2 Лекция 2. Уравнения на прямой.

Рисование интегральных кривых уравнения $\dot{x} = v(x), v \in C^1$ без решения. Будет доказано:

Предложение 1 *Все решения с начальными условиями между двумя особыми точками определены на всей оси.*

2.1 Поля направлений и интегральные кривые

Теорема 1 *Интегральные кривые поля направлений, заданного векторами* $(1, f(t, x))$ *- это в точности графики решений уравнения* $\dot{x} = f(t, x)$.

Доказательство *График решения касается направлений поля* $\Leftarrow$ производная - это наклон касательной.

Интегральная кривая поля - это график решения. Кривая $\gamma = \{(\varphi(\tau), \psi(\tau))\}, \dot{\gamma} \neq 0$. Вектор $\dot{\varphi}(\tau), \dot{\psi}(\tau)$ пропорционален $(1, f)$. Следовательно, $\dot{\varphi}(\tau) \neq 0$. Фиксируем произвольное τ_0. По локальной теореме об обратной, функция $t = \varphi(\tau)$ обратима в окрестности $\tau_0 : \tau = \zeta(t)$. Тогда $\gamma = \{(t, \psi \circ \zeta(t))\} = \{(t, x(t))\}$. Наклон касательной к $gamma$ в точке $(t, x(t))$ равен $f(t, x(t))$. Знвчит, γ - график решения. $\square$

2.2 Решение простейшего уравнения

$$\dot{x} = f(t) \tag{1}$$

Предложение 2 *Задача Коши для уравнения* (1) *с непрерывной правой частью, с начальным условием* $x(t_0) = x_0$ *имеет решение*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)dt.$$

Других решений нет.

Доказательство Формула Ньютона-Лейбница и теорема о нулевой производной. $\square$

2.3 Решение автономного уравнения на прямой

$$\dot{x} = v(x), \tag{2}$$

v непрерывно, (особые точки изолированы).

Предложение 3 *Пусть v - класса $C^1(\mathbb{R})$. Тогда через каждую точку плоскости $\mathbb{R}^2$ проходит одна и только одна интегральная кривая. Особым точкам соответствуют постоянные решения. Если x_0 - неособая точка, то интегральная кривая, проходящая через точку (t_0, x_0) имеет вид $(t(x), x)$:*

$$t(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{v(x)} dx. \tag{3}$$

Функция $t(x)$ обратима. Если x_0 принадлежит отрезку между соседними особыми точками a и b, то функция определена на всей прямой t.

Доказательство Интегральные кривые уравнения (2) - это интегральные кривые поля поля $(1, v(x))$. В области $v \neq 0$ это - интегральные кривые поля $\left(\frac{1}{v(x)}, 1\right)$, то есть гракфики решений уравнения

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v(x)}.$$

Формула (3) следует из предложения 2.

Функция $t(x)$ монотонна на своей области определения. Если $v(a) = v(b) = 0$, $v|_{(a,b)} \neq 0$, $x_0 \in (a, b)$, то интеграл (3) расходится в точках и поэтому область значений функции $t(x)$ - вся прямвя.

Единственность для неособых начальных условий доказана выше. Единственность для особых начальных условий следует из расходимости интеграла (3). $\square$

Замечане 1 *Инвариантность множества интегральных кривых относиительно сдвига вдоль оси t.*

2.4 Продолжимость на всю ось

Может показаться, что решение уравнения с “хорошей” правой частью продолжается на всю ось времени. Это не так, как показывает пример.

Решение задачи Коши

$$\dot{x} = x^2, \ x(0) = x_0$$

имеет вид:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0}.$$

При $x_0 > 0$ решение определено на $(-\infty, \frac{1}{x_0})$, при $x_0 < 0$ - на $(\frac{1}{x}0, \infty)$.

Чтобы решение было определено на всей оси t, нужно, чтобы соответствующая функция $t(x)$, см. (**??**), отображала свою область на всю прямую. Для этого нужно, чтобы интеграл (3) расходился на ∞.

2.5 Критерий единственности для автономных уравнений на прямой с непрерывной правой частью

Теорема 2 *Решение уравнения* $\dot{x} = v(x)$, $v \in C^0$, *с начальным условием* (t_0, a), $v(a) = 0$ *единственно* $\Leftrightarrow$ *интеграл* (3) *расходится в точке* a.

Доказательство Немедленное следствие из формулы (3). $\square$