhukov, *Transition polynomial as a weight system for binary delta-matroids*, arXiv: 1907.03831, 2019
- [15] S.A.Joni and G.C.Rota, *Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics*, *Studies in Applied Mathematics* 61 (1979), 9–139
- [16] N. Kodaneva, *The interlace polynomial of binary delta-matroids and link invariants*, arXiv:2002.12440v1 (2020)
- [17] E. Krasilnikov, *An Extension of the sl_2 Weight System to Graphs with $n \leq 8$ Vertices*, *Arnold Mathematical Journal*, Vol. 7, No. 4, 609–618 (2021)

- [18] E. Kulakova, S. Lando, T. Mukhutdinova, and G. Rybnikov, *On a weight system conjecturally related to sl_2* , Eur. J. Comb., 2014, **41**, 266–277
- [19] S. Lando, *J-invariants of plane curves and framed chord diagrams*, Functional Analysis and Its Applications, 2006, **40**, 1–10
- [20] S. Lando, *On primitive elements in the bialgebra of chord diagrams*, Translations of the American Mathematical Society-Series 2, **180**, 167–174, 1997, Providence [etc.] American Mathematical Society, 1949-
- [21] S. Lando, *On a Hopf Algebra in Graph Theory*, J. Comb. Theory, Ser., 2000, **80**, 104–121
- [22] S. Lando and A. Zvonkin, *Graphs on Surfaces and Their Applications*, 2003
- [23] S. Lando and V. Zhukov, *Delta-matroids and Vassiliev invariants*, Moscow Mathematical Journal, 17(4) (2017) 741–755.
- [24] I. Moffatt and E. Mphako-Banda, *Handle slides for delta-matroids*, Eur. J. Comb., 2017, **59**, 23–33
- [25] M. Nenasheva, V. Zhukov, *An extension of Stanley’s chromatic symmetric function to binary delta-matroids*, Discete Math., 2021
- [26] W. R. Schmitt *Incidence Hopf algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra, 1994, **96**, 299–330.
- [27] E. Soboleva *Vassiliev knot invariants coming from Lie algebras and 4-invariants*, J. Knot Theory and its Ramifications, 2001, **10**, 161–169.
- [28] Dror Bar-Natan. On the Vassiliev knot invariants. *Topology*, 34(2):423–472, 1995. (an updated version available at
- [29] Dror Bar-Natan. Weights of Feynman diagrams and the Vassiliev knot invariants. preprint, February 1991. (an updated version available at
- [30] S. Chmutov, S. Lando Mutant knots and intersection graphs *Algebr. Geom. Topol.* 2007, 7, 3, 1579–1598
- [31] Chmutov S., Kazaryan M., Lando S. Polynomial graph invariants and the KP hierarchy *Selecta Mathematica, New Series.* 2020. Vol. 26. No. 3. P. 1–22
- [32] S. Chmutov, A. Varchenko Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from \mathfrak{sl}_2 *Topology* 1997, 36, 1, 153–178
- [33] S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev Knot Invariants.* Cambridge University Press, May 2012.
- [34] Figueroa-O’Farrill, T. Kimura, A. Vaintrob The Universal Vassiliev Invariant for the Lie Superalgebra $\mathfrak{gl}(1|1)$ *Comm. Math. Phys.*, 1997, 185, 93–127

- [35] P. Filippova Values of the \mathfrak{sl}_2 Weight System on Complete Bipartite Graphs *Funct. Anal. Appl.*, 54:3 (2020), 208–223
- [36] P. Filippova Values of the \mathfrak{sl}_2 -weight system on a family of graphs that are not intersection graphs of chord diagrams *Sbornik Math.* 213:2 (2022), 115–148
- [37] M. Kontsevich. Vassiliev knot invariants. in: *Advances in Soviet Math.*, 16(2):137–150, 1993.
- [38] Sergei K. Lando. On a Hopf algebra in graph theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 80(1):104–121, 2000.
- [39] Okounkov, Andrei and Olshanski, Grigori Shifted Schur Functions. June 1996. *St. Petersburg Math. J.* volume 9.
- [40] G. Olshanski Representations of infinite-dimensional classical groups, limits of enveloping algebras and yangians in “Topics in Representation Theory”, *Advances in Soviet Math.* 2, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1991, pp. 1–66.
- [41] R. Penrose Applications of negative dimensional tensors. In: *Combinatorial mathematics and its applications* (ed. D. J. A. Welsh), New York. London: Academic Press, 1971.
- [42] William R Schmitt. Incidence Hopf algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 96(3):299–330, 1994.
- [43] Zhuoke Yang On values of \mathfrak{sl}_3 weight system on chord diagrams whose intersection graph is complete bipartite arXiv:2102.00888
- [44] P. Zakorko to appear
- [45] Zhelobenko D.P. Compact Lie groups and their representations. Nauka, Moscow, 1970. English translation: *Translations of mathematical monographs*, v. 40. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1973.
- [46] Zhuoke Yang, New approaches to \mathfrak{gl}_N weight system, to appear
- [47] А. К. Звонкин, С. К. Ландо, *Графы на поверхностях и их приложения* (Глава 6), М., МЦНМО, 2010
- [48] S. Chmutov, S. Duzhin, Y. Mostovoy, *CDBook*, 2010
<http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin>
- [49] С. К. Ландо, *J-инварианты орнаментов*, Функ. анал. и прилож., т. 40, no. 1, 1–13 (2006)
- [50] S. V. Chmutov, S. K. Lando, *Mutant knots and intersection graphs*, *Algebraic and Geometric Topology*, vol. 7, 101–120 (2007)