4 Лекция 4. Разделение переменных. Однородные уравнения

4.1 Прямые произведения фазовых портретов

Рассмотрим автономную ситему на плоскости, в которой каждое уравнение является автономным уравнением на своей координатной оси:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ \dot{y} = G(y) \end{cases} \tag{1}$$

Тогда, если $F,\ G \in C^1(\mathbb{R})$, и $\varphi(t, x_0),\ \psi(t, y_0)$ - решения задачи Коши

$$\dot{x} = F(x),\ x(t_0) = x_0$$

и

$$\dot{y} = G(y),\ y(t_0) = y_0,$$

то вектор-функция $(\varphi(t), \psi(t))$ является решением задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием:

$$(\varphi, \psi)(t_0) = (x_0, y_0).$$

Это немедленно следует из определений.

4.2 Примеры: седло, узел, седлоузел

1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -\lambda y,\ \lambda > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ее фазовый портрет изображен на рис. 3.15b (все ссылки даются на книгу ОДУ: Буфетов, Гончарук, Ильяшенко, Обыкновенные дифференциальные уравнения) и называется *седло*.

2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \mu y,\ \lambda\mu > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Ее фазовый портрет изображен на рис. 3.15a; это *узел*.

3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \tag{4}$$

Ее фазовый портрет изображен на рис. 3.15с; это *седлоузел.*

Эти картинки, как детали пазла, встречаются на многих фазовых портретах; их полезно запомнить.

4.3 Связь интегральных кривых автономного уравнения и фазовых кривых неавтономного

Теорема 1 *Фазовые кривые уравнения*

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = G(x, y) \end{cases} \tag{5}$$

в области $F \neq 0$ являются интегральными кривыми неавтономного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}, \tag{6}$$

а в области $G \neq 0$ интегральными кривыми неавтономного уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}. \tag{7}$$

Доказательство Фазовая кривая уравнения (5) в точке (x, y) касается вектора $(F(x, y),\ G(x, y))$. В области $F \neq 0$, этот векиор пропорционален вектору $\left(1, \frac{G(x,y)}{F(x,y)}\right)$, которого касается интегральная кривая уравнения (6). $\square$

4.4 Уравнения с разделяющимися переменными

Так называются уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(y)}{F(x)}. \tag{8}$$

В области $F = G = 0$ правая часть не определена. В области $F \neq 0$ фазовые кривые системы (1) совпадают с интегральными кривыми уравнения (8). Мы умеем решать систему (1), значит умеем решать и уравнение (8).

Более короткий способ решения дается следующим мнемоническим приемом: уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(y)}{F(x)}$$

в области $FG \neq 0$ заменяем на уравнение

$$\frac{dx}{F(x)} = \frac{de}{G(y)}$$

и проинтегрируем обе части. Решение уравнения (8) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ задается неявно уравнением:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{F(\xi)} = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}.$$

Обоснование этого метода легко вывести из связи уравнения (8) с системой (1). Подробное обоснование будет давно в следующих лекциях.

4.5 Система Лоттка-Вольтерра

Эта система описывает динамику популяций, состоящих из двух видов: щуки (хищники, их число y) и караси (жертвы, их число x). Система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bxy \\ \dot{y} = -Cy + Dxy. \end{cases} \tag{9}$$

Мотивировка. В отсутствие щук караси свободно размножаются. Но щуки поедают их тем больше, чем больше есть карасей и щук. В отсутствие карасей щуки вымирают. Но при наличии карасей они размножаются со скоростью, пропорциональной наличию щук и карасей вместе.

Система (9) называется системой Лоттка-Вольтерра и объясняет следующее парадоксальное наблюдение: во время первой мировой войны, когда людям было не до карасей, и их перестали ловить, число караей *уменьшилось*, а щуки расплодились.

Объяснение таково. Рассмотрим неавтономное уравнение, соответствующее системе (9) (все коэффициенты для простоты считаем единицами):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}.$$

Отсюда

$$\frac{(1-y)dy}{y} = \frac{(x-1)dx}{x}$$

или

$$x - \ln x + y - \ln y = const.$$

Функция $x - lnx$ выпукла вниз и стремится к $+\infty$ при $x \to 0$ и $x \to \infty$.

Факт из анализа: сумма двух таких функций - одна от x, другая от y, в качестве линий уровня имеет замкнутые выпуклые кривые. Фазовый портрет уравнения

Лоттка-Вольтерра изображен на рис. 4.6 книги: первый квадрант заполнен концентрическими замкнутыми кривыми, окружающими положение равновесия $(1, 1)$.

Парадоксальное наблюдение, упомянутое выше, объясняется рассмотрением этого фазового портрета.

4.6 Однородные уравнения

Однородными называются уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = F\left(\frac{x}{t}\right) \tag{10}$$

Легко доказать следующее предложение:

Предложение 1 *Поле направлений уравнения* (10) *не меняется при растяжении* $t \mapsto \lambda t$, $x \mapsto \lambda x$. *Следовательно, если* $t = t(\tau)$, $x = x(\tau)$ *— интегральная кривая уравнения* (10) *и* $\lambda \neq 0$, *то* $t = \lambda t(\tau)$, $x = \lambda x(\tau)$ *— также интегральная кривая этого уравнения.*

Предложение 1 показывает, что у нашего уравнения есть *симметрия* — семейство отображений $(t, x) \to (\lambda t, \lambda x)$, которые сохраняют множество интегральных кривых.

В области $t \neq 0$ введем координаты (t, u), где $u = \frac{x}{t}$. Тогда для любого решения $x(t)$ исходного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = F(u),$$

причем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(ut)}{dt} = u + t\frac{du}{dt}.$$

В последнем равенстве выражение du/dt — это производная функции $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ по t. Итак,

$$\frac{du}{dt} = \frac{F(u) - u}{t}.$$

Метод разделения переменных даёт

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{dv}{F(v) - v} = \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau} = \ln|t| - \ln|t_0|.$$

Мы получили неявную формулу для функции $u(t)$. Найдя функцию $u(t)$, легко найти и функцию $x(t) = u(t)t$.

Таким образом, однородные уравнения мы тоже научились решать. Оказывается, что *наличие симметрии позволяет уменьшить число уравнений в системе, а если уравнение одно — решить его.*