# Инварианты графов, узлов и вложенных графов

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2022

# Лекция 1. Предварительные сведения

Предлагаемый курс лекций посвящен инвариантам различных комбинаторно-топологических объектов малой размерности — графов и оснащенных графов, узлов и зацеплений в 3-мерной сфере, вложенных графов и дельта-матроидов.
Инвариант — это функция, принимающая одинаковые значения на изоморфных объектах. Основной акцент в курсе будет сделан на задаче переноса инвариантов с объектов одного вида на объекты другого вида. Эта задача активно обсуждается в исследовательской литературе последнего времени, и лектор планирует познакомить слушателей с самыми свежими результатами.
Курс рассчитан на студентов бакалавриата и магистратуры. Он не требует предварительных знаний.
В курсе планируется предлагать участникам большое количество задач; некоторые из предлагаемых задач являются нерешенными.

# Лекция 1. Предварительные сведения

Предлагаемый курс лекций посвящен инвариантам различных комбинаторно-топологических объектов малой размерности — графов и оснащенных графов, узлов и зацеплений в 3-мерной сфере, вложенных графов и дельта-матроидов.
Инвариант — это функция, принимающая одинаковые значения на изоморфных объектах. Основной акцент в курсе будет сделан на задаче переноса инвариантов с объектов одного вида на объекты другого вида. Эта задача активно обсуждается в исследовательской литературе последнего времени, и лектор планирует познакомить слушателей с самыми свежими результатами.
Курс рассчитан на студентов бакалавриата и магистратуры. Он не требует предварительных знаний.
В курсе планируется предлагать участникам большое количество задач; некоторые из предлагаемых задач являются нерешенными.

**Литература:**

С. К. Ландо, Введение в дискретную математику, М., МЦНМО, 2012
А.К.Звонкин, С.К.Ландо, Графы на поверхностях и их приложения, М. МЦНМО, 2010
М. Э. Казарян, С. К. Ландо, Весовые системы и инварианты графов и вложенных графов, УМН, вып. 5, 2022

**Definition**

*Граф* это пара $G = (V, E)$, состоящая из конечного множества $V$, называемого множеством *вершин*, и множества $E$ его *ребер* — неупорядоченных пар вершин.

**Definition**

*Граф* это пара $G = (V, E)$, состоящая из конечного множества $V$, называемого множеством *вершин*, и множества $E$ его *ребер* — неупорядоченных пар вершин.

Чаще всего мы будем работать с простыми графами — такими, в которых нет *петель* — ребер, соединяющих вершину с самой собой, и *кратных ребер*, т.е. любые две вершины соединены не более, чем одним ребром.

**Definition**

*Граф* это пара $G = (V, E)$, состоящая из конечного множества $V$, называемого множеством *вершин*, и множества $E$ его *ребер* — неупорядоченных пар вершин.

Чаще всего мы будем работать с простыми графами — такими, в которых нет *петель* — ребер, соединяющих вершину с самой собой, и *кратных ребер*, т.е. любые две вершины соединены не более, чем одним ребром.

**Definition**

Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение $f : V_1 \to V_2$, устанавливающее взаимно-однозначное соответствие между ребрами графа $G_1$ и ребрами графа $G_2$.

**Definition**

*Граф* это пара $G = (V, E)$, состоящая из конечного множества $V$, называемого множеством *вершин*, и множества $E$ его *ребер* — неупорядоченных пар вершин.

Чаще всего мы будем работать с простыми графами — такими, в которых нет *петель* — ребер, соединяющих вершину с самой собой, и *кратных ребер*, т.е. любые две вершины соединены не более, чем одним ребром.

**Definition**

Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение $f : V_1 \to V_2$, устанавливающее взаимно-однозначное соответствие между ребрами графа $G_1$ и ребрами графа $G_2$.

*Несвязное объединение* двух графов также является графом.

Некоторые графы будут нам встречаться настолько часто, что для них понадобятся специальные обозначения.

Некоторые графы будут нам встречаться настолько часто, что для них понадобятся специальные обозначения.

*Полный граф* на $n$ вершинах это граф, в котором каждая вершина соединена с каждой; обозначается $K_n$.

Некоторые графы будут нам встречаться настолько часто, что для них понадобятся специальные обозначения.
*Полный граф* на $n$ вершинах это граф, в котором каждая вершина соединена с каждой; обозначается $K_n$.
*Цепочка* на $n$ вершинах это граф, в котором первая вершина соединена со второй, вторая с третьей, и т.д.; обозначается $A_n$.

