

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА – 2022
ЛИСТОК 2

1. Докажите, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \delta^{(\varepsilon)}(x) f(x) dx = f(0)$ для любой бесконечно дифференцируемой функции f для следующих функций:

а) $\delta^{(\varepsilon)}(x) = \frac{\varepsilon/\pi}{x^2 + \varepsilon^2}$, б) $\delta^{(\varepsilon)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon}$, в) $\delta^{(\varepsilon)}(x) = \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x}$.

2. Докажите, что в смысле обобщенных функций

$$x\delta(x) = 0, \text{ но } x\delta'(x) = -\delta(x) \neq 0.$$

3. Для любой регулярной функции $a(x)$ докажите тождество

$$a(x)\delta'(x) = a(0)\delta'(x) - a'(0)\delta(x).$$

4. Пусть $f(x)$ – дифференцируемая функция с простыми нулями в точках x_i . Определим обобщенную функцию $\delta(f)$ равенством

$$(\delta(f), \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^{-1} \int_{0 < f(x) < \varepsilon} \varphi(x) dx$$

для любой основной функции φ . Покажите, что

$$\delta(f) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}.$$

5. а) Покажите, что $\theta'(x) = \delta(x)$ в смысле обобщенных функций;
б) Пусть функция f дифференцируема во всех точках кроме точки x_0 , где имеет разрыв $[f]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$. Покажите, что в смысле обобщенных функций

$$f'(x) = \{f'(x)\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0),$$

где $\{f'(x)\} = f'(x)$ при $x \neq x_0$ и $\{f'(x)\} = 0$ при $x = x_0$.

6. а) Определим обобщенные функции $1/x$ и $1/x^2$ равенствами

$$\left(\frac{1}{x}, f\right) = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx, \quad \left(\frac{1}{x^2}, f\right) = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} dx$$

для любой основной функции f . Покажите, что в смысле обобщенных функций

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

б) Определите обобщенную функцию $1/x^3$.

7. Пусть $\varphi(x, y)$ – антисимметричная дифференцируемая функция, $\varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$. Докажите тождество

$$\delta'(x - y)\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \delta(x - y)(\partial_y - \partial_x)\varphi(x, y).$$

8. Докажите тождество

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n).$$

9. В $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$ докажите тождества

$$\text{а) } \partial_{\bar{z}} \left(\frac{1}{z} \right) = \pi \delta(z); \quad \text{б) } \Delta \log |z| = 2\pi \delta(z),$$

где $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$ – оператор Лапласа; в) найдите $\partial_{\bar{z}} \left(\frac{1}{z^2} \right)$.

10. В $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$ докажите тождества

$$\text{а) } \partial_{\bar{z}} \log z = -\pi \delta(y) \theta(-x); \quad \text{б) } \partial_z \log z = \frac{1}{z} + \pi \delta(y) \theta(-x),$$

где $\log z$ – однозначная голоморфная ветвь логарифма в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ такая, что $\log x \in \mathbb{R}$ при $x \in \mathbb{R}_+$.