6 Лекция 6. Пфаффовы уравнения и уравнения Ньютона

6.1 Дифференциальные 1-формы на плоскости

Определение 1 1-*форма на линейном протсранстве - это линейный функционал на этом пространстве. На двумерном пространстве* T *с кооординатами* dx, dy *она имеет вид*

$$adx + bdy \in T^*.$$

Определение 2 *Дифференциальная* 1-*форма на области* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *- это отображение*

$$\omega : (x, y) \mapsto \omega(x, y) = a(x, y)dx + b(x, y)dy \in T^*_{(x,y)}.$$

Множество нулей дифференциальной формы $adx + bdy$ *при* $a^2 + b^2 \neq 0$ *- это прямая* $dy = -\frac{a}{b}dx$ *или* $dx = -\frac{b}{a}dy$.

6.2 Пфаффовы уравнения

Пусть $\omega -$ 1- форма на плоскости:

$$\omega(x, y) = f(x, y)dx + g(x, y)dy. \tag{1}$$

Уравнение

$$\omega = 0 \tag{2}$$

называется пфаффовым уравнением. Его интегральные кривые - это кривые, касающиеся в каждой своей точке(x, y) множества нулей формы ω, если $\omega(x, y) \neq 0$. Точки, в которых $\omega = 0$, называются особыми.

Предложение 1 *Интегральные кривые уравнения* (2), (1) *- это интегральные кривые любого из дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f}{g}(x, y), \ \frac{dx}{de} = -\frac{q}{f}(x, y).$$

Доказательство Направление поля $\omega = 0$ в точке (x, y) имеет наклон к оси x, равный $-\frac{f}{g}(x, y)$, и к оси y, равный $-\frac{g}{f}(x, y)$. □

6.3 Замкнутые и точные формы

Определение 3 1- *форма* (1) *называется* замкнутой, *если*

$$f_y = g_x,$$

и точной, *если существует функция, называемая потенциалом, такая что*

$$\omega = dF.$$

Всякая точная 1-форма с C^2-гладким потенциалом замкнута. Это следует из теоремы о равенстве смешанных производных.

Лемма 1 *Лемма Пуанкаре. Замкнуиая C^1-гладкая 1-форма точна, если она задана в односвязной области.*

Мы докажем эту лемму для форм, заданных в области, которая вместе с каждыми двумя точками A и B содержит не только отрезок AB, но и прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и диагональю AB.

Доказательство Пусть ω имеет вид (1), и $f_y = g_x$. Построим ее потенциал F по следующей формуле:

$$F(x,y) = \int_0^x f(\xi,0)d\xi + \int_0^y g(x,\eta)d\eta.$$

Мы хотим доказать, что

$$F_x = f,\ F_y = g.$$

Вторая из этих формул очевидна. Докажем первую.

$$F_x = f(x,0) + \int_0^y g_x(x,\eta)d\eta.$$

В силу замкнутости формы ω,

$$F_x = f(x,0) + \int_0^y f_y(x,\eta)d\eta = f(x,0) + (f(x,y) - f(x,0)) = f(x,y).$$

$\square$

6.4 Уравнения в полных дифференциалах

Так называются пфаффовы уравнения (2), в которых форма ω точна.

Теорема 1 *Интегральные кривые уравнения $\omega = 0$ для точной формы ω - это линии уровня ее потенциала.*

Доказательство Пусть $\omega = dF$. ТОгда уравнение $\omega = 0$ примет вид:

$$F_x dx + F_y dy = 0.$$

По теореме о неявной функции, наклон линии уровня F, проходящей через точку (x, y) к оси x равен $-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$, а к оси y равен $-\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)}$ в областях, где знаменатели не равны нулю. $\square$

6.5 Обоснование метода разделения переменных

Интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(y)}{F(x)} -$$

это интегральные кривые пфаффова уранения

$$\omega = \frac{dx}{F(x)} - \frac{dy}{G(y)} = 0$$

в области $FG \neq 0$. Это уравнение - в полных дифференциалах: если

$$f' = \frac{1}{F},\ g' = -\frac{1}{G},$$

то

$$\omega = d(f(x) + g(y)).$$

6.6 Уравнения Ньютона

Пусть на частицу единичной массы, движущейся по прямой, в точке x действует сила $f(x)$. По второму закону Ньютона

$$\ddot{x} = f(x).$$

Превратим это уравнение в систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases} \tag{3}$$

Фазовые кривые этой системы - это интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y}.$$

Они же - интегральные кривые пфаффова уранения

$$ydy - f(x)dx = 0.$$

Левая часть этого уравнения - полный дифференциал от функции

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x),\ U' = -f. \tag{4}$$

Функция U называется потенциалом (или потенциальной энергией), функция $\frac{y^2}{2}$ - кинетическая энергия, а функция H - полная энергия. Фазовые кривые системы (3) - линии уровня функции H вне ее критических точек $(x, 0)$, где $f(x) = 0$. Доказана

Теорема 2 *(закон сохранения энергии) Фазовые кривые уравнения Ньютона* (3) *вне особых точек этого уравнения - это линии уровня полной энергии* (4).

6.7 Примеры

1.$\ddot{x} = -x$. Грузик на пружине. Фазовые кривые - концентрические окружности. Особая точка $(0, 0)$ - типа *центр* (по определению)

Упражнение. Нарисуйте фазовые кривые уравнения $\ddot{x} = -\omega^2 x,\ \omega > 0$

2. $\ddot{x} = x$. Фазовые кривые $x^2 - y^2 = const$. Особая точка - седло.

3. Математический маятник. $\ddot{x} = -\sin x$. На лекции рисуется и интерпретируется фазовый портрет.