Семинар 4

1. Линейный оператор $A\colon V \to W$ в выбранных базисах этих пространств записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу индуцированного линейного отображения пространств $\wedge^2 W^* \to \wedge^2 V^*$ относительно лексикографически упорядоченных стандартных двойственных базисов.

2. Координаты векторов V_1, V_2, V_3 равны $(1,0,0,1,2), (-1,0,1,1,0), (1,1,0,1,0)$ соответственно. Найти координаты тривектора $V_1 \wedge V_2 \wedge V_3$ относительно стандартного базиса в $\wedge^3 V$.

3. Разложимый r-вектор $V_1 \wedge V_2 \ldots \wedge V_r$ тогда и только тогда равен нулю, когда векторы $V_1, V_2, \ldots, V_r$ линейно зависимы. Доказать.

4. Если оператор $A\colon V \to V$ диагонализуем, то этим же свойством обладает и оператор $\wedge^k A$. Доказать. Верно ли обратное утверждение?

5*. Доказать, что $\det(\wedge^r A) = (\det A)^{\binom{n-1}{r-1}}$ для линейного оператора A, действующего в n-мерном векторном пространстве V. В частности, $\det(\wedge^n A) = \det A$ – полезный факт, легко проверяемый вручную.

6. Доказать, что подпространство $U < V$ тогда и только тогда инвариантно относительно линейного оператора $A\colon V \to V$, когда подпространство $\wedge^k U < \wedge^k V$ инвариантно относительно оператора $\wedge^k A$.