

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА – 2022
ЛИСТОК 1

Интеграл вида $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$, где C – гладкий замкнутый контур, а f – функция, непрерывная на контуре C кроме, возможно, конечного числа точек, где она может иметь интегрируемый разрыв, называется *интегралом типа Коши*. Обозначим через $F^+(z_0)$, $F^-(z_0)$ предельные значения функции $F(z)$ при стремлении z к точке $z_0 \in C$ соответственно внутри и снаружи контура, а через $F(z_0)$ – сингулярный интеграл

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0},$$

понимаемый в смысле главного значения.

1. Докажите следующие соотношения:

а) $F^\pm(z_0) = F(z_0) \pm \frac{1}{2}f(z_0)$ (формулы Сохоцкого),

б) $F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2}f(z_0)$.

2. Вычислите интеграл $\frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_{|w|=1} \frac{\varphi(w)}{w - z} dw$, где $\varphi(w) = \frac{2}{w(w - 2)}$.

3. Пусть C – замкнутый контур. Найдите $F^\pm(z)$ в случаях:

а) $f(\zeta) = (\zeta - a)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, точка a внутри C ;

б) $f(\zeta) = (\zeta - a)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, точка a вне C ;

в) f голоморфна внутри C кроме конечного числа простых полюсов в точках a_i ;

г) $f(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta - a}{\zeta - b}}$ – однозначная вне разреза по дуге между a и b внутри C ветвь корня ($f(\infty) = 1$).

4. Докажите, что если $f(z) = h^+(z) + h^-(z)$, где h^+ и h^- – граничные значения функций, аналитических соответственно внутри и вне контура C , то $F^+(z_0) = h^+(z_0) + h^-(\infty)$, $F^-(z_0) = -h^-(z_0) + h^-(\infty)$.

5. Вычислите

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z},$$

где C – окружность радиуса R с центром в точке $a \in \mathbb{C}$ и проверьте на этом примере формулы Сохоцкого.

6. Пусть C – вещественная прямая, пробегаемая слева направо, $f(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $f(x) = 0$ при $|x| > 1$. Найдите $F(z)$, предельные значения $F^\pm(x)$ и главное значение $F(x)$ при $x \in \mathbb{R}$.

7. Вычислите интегралы:

a) P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx,$

б) P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1-x^4} dx,$

в) P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 5x + 6},$

г) P.V. $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{t^2 + 3}{t-x} dt, \quad x \in (-1, 1),$

д) P.V. $\int_0^1 \log \frac{1-t}{t} \frac{dt}{t-x}, \quad x \in (0, 1).$