Некоторые графы будут нам встречаться настолько часто, что для них понадобятся специальные обозначения.
*Полный граф* на $n$ вершинах это граф, в котором каждая вершина соединена с каждой; обозначается $K_n$.
*Цепочка* на $n$ вершинах это граф, в котором первая вершина соединена со второй, вторая с третьей, и т.д.; обозначается $A_n$.
Если в цепочке соединить последнюю вершину с первой, то получится *цикл* на $n$ вершинах; обозначается $C_n$.

*Простым путем* длины $\ell$ в графе называется последовательность его вершин $(v_1, v_2, \dots, v_{\ell+1})$, содержащая каждую вершину не более, чем по одному разу, в которой каждая вершина $v_i$ соединена ребром с вершиной $v_{i+1}$, для $i = 1, 2, \dots, \ell$. Всякая вершина соединена сама с собой путем длины 0. Две вершины, соединенные ребром, т.е. простым путем длины 1, называются *соседними*, или *смежными*.

*Простым путем* длины $\ell$ в графе называется последовательность его вершин $(v_1, v_2, \ldots, v_{\ell+1})$, содержащая каждую вершину не более, чем по одному разу, в которой каждая вершина $v_i$ соединена ребром с вершиной $v_{i+1}$, для $i = 1, 2, \ldots, \ell$. Всякая вершина соединена сама с собой путем длины 0. Две вершины, соединенные ребром, т.е. простым путем длины 1, называются *соседними*, или *смежными*.

Граф называется *связным*, если любые две вершины в нем можно соединить простым путем. Произвольный граф распадается в несвязное объединение связных графов — его *компонент связности*. Две вершины графа принадлежат одной компоненте связности в том и только в том случае, если их можно соединить простым путем.

*Простым путем* длины $\ell$ в графе называется последовательность его вершин $(v_1, v_2, \dots, v_{\ell+1})$, содержащая каждую вершину не более, чем по одному разу, в которой каждая вершина $v_i$ соединена ребром с вершиной $v_{i+1}$, для $i = 1, 2, \dots, \ell$. Всякая вершина соединена сама с собой путем длины 0. Две вершины, соединенные ребром, т.е. простым путем длины 1, называются *соседними*, или *смежными*.

Граф называется *связным*, если любые две вершины в нем можно соединить простым путем. Произвольный граф распадается в несвязное объединение связных графов — его *компонент связности*. Две вершины графа принадлежат одной компоненте связности в том и только в том случае, если их можно соединить простым путем.

*Простым циклом* длины $\ell > 2$ в графе называется последовательность его вершин $(v_1, v_2, \dots, v_\ell)$, содержащая каждую вершину не более, чем по одному разу, в которой каждая вершина $v_i$ соединена ребром с вершиной $v_{i+1}$, для $i = 1, 2, \dots, \ell - 1$ и вершина $v_\ell$ соединена с вершиной $v_1$.

Связный граф, в котором нет простых циклов, называется *деревом*.

Определение графа дает один из способов его представления — парой конечных множеств $(V, E)$, где $E \subset V \times V$.

Определение графа дает один из способов его представления — парой конечных множеств $(V, E)$, где $E \subset V \times V$.
Еще один удобный и полезный способ представления графа — с помощью его матрицы смежности. Для определения матрицы смежности множество вершин $V(G)$ графа $G$ необходимо занумеровать числами $1, 2, \dots, n = |V(G)|$. *Матрицей смежности* $A(G)$ графа $G$ с занумерованными вершинами называется матрица размером $n \times n$, в клетках которой стоят элементы кольца вычетов по модулю 2, причем на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца которой стоит 1, если вершины с номерами $i$ и $j$ соединены ребром, и 0 в противном случае.
Матрица смежности простого графа симметрична, и все ее диагональные элементы равны 0. Наоборот, всякая такая матрица определяет простой граф.

Определение графа дает один из способов его представления — парой конечных множеств $(V, E)$, где $E \subset V \times V$.
Еще один удобный и полезный способ представления графа — с помощью его матрицы смежности. Для определения матрицы смежности множество вершин $V(G)$ графа $G$ необходимо занумеровать числами $1, 2, \dots, n = |V(G)|$. *Матрицей смежности* $A(G)$ графа $G$ с занумерованными вершинами называется матрица размером $n \times n$, в клетках которой стоят элементы кольца вычетов по модулю 2, причем на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца которой стоит 1, если вершины с номерами $i$ и $j$ соединены ребром, и 0 в противном случае.
Матрица смежности простого графа симметрична, и все ее диагональные элементы равны 0. Наоборот, всякая такая матрица определяет простой граф.
Перенумерация вершин графа приводит, вообще говоря, к другой матрице смежности, задающей, впрочем, граф, изоморфный исходному.

Определение графа дает один из способов его представления — парой конечных множеств $(V, E)$, где $E \subset V \times V$.
Еще один удобный и полезный способ представления графа — с помощью его матрицы смежности. Для определения матрицы смежности множество вершин $V(G)$ графа $G$ необходимо занумеровать числами $1, 2, \ldots, n = |V(G)|$. *Матрицей смежности* $A(G)$ графа $G$ с занумерованными вершинами называется матрица размером $n \times n$, в клетках которой стоят элементы кольца вычетов по модулю 2, причем на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца которой стоит 1, если вершины с номерами $i$ и $j$ соединены ребром, и 0 в противном случае.
Матрица смежности простого графа симметрична, и все ее диагональные элементы равны 0. Наоборот, всякая такая матрица определяет простой граф.
Перенумерация вершин графа приводит, вообще говоря, к другой матрице смежности, задающей, впрочем, граф, изоморфный исходному.

**Problem**

*Как меняется матрица смежности графа при перенумерации его вершин?*

Несложно придумать примеры инвариантов графов:

Несложно придумать примеры инвариантов графов:

- число вершин $|V(G)|$;

Несложно придумать примеры инвариантов графов:

- число вершин $|V(G)|$;
- число ребер $|E(G)|$;

Несложно придумать примеры инвариантов графов:

- число вершин $|V(G)|$;
- число ребер $|E(G)|$;
- число компонент связности;

Несложно придумать примеры инвариантов графов:

- число вершин $|V(G)|$;
- число ребер $|E(G)|$;
- число компонент связности;
-

Несложно придумать примеры инвариантов графов:

- число вершин $|V(G)|$;
- число ребер $|E(G)|$;
- число компонент связности;
-
-

Несложно придумать примеры инвариантов графов:

- число вершин $|V(G)|$;
- число ребер $|E(G)|$;
- число компонент связности;
- 
- 
- ранг матрицы смежности $A(G)$, рассматриваемой как матрица над полем из двух элементов;

Несложно придумать примеры инвариантов графов:

- число вершин $|V(G)|$;
- число ребер $|E(G)|$;
- число компонент связности;
-
-
- ранг матрицы смежности $A(G)$, рассматриваемой как матрица над полем из двух элементов;
- число простых циклов длины 4;

# Лекция 1. Предварительные сведения: Примеры инвариантов графов

Несложно придумать примеры инвариантов графов:

- число вершин $|V(G)|$;
- число ребер $|E(G)|$;
- число компонент связности;
-
-
- ранг матрицы смежности $A(G)$, рассматриваемой как матрица над полем из двух элементов;
- число простых циклов длины 4;
- $\dots$

Какие инварианты лучше, а какие хуже? Инварианты нужны для того, чтобы различать графы. Если инвариант принимает *различные* значения на двух графах, то эти два графа неизоморфны между собой. Однако если значения одного инварианта на двух графах совпадают, то это не значит, что графы изоморфны.

# Лекция 1. Предварительные сведения: Сравнение инвариантов

Какие инварианты лучше, а какие хуже? Инварианты нужны для того, чтобы различать графы. Если инвариант принимает *различные* значения на двух графах, то эти два графа неизоморфны между собой. Однако если значения одного инварианта на двух графах совпадают, то это не значит, что графы изоморфны.
Инвариант является хорошим, если

- его легко вычислять;
- он различает большое количество разных графов;
- его значения легко сравнивать между собой.

# Лекция 1. Предварительные сведения: Сравнение инвариантов

Какие инварианты лучше, а какие хуже? Инварианты нужны для того, чтобы различать графы. Если инвариант принимает *различные* значения на двух графах, то эти два графа неизоморфны между собой. Однако если значения одного инварианта на двух графах совпадают, то это не значит, что графы изоморфны.
Инвариант является хорошим, если

- его легко вычислять;
- он различает большое количество разных графов;
- его значения легко сравнивать между собой.

Например, числа ребер в графах легко вычислять и легко сравнивать их между собой, однако среди связных графов с 8 вершинами (их 11117 штук) имеется 1579 графов с 14 ребрами, поэтому различительная сила этого инварианта не очень велика.

Какие инварианты лучше, а какие хуже? Инварианты нужны для того, чтобы различать графы. Если инвариант принимает *различные* значения на двух графах, то эти два графа неизоморфны между собой. Однако если значения одного инварианта на двух графах совпадают, то это не значит, что графы изоморфны.
Инвариант является хорошим, если

- его легко вычислять;
- он различает большое количество разных графов;
- его значения легко сравнивать между собой.

Например, числа ребер в графах легко вычислять и легко сравнивать их между собой, однако среди связных графов с 8 вершинами (их 11117 штук) имеется 1579 графов с 14 ребрами, поэтому различительная сила этого инварианта не очень велика.
Сам граф является своим инвариантом; его легко вычислять и он различает любые два различных графа. Однако не существует эффективных алгоритмов сравнения графов, поэтому этот инвариант тоже плохой.

Пусть $c$ — натуральное число. *Раскраской* вершин графа $G$ в $c$ цветов называется отображение множества вершин $V(G)$ этого графа в множество $\{1, 2, \dots, c\}$.

**Problem**

*Сколько существует различных раскрасок вершин данного графа $G$ в $c$ цветов?*

Пусть $c$ — натуральное число. *Раскраской* вершин графа $G$ в $c$ цветов называется отображение множества вершин $V(G)$ этого графа в множество $\{1, 2, \dots, c\}$.

**Problem**

*Сколько существует различных раскрасок вершин данного графа $G$ в $c$ цветов?*

Раскраска вершин графа называется *правильной*, если любые две соседние вершины в нем покрашены в разные цвета. Количество правильных раскрасок вершин графа $G$ в $c$ цветов обозначается $\chi_G(c)$ и называется *хроматической функцией* графа $G$.

**Problem**

*Вычислите хроматическую функцию следующих графов:*

Пусть $c$ — натуральное число. *Раскраской* вершин графа $G$ в $c$ цветов называется отображение множества вершин $V(G)$ этого графа в множество $\{1, 2, \ldots, c\}$.

**Problem**

*Сколько существует различных раскрасок вершин данного графа $G$ в $c$ цветов?*

Раскраска вершин графа называется *правильной*, если любые две соседние вершины в нем покрашены в разные цвета. Количество правильных раскрасок вершин графа $G$ в $c$ цветов обозначается $\chi_G(c)$ и называется *хроматической функцией* графа $G$.

**Problem**

*Вычислите хроматическую функцию следующих графов:*

- *дискретного графа (т.е. графа без ребер) на $n$ вершинах;*

# Лекция 1. Предварительные сведения: Хроматическая функция

Пусть $c$ — натуральное число. *Раскраской* вершин графа $G$ в $c$ цветов называется отображение множества вершин $V(G)$ этого графа в множество $\{1, 2, \dots, c\}$.

**Problem**

*Сколько существует различных раскрасок вершин данного графа $G$ в $c$ цветов?*

Раскраска вершин графа называется *правильной*, если любые две соседние вершины в нем покрашены в разные цвета. Количество правильных раскрасок вершин графа $G$ в $c$ цветов обозначается $\chi_G(c)$ и называется *хроматической функцией* графа $G$.

**Problem**

*Вычислите хроматическую функцию следующих графов:*

- *дискретного графа (т.е. графа без ребер) на $n$ вершинах;*
- *полного графа $K_2$ на двух вершинах;*

Пусть $c$ — натуральное число. *Раскраской* вершин графа $G$ в $c$ цветов называется отображение множества вершин $V(G)$ этого графа в множество $\{1, 2, \dots, c\}$.

**Problem**

*Сколько существует различных раскрасок вершин данного графа $G$ в $c$ цветов?*

Раскраска вершин графа называется *правильной*, если любые две соседние вершины в нем покрашены в разные цвета. Количество правильных раскрасок вершин графа $G$ в $c$ цветов обозначается $\chi_G(c)$ и называется *хроматической функцией* графа $G$.

**Problem**

*Вычислите хроматическую функцию следующих графов:*

- *дискретного графа (т.е. графа без ребер) на $n$ вершинах;*
- *полного графа $K_2$ на двух вершинах;*
- *полного графа $K_3$ на трех вершинах;*

Пусть $c$ — натуральное число. *Раскраской* вершин графа $G$ в $c$ цветов называется отображение множества вершин $V(G)$ этого графа в множество $\{1, 2, \dots, c\}$.

**Problem**

*Сколько существует различных раскрасок вершин данного графа $G$ в $c$ цветов?*

Раскраска вершин графа называется *правильной*, если любые две соседние вершины в нем покрашены в разные цвета. Количество правильных раскрасок вершин графа $G$ в $c$ цветов обозначается $\chi_G(c)$ и называется *хроматической функцией* графа $G$.

**Problem**

*Вычислите хроматическую функцию следующих графов:*

- *дискретного графа (т.е. графа без ребер) на $n$ вершинах;*
- *полного графа $K_2$ на двух вершинах;*
- *полного графа $K_3$ на трех вершинах;*
- *цепочки $A_4$ на четырех вершинах.*

# Лекция 1. Предварительные сведения: Хроматическая функция цикла $C_4$

Вычислим теперь хроматическую функцию графа $G = C_4$, цикла на 4 вершинах.

# Лекция 1. Предварительные сведения: Хроматическая функция цикла $C_4$

Вычислим теперь хроматическую функцию графа $G = C_4$, цикла на 4 вершинах. Если $A$ и $B$ — две соседние вершины цикла $C_4$, то рассмотрим два новых графа, граф $G'_{AB}$, полученный из $G$ удалением ребра $AB$ с сохранением всех вершин и граф $G''_{AB}$ полученный стягиванием ребра $AB$ в точку, новую вершину графа. Первый из этих графов является цепочкой на 4 вершинах, второй — полным графом на 3 вершинах.

# Лекция 1. Предварительные сведения: Хроматическая функция цикла $C_4$

Вычислим теперь хроматическую функцию графа $G = C_4$, цикла на 4 вершинах. Если $A$ и $B$ — две соседние вершины цикла $C_4$, то рассмотрим два новых графа, граф $G'_{AB}$, полученный из $G$ удалением ребра $AB$ с сохранением всех вершин и граф $G''_{AB}$ полученный стягиванием ребра $AB$ в точку, новую вершину графа. Первый из этих графов является цепочкой на 4 вершинах, второй — полным графом на 3 вершинах.

**Lemma**

*Справедливо равенство*

$$\chi_{C_4}(c) = \chi_{A_4}(c) - \chi_{K_3}(c).$$

# Лекция 1. Предварительные сведения: Хроматическая функция цикла $C_4$

Вычислим теперь хроматическую функцию графа $G = C_4$, цикла на 4 вершинах. Если $A$ и $B$ — две соседние вершины цикла $C_4$, то рассмотрим два новых графа, граф $G'_{AB}$, полученный из $G$ удалением ребра $AB$ с сохранением всех вершин и граф $G''_{AB}$ полученный стягиванием ребра $AB$ в точку, новую вершину графа. Первый из этих графов является цепочкой на 4 вершинах, второй — полным графом на 3 вершинах.

**Lemma**

*Справедливо равенство*

$$\chi_{C_4}(c) = \chi_{A_4}(c) - \chi_{K_3}(c).$$

**Доказательство.** Действительно, правильные раскраски вершин графа $G = C_4$ это такие правильные раскраски вершин графа $G'_{AB} = A_4$, в которых вершины $A$ и $B$ покрашены в различные цвета. Поэтому из общего количества правильных раскрасок вершин графа $A_4$ нужно вычесть те, в которых конечные вершины цепочки покрашены в одинаковые цвета, а количество таких раскрасок в точности совпадает с количеством правильных раскрасок вершин графа $G''_{AB} = K_3$.

**Theorem (соотношение удаления-стягивания)**

*Для любого графа $G$ и любой пары $A, B$ соседних вершин в нем выполняется равенство*

$$\chi_G(c) = \chi_{G'_{AB}}(c) - \chi_{G''_{AB}}(c).$$

**Theorem (соотношение удаления-стягивания)**

*Для любого графа $G$ и любой пары $A, B$ соседних вершин в нем выполняется равенство*

$$\chi_G(c) = \chi_{G'_{AB}}(c) - \chi_{G''_{AB}}(c).$$

**Theorem**

*Для всякого графа $G$ его хроматическая функция является многочленом от переменной $c$*

# Лекция 1. Предварительные сведения: Соотношение удаления-стягивания

**Theorem (соотношение удаления-стягивания)**

*Для любого графа $G$ и любой пары $A, B$ соседних вершин в нем выполняется равенство*

$$\chi_G(c) = \chi_{G'_{AB}}(c) - \chi_{G''_{AB}}(c).$$

**Theorem**

*Для всякого графа $G$ его хроматическая функция является многочленом от переменной $c$*

Благодаря этому утверждению хроматическую функцию графа часто называют *хроматическим многочленом*.

# Лекция 1. Предварительные сведения: Соотношение удаления-стягивания

**Theorem (соотношение удаления-стягивания)**

*Для любого графа $G$ и любой пары $A, B$ соседних вершин в нем выполняется равенство*

$$\chi_G(c) = \chi_{G'_{AB}}(c) - \chi_{G''_{AB}}(c).$$

**Theorem**

*Для всякого графа $G$ его хроматическая функция является многочленом от переменной $c$*

Благодаря этому утверждению хроматическую функцию графа часто называют *хроматическим многочленом*.

Соотношение удаления-стягивания дает алгоритм вычисления хроматического многочлена произвольного графа. Однако этот алгоритм не очень эффективен — число шагов в нем не меньше числа ребер в графе, и на каждом шаге граф заменяется двумя другими. Кроме того имеются большие семейства графов с совпадающими хроматическими многочленами. При этом различительная сила этого инварианта существенно выше чем, например, числа ребер.

# Семинар 1. Задачи

- Рассуждая по индукции, найдите $\chi_{C_n}(c)$ для цикла заданной длины $n$.
- Пусть $G$ — простой граф. Докажите, что хроматический многочлен графа, полученного из $G$ добавлением одной вершины, соединенной с одной из его вершин, получается из хроматического многочлена графа $G$ умножением на $c-1$.
- Подсчитайте хроматический многочлен для а) деревьев на $n$ вершинах; б) диагональных триангуляций $n$-угольников (т.е. циклов длины $n$, в которых проведены "попарно непересекающиеся диагонали", разбивающие их на треугольники, см. рис.). Покажите, в частности, что хроматическая функция одинакова для всех деревьев и для всех триангуляций на данном числе вершин, а значит, не различает попарно неизоморфные графы этих типов.

- Докажите, что второй коэффициент хроматического многочлена $\chi_G(c)$ графа $G$ с $n$ вершинами (коэффициент при $c^{n-1}$) равен числу ребер в $G$, взятому со знаком минус.
- Докажите, что хроматический многочлен $\chi_G(c)$ графа $G$ с $n$ вершинами и $m$ компонентами связности делится на $c^m$ и все его коэффициенты при $c^m, c^{m+1}, \dots, c^n$ отличны от нуля.
- Докажите, что знаки коэффициентов хроматического многочлена чередуются: коэффициент при $c^k$ имеет знак $(-1)^{n-k}$.

# Семинар 1. Задачи

- *Ориентацией графа* называется выбор направлений ребер в нем. Ориентация называется *ациклической*, если в графе отсутствуют циклы, идущие в направлении ориентированных ребер. Докажите, что число ациклических ориентаций графа равно $|\chi_G(-1)|$ — модулю значения хроматического многочлена в точке $-1$. Проверьте, что это утверждение распространяется и на графы с кратными ребрами и петлями. Например, для графа $A_2 = K_2$ имеем $\chi_{A_2}(-1) = 2$, и действительно, обе возможные ориентации отрезка являются ациклическими. В свою очередь, $\chi_{K_3}(-1) = -6$, и из восьми возможных ориентаций треугольника ровно две не являются ациклическими. Для доказательства воспользуйтесь тем, что количество ациклических ориентаций удовлетворяет соотношению удаления-стягивания.
- Выберем в связном графе $G$ произвольную вершину $v \in V(G)$. Докажите, что абсолютная величина коэффициента при линейном члене в хроматическом многочлене $\chi_G(c)$ равна числу ациклических ориентаций ребер графа $G$, по отношению к которым $v$ является стоком (вершиной, в которую входят все стрелки), при том единственным. Например, если $G$ — это дерево, то любая его вершина однозначно определяет ориентацию, в которой она — единственный сток (всякая ориентация ребер дерева является ациклической); в свою очередь, коэффициент при линейном члене в хроматическом многочлене дерева равен 1.

- Докажите, что если хроматический многочлен графа равен $c(c-1)^{n-1}$, то этот граф — дерево на $n$ вершинах